

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale  
Modulo di PRESTAZIONI

Docente : Ing. F. NICOLOSI

**CAP. 8**

**PRESTAZIONI DI SALITA**

## 8.1 VELOCITA' DI SALITA-TEORIA

Si immagini un Boeing 777 (vedi Fig. 8.1) che si sta portando alla velocità di decollo sulla pista di un aeroporto. Esso si solleva dolcemente a circa 180 mi/h (289.7 km/h), il muso ruota verso l'alto, e l'aeroplano rapidamente sale fuori dalla vista. In una questione di minuti esso sta volando a velocità di crociera a 30000 ft (9144 m). Questa figura ispira le seguenti domande: Quanto rapidamente può salire un aeroplano? Quanto tempo impiega a raggiungere una certa quota? I prossimi due paragrafi forniscono alcune risposte.

Consideriamo un aeroplano in volo regolare (continuo), non accelerato, in salita, come mostrato in Fig. 8.2. La velocità lungo la traiettoria di volo è  $V_\infty$ , e la stessa traiettoria di volo è inclinata sull'orizzontale di un angolo  $\theta$ . Come sempre, portanza e resistenza sono perpendicolare e parallela a  $V_\infty$ , e il peso è perpendicolare all'orizzontale. La spinta  $T$  si suppone sia allineata con la traiettoria di volo. Qui la differenza fisica con la precedente trattazione del volo livellato è che  $T$  non lavora solo per vincere la resistenza, ma per il volo in salita essa sostiene (equilibra) una componente del peso. Sommando le forze parallele alla traiettoria di volo, abbiamo

$$T = D + W \sin \theta \quad [8.1]$$

e perpendicolare alla traiettoria di volo, abbiamo

$$L = W \cos \theta \quad [8.2]$$

Si noti dall'Eq. [8.2] che la portanza è ora più piccola del peso. Le Eq. [8.1] e [8.2] rappresentano le equazioni del moto per volo di salita regolare.

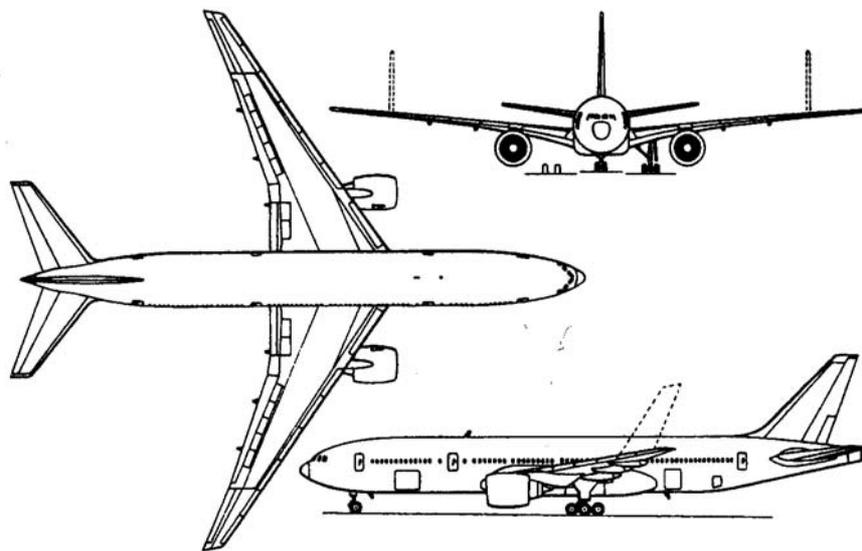


Fig. 8.1 : Velivolo 777

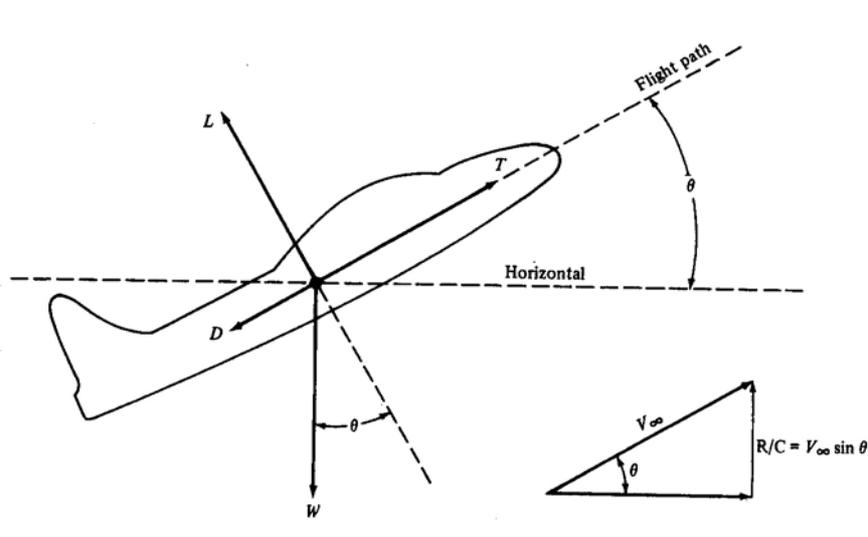


Fig. 8.2

Moltiplichiamo l'Eq. [8.1] per  $V_\infty$  :

$$TV_\infty = DV_\infty + WV_\infty \sin \theta$$

$$\frac{TV_\infty - DV_\infty}{W} = V_\infty \cdot \sin \theta \quad [8.3]$$

Esaminiamo attentamente l'Eq. [8.3]. Il secondo membro,  $V_\infty \sin \theta$ , è la velocità *verticale* dell'aeroplano, come illustrato in Fig. 8.2. Questa velocità verticale è chiamata *velocità ascensionale (rateo di salita) RC*:

$$RC \equiv V_\infty \sin \theta \quad [8.4]$$

Al primo membro dell'Eq. [8.3],  $TV_\infty$  è la potenza disponibile, ed è rappresentata dalla curva della potenza disponibile  $P_d$ . Il secondo termine a primo membro dell'Eq. [8.3], è  $DV_\infty$ , che per il volo livellato è la potenza richiesta (necessaria), come rappresentato dalla curva  $P_{no}$ . Per il volo in salita, però,  $DV_\infty$  non è più, precisamente, la potenza richiesta, perché la potenza deve essere impiegata per vincere una componente del peso come pure la resistenza. Tuttavia, per piccoli angoli di rampa,  $\theta < 20^\circ$ , è ragionevole trascurare questo fatto e assumere che il termine  $DV_\infty$  nell'Eq. [8.3] è dato dalla curva  $P_{no}$  del volo livellato. Con ciò,

$$TV_\infty - DV_\infty = \text{potenza in eccesso} \quad [8.5]$$

dove la potenza in eccesso è la differenza tra la potenza disponibile e la potenza necessaria, come mostrato in Fig. 8.3(a) e 8.3(b), per aerei propulsi a elica e a getto rispettivamente. Combinando le Eq. [8.3] e [8.5], otteniamo

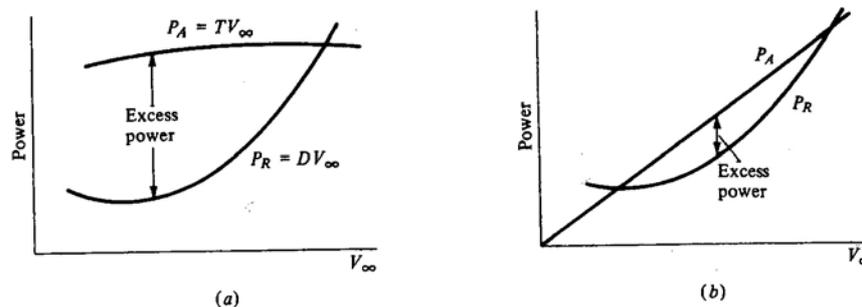


Fig. 8.3 : Curve delle Potenze-Velivolo ad elica (a) e a getto (b)

$$R/C = \frac{\text{potenza in eccesso}}{W} \quad [8.6]$$

dove la potenza in eccesso è chiaramente illustrata in Fig. 8.3.

Ancora, sottolineiamo che le curve della potenza necessaria  $P_R$  o  $P_{no}$  in Fig. 8.3(a) e 8.3(b) sono prese, per comodità, come quelle già calcolate per il volo livellato.

In effetti l'angolo di salita  $\theta$  è solitamente basso e quindi la portanza è quasi uguale al peso, cioè  $\cos\theta \approx 1$  e  $L=W$ .

Facciamo presente che dalla 8.3 si può vedere che

$$\sin\theta = \frac{T_d - D}{W} \quad [8.7]$$

Essendo l'angolo piccolo possiamo dire che

$$\theta \approx \frac{T_d - D}{W} = \frac{\text{Eccesso di spinta}}{\text{peso}} \quad [8.7\text{bis}]$$

Quindi, *in congiunzione con queste curve*, l'Eq. [8.6] è un'approssimazione della velocità ascensionale, buona solo per piccoli  $\theta$ . Per essere più precisi, un diagramma di  $DV_\infty$  in funzione di  $V_\infty$  per il volo in salita [che è esattamente richiesto nell'Eq. [8.3] è diversa da un diagramma di  $DV_\infty$  in funzione di  $V_\infty$  per volo livellato [che è la curva assunta in Fig. 8.3 e usata nell'Eq. [8.6] semplicemente perché  $D$  è *più piccola per il volo in salita che per quello livellato alla stessa  $V_\infty$* . Per vedere ciò più chiaramente, consideriamo un aeroplano con  $W = 5000$  lb (2268 kg),  $S = 100$  ft<sup>2</sup> (9.29 m<sup>2</sup>),  $C_{Do} = 0.015$ ,  $e = 0.6$  e  $AR = 6$ . Se la velocità è  $V_\infty = 500$  ft/s (548.64 km/h) al livello del mare, e se l'aeroplano è in volo *livellato*, allora  $CL = L/(q_\infty S) = W / \left( \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \right) = 0.168$ .

Successivamente

$$CD = C_{Do} + \frac{CL^2}{\pi e AR} = 0.015 + 0.0025 = 0.0175$$

Ora consideriamo lo stesso aeroplano in una salita a 30° al livello del mare, con la stessa velocità  $V_\infty = 500$  ft/s (548.64 km/h). Qui la portanza è minore del peso,  $L = W \cos\theta$ , e perciò

$$CL = W \cos 30^\circ / \left( \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \right) = 0.145.$$

Successivamente,  $CD = C_{Do} + CL^2 / \pi e AR = 0.015 + 0.0019 = 0.0169$ . Questo può essere paragonato con il valore più alto 0.0175 ottenuto sopra per il volo livellato. Come visto in quest'esempio, per un volo regolare in salita,  $L$  (quindi  $CL$ ) è più piccola e perciò è più piccola la resistenza indotta. Conseguentemente, la resistenza totale per il volo in salita è più piccola di quella per il volo livellato alla stessa velocità.

Ritorniamo di nuovo alla Fig. 8.3, che corrisponde ad una data quota. Si noti che la potenza in eccesso è diversa a diversi valori di  $V_\infty$ . Infatti, sia per aereo propulso a elica che a getto ci sono alcune  $V_\infty$  alle quali l'eccesso di potenza è massimo. A questo punto, dall'Eq. [8.6],  $RC$  sarà massimo.

$$RC_{MAX} = \frac{\text{massima potenza in eccesso}}{W} \quad [8.8]$$

Questa situazione è abbozzata in Fig. 30(a), dove la potenza disponibile è quella a valvole aperte al massimo, che è la massima  $P_A$ . La massima potenza in eccesso, mostrata in Fig. 8.4(a), attraverso l'Eq. [8.8] dà il massimo rateo di salita che può essere generato dall'aeroplano alla quota data. Un utile metodo grafico per determinare il massimo RC consiste nel tracciare un diagramma di RC in funzione di  $V_\infty$ , come mostrato in Fig. 8.4(b). Una tangente orizzontale definisce il punto di massimo RC. Un'altra utile costruzione è il diagramma *odografo*, che è un grafico della velocità verticale dell'aeroplano  $V_v$  in funzione della sua velocità orizzontale  $V_h$ . Un odografo di questo genere è abbozzato in Fig. 8.5. Ricordiamo che RC è definito come la velocità verticale,  $RC \equiv V_v$ ; quindi una tangente orizzontale all'odografo definisce il punto di massimo RC (punto 1 in Fig. 8.5). Inoltre, ogni linea passante per l'origine ed intersecante l'odografo (punto 2) ha pendenza  $V_v/V_h$ ; quindi, dalla geometria delle componenti della velocità, tale linea forma l'angolo di rampa  $\theta$  rispetto all'asse orizzontale, come mostrato in Fig. 8.5. Oltre a ciò, la lunghezza della linea è uguale a  $V_\infty$ . Ruotando questa linea in senso antiorario, RC prima aumenta, poi passa attraverso il suo massimo, e alla fine decresce. Alla fine la linea diventa tangente all'odografo nel punto 3. Questa linea tangente dà il massimo angolo di rampa per il quale l'aeroplano può mantenere volo regolare, mostrato come  $\theta_{\max}$  in Fig. 8.5. E' interessante (notare) che il massimo RC non si verifica al massimo angolo di rampa.

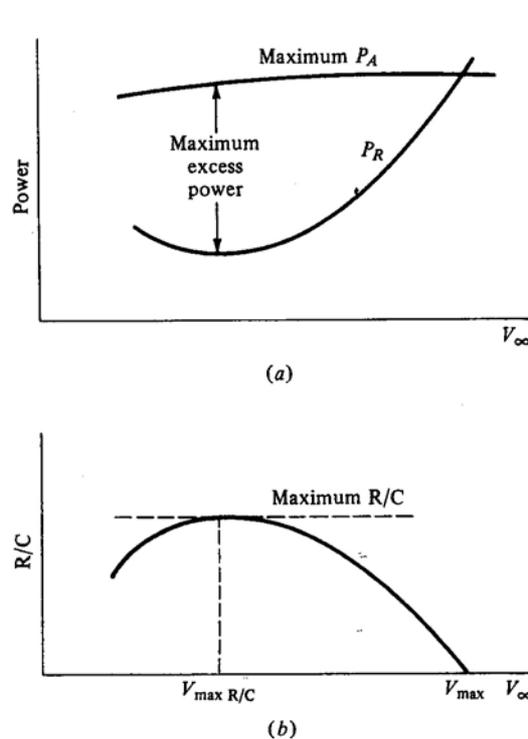


Fig. 8.4

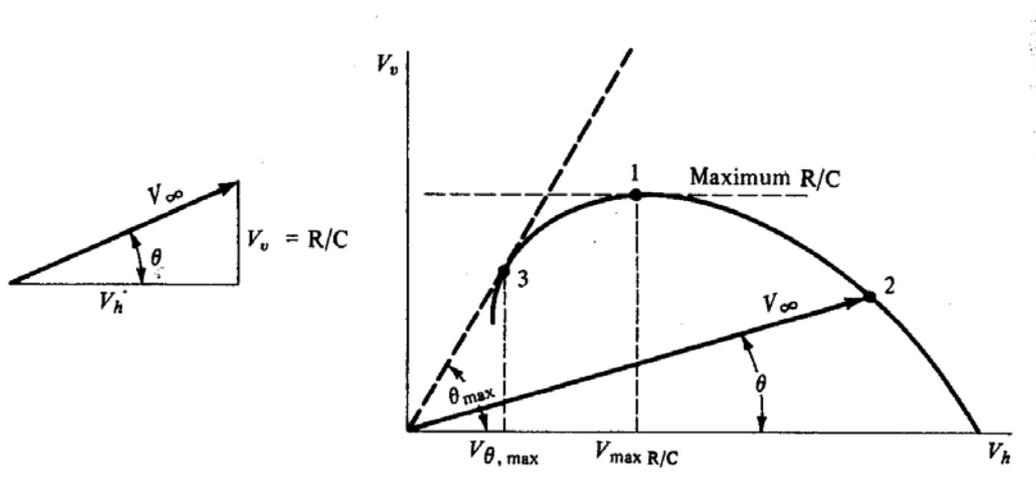


Fig. 8.5 : Odografo per le prestazioni di salita

La grande potenza in eccesso e la alta spinta disponibile negli aerei moderni permettono il volo in salita effettivamente (virtualmente) ad ogni angolo. Per grandi angoli di rampa l'analisi precedente non è valida. Invece, per trattare grandi  $\theta$ , le equazioni originali del moto [Eq. [8.1] e [8.2]] devono essere risolte algebricamente, conducendo ad un'esatta soluzione valida per ogni valore di  $\theta$ .

Ritornando brevemente alla Fig. 8.3(a) e (b) per aereo propulso a elica e a getto, rispettivamente, possiamo vedere un'importante differenza tra i due tipi nelle prestazioni di rateo di salita a bassa velocità. A causa delle caratteristiche di potenza disponibile della combinazione motore a pistoni – elica, grandi potenze in eccesso sono disponibili a bassi valori di  $V_\infty$ , appena sopra lo stallo. Per un aeroplano in avvicinamento (atterraggio), ciò dà un margine di sicurezza soddisfacente in caso di improvviso atterraggio mancato (wave-off) (particolarmente importante per atterraggi su portaerei). In antitesi, la potenza in eccesso disponibile per aerei a getto a bassa  $V_\infty$  è piccola, e, in corrispondenza, con una ridotta capacità di rateo di salita.

Le figure 8.4(b) e 8.5 danno RC ad una quota fissata. Nel prossimo paragrafo ci chiederemo come RC varia con la quota. Nella ricerca di una risposta troveremo anche una risposta ad un'altra domanda, e cioè quanto in alto l'aeroplano può volare.

Di seguito facciamo l'esempio dell'approccio grafico, cioè della stima della curve della velocità di salita a varie quote per un velivolo ad elica ed un velivolo a getto

## 8.2 VELOCITA' DI SALITA - CALCOLO

### 8.2.1 – Velivolo a getto

Facciamo prima l'esempio relativo al velivolo a getto MD-80, di cui riportiamo i dati :

$W=W_{TO}=63500$  Kg peso massimo al decollo

$S=118$  m<sup>2</sup>  $b=33$  m  $AR=9.23$

$CD_0=0.018$   $e=0.80$   $CL_{MAX}=1.5$

Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 8400 Kg di spinta ciascuno, cioè  $T_0=8400 \cdot 2=16800$  Kg

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho :

$E_{MAX}=17.95$

Nelle fig. 8.6 e 8.7 sono riportate le curve della spinta necessaria al volo orizzontale ( $T_{no}$ ) e disponibile ( $T_d$ ) alle quote di S/L (livello del mare, 20000 ft e 35000 ft).

La quota di 35000 ft corrisponde circa alla quota di crociera.

Nelle curve di fig. 8.8 è riportato l'angolo di salita (in gradi) alle 3 quote, al variare della velocità di volo.

Teniamo presente che nella 8.7 l'angolo di salita  $\theta$  è espresso in radianti se tutte le forze sono espresse in Kg (oppure in N).

Nella curva 8.9 è riportato invece il rateo di salita RC in m/s.

Facciamo notare che nella 8.6 il rateo viene in m/s se la potenza è espressa in Watt e il peso a denominatore il Newton.

A volte il rateo viene anche espresso (solitamente) in m/min, o nel caso delle unità anglosassoni (che sono molto utilizzate in aeronautica ) in ft/min.

Un velivolo a getto ha solitamente un massimo rateo di salita al livello del mare intorno ai 20-25 m/s corrispondenti a circa 1200-1500 m/min (cioè guadagna un chilometro al minuto) o anche circa 4000 ft/min.

Teniamo presente che il calcolo effettuato è approssimato per il fatto che la spinta disponibile alle basse quote per un motore turbofan non è costante, come già visto nel cap.6 e 7.

Dalla fig. 8.9 si vede come per un velivolo a getto il massimo rateo di salita si ottiene a velocità non proprio bassissime. In effetti, per un velivolo a getto vale il principio che volando (sulla traiettoria) a velocità elevata si sale anche veloce.

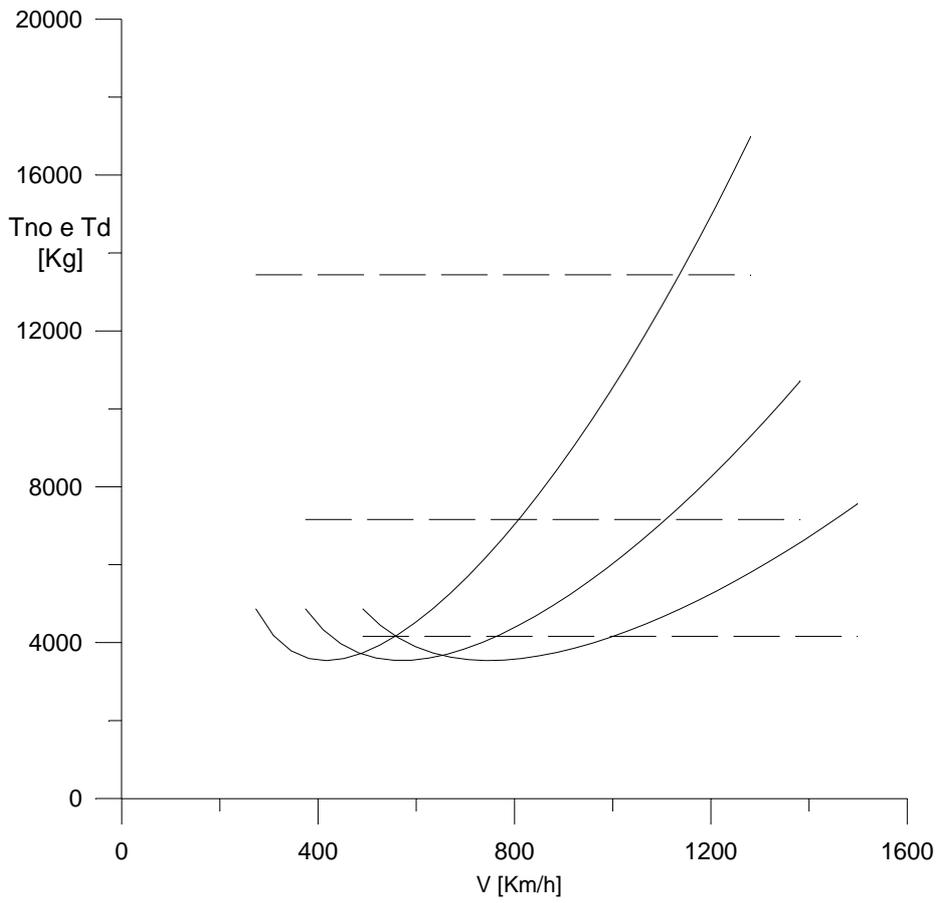


Fig. 8.6

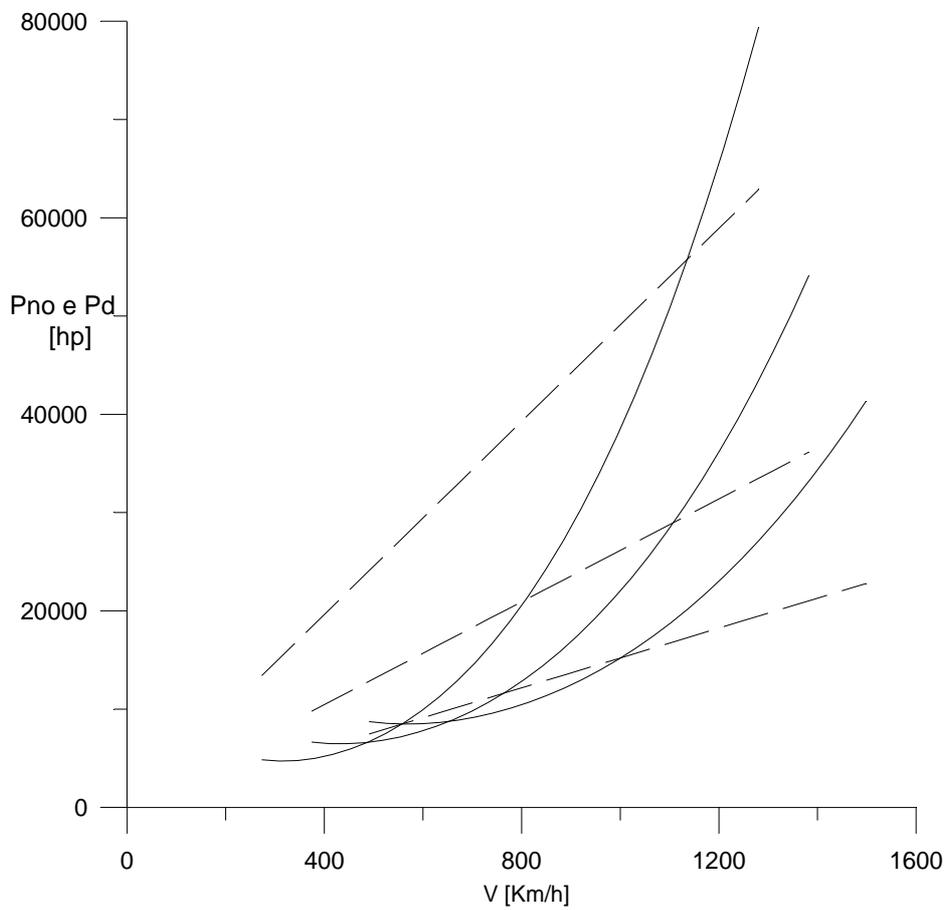


Fig. 8.7

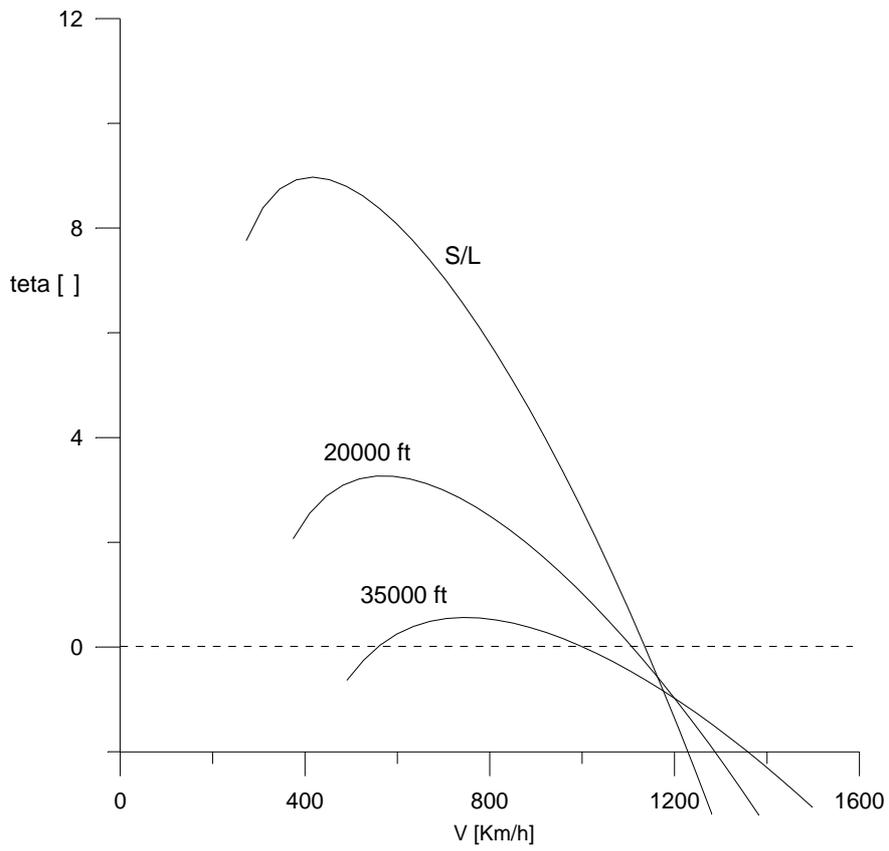


Fig. 8.8

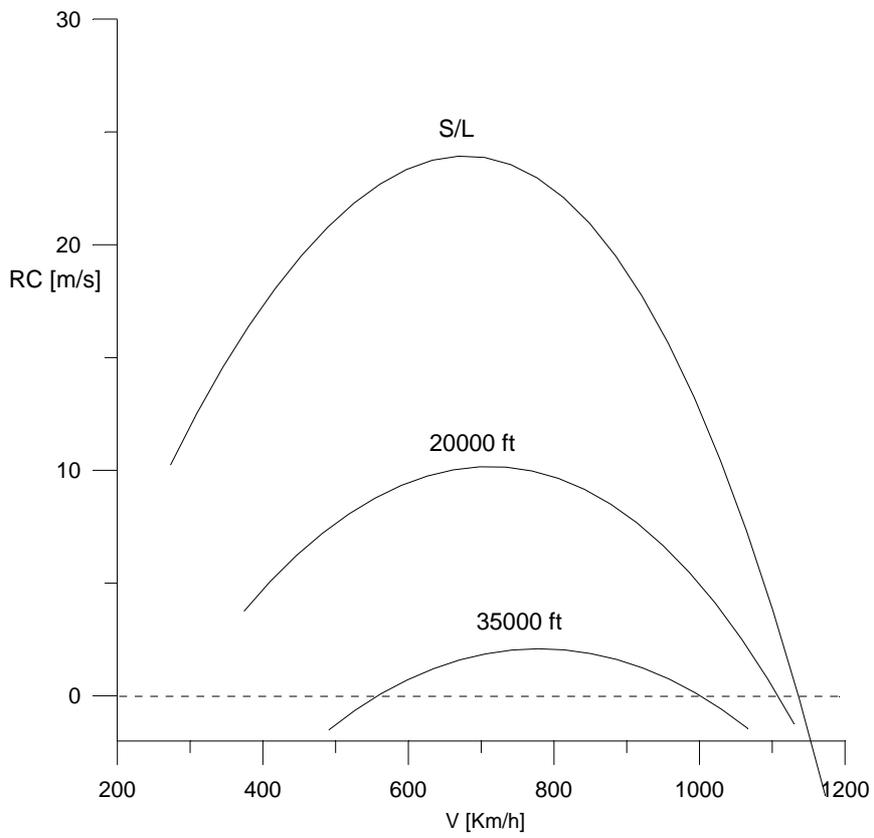


Fig. 8.9

### 8.2.2 – Velivolo ad elica

Consideriamo sempre il velivolo Beechcraft King Air C90.

$W=4380 \text{ Kg}$  peso massimo al decollo  
 $S= 27.3 \text{ m}^2$   $b=15.3 \text{ m}$   $AR=8.57$   
 $CD_0=0.026$   $e=0.78$   $CL_{MAX}=1.6$

2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero , cioè

$$\Pi_0 = 2 \cdot 550 = 1100 \text{ hp}$$

I motori sono turboelica.

Rendimento propulsivo delle eliche  $\eta_p=0.80$

Nella pagina successiva sono mostrate le curve della spinta e della potenza (8.10 e 8.11) e nella pagina successiva gli angoli e il rateo di salita (fig. 8.12 e 8.13)

Dai grafici si vede come per un velivolo propulso ad elica il massimo rateo di salita si ottiene a velocità molto basse (punto P). Il massimo angolo di salita si ottiene a velocità prossime a quelle di stallo.

Per il velivolo in esame sono state considerate le curve di potenza con la potenza disponibile variabile con la velocità (turboelica).

In effetti l'effetto ram si fa sentire soprattutto a velocità elevate, quindi, dato che le prestazioni di salita interessano, per i velivoli ad elica, le velocità basse, per i calcoli analitici si potrà anche fare l'approssimazione di considerare la potenza costante con  $V$ , cioè non considerare il  $K_v$ .

Le figure 8.14 e 8.15 avvalorano quanto detto. Infatti riportiamo la curva della potenza necessaria in volo livellato e le due curve di potenza disponibile (una costante, cioè con  $K_v=1$ , e l'altra con il  $K_v$  del turboelica) nella fig. 8.14 e le due corrispondenti curve del rateo di salita (sempre a livello del mare S/L) in fig. 8.15.

Si vede come il massimo rateo di salita a livello del mare (e quindi il massimo in assoluto del velivolo) non risulta molto diverso nei due casi, cioè alle velocità alle quali la potenza necessaria è molto bassa (punto P è minima) il  $K_v$  è molto basso (circa 1.02) e quindi può essere trascurato , cioè si può assumere  $K_v=1.0$

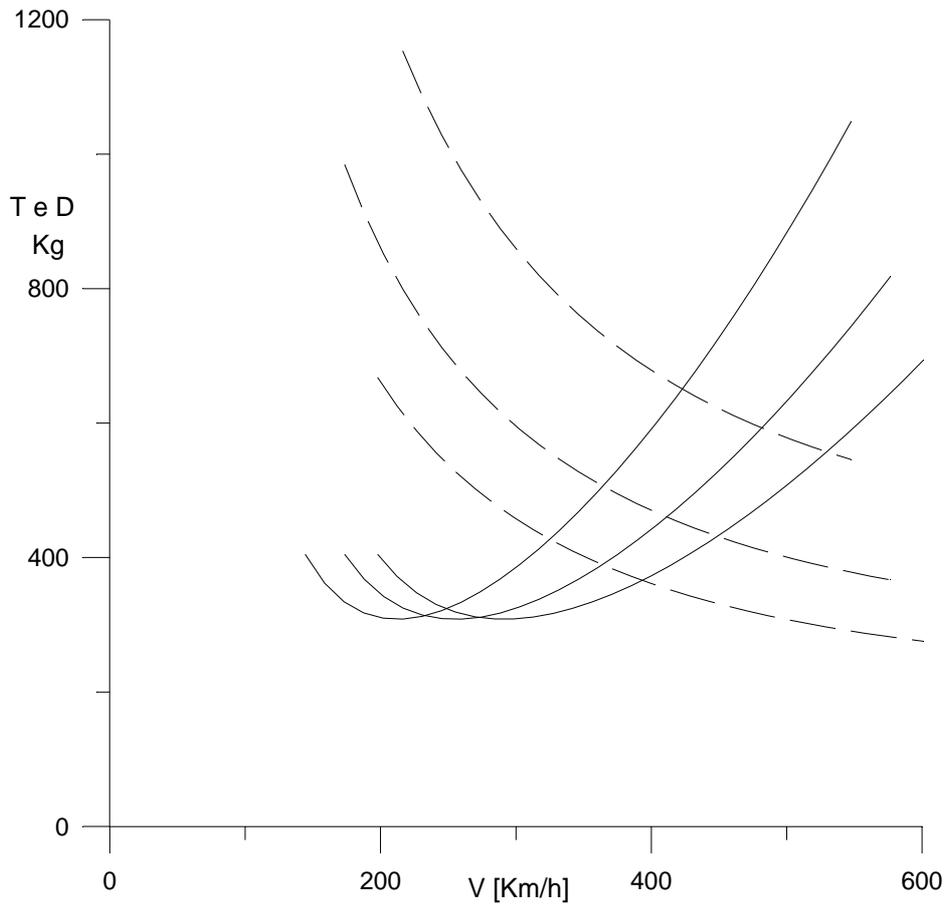


Fig. 8.10

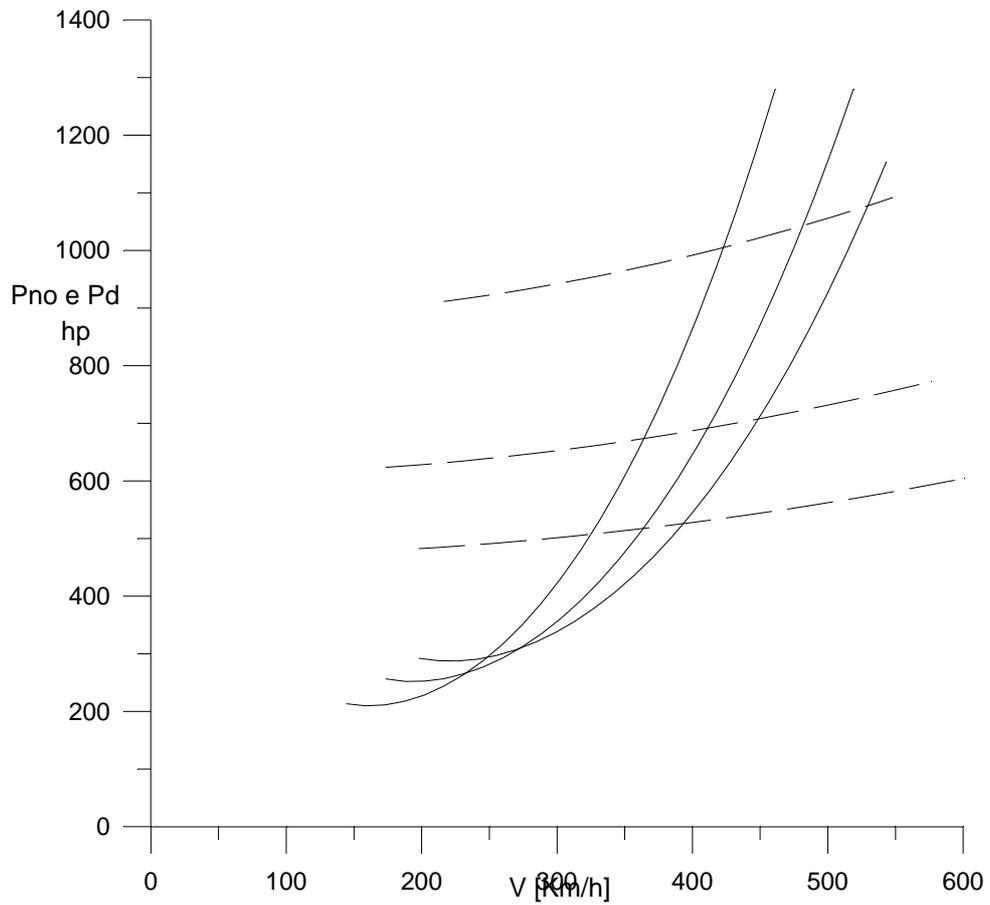


Fig. 8.11

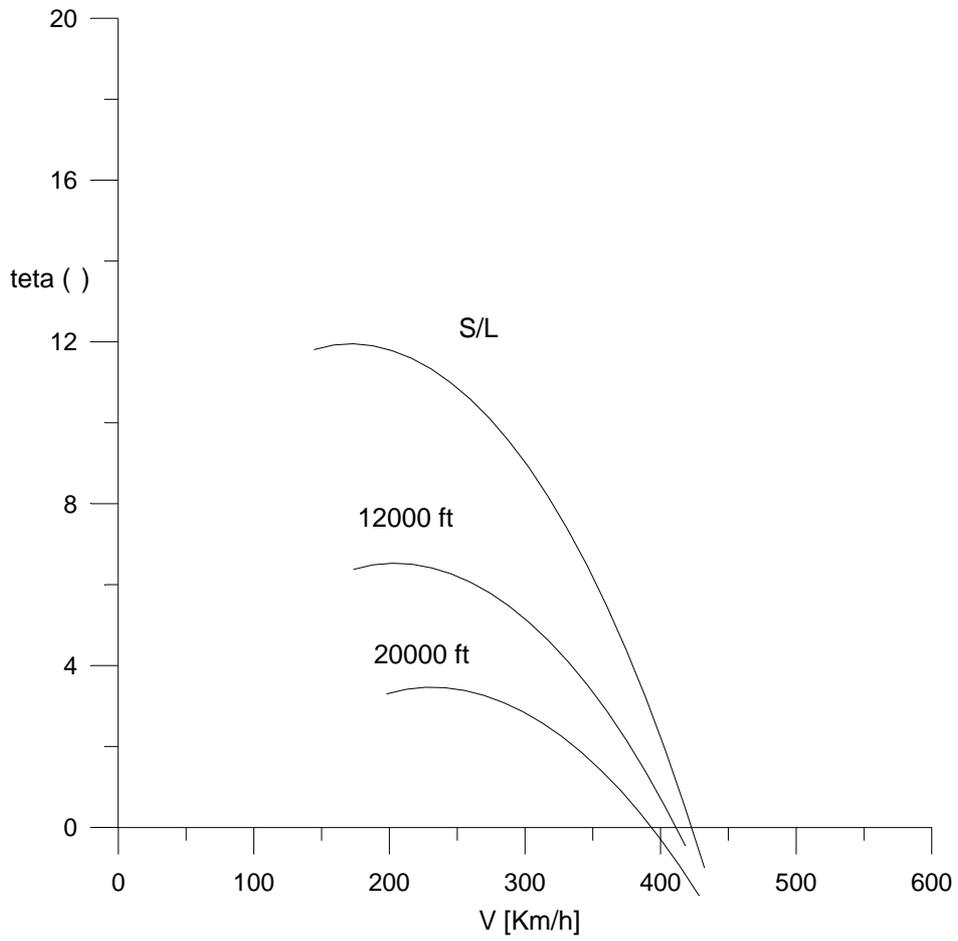
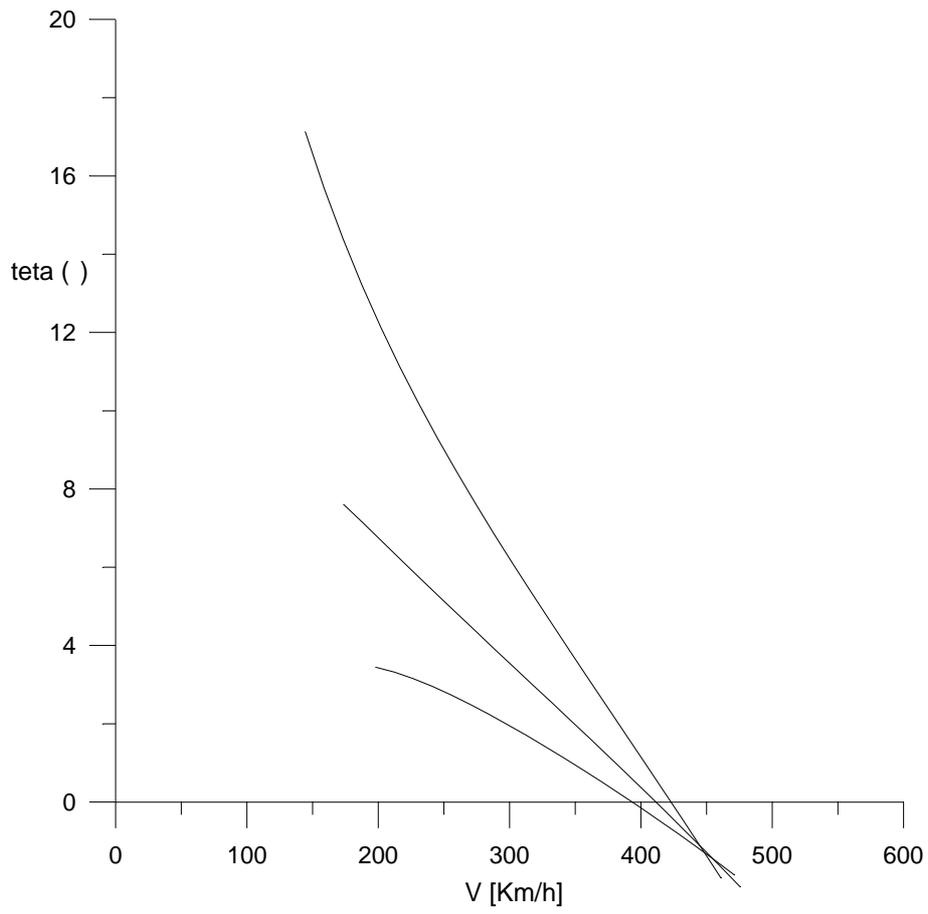


Fig. 8.12 e 8.13

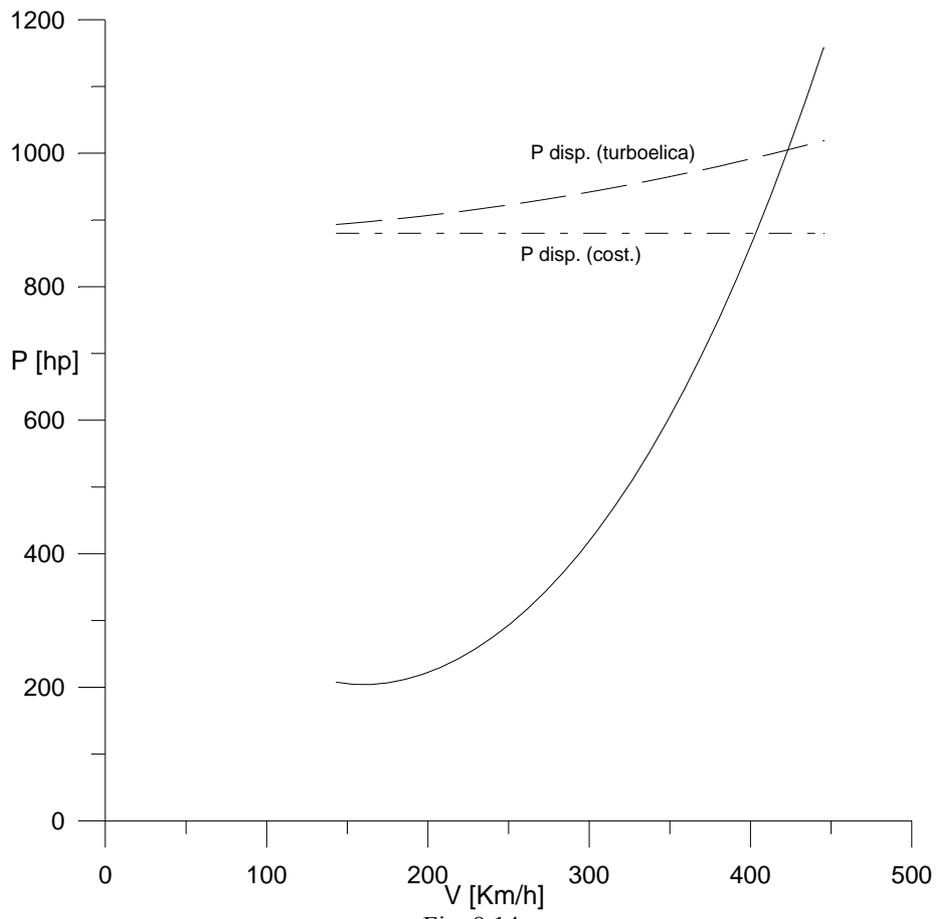


Fig. 8.14

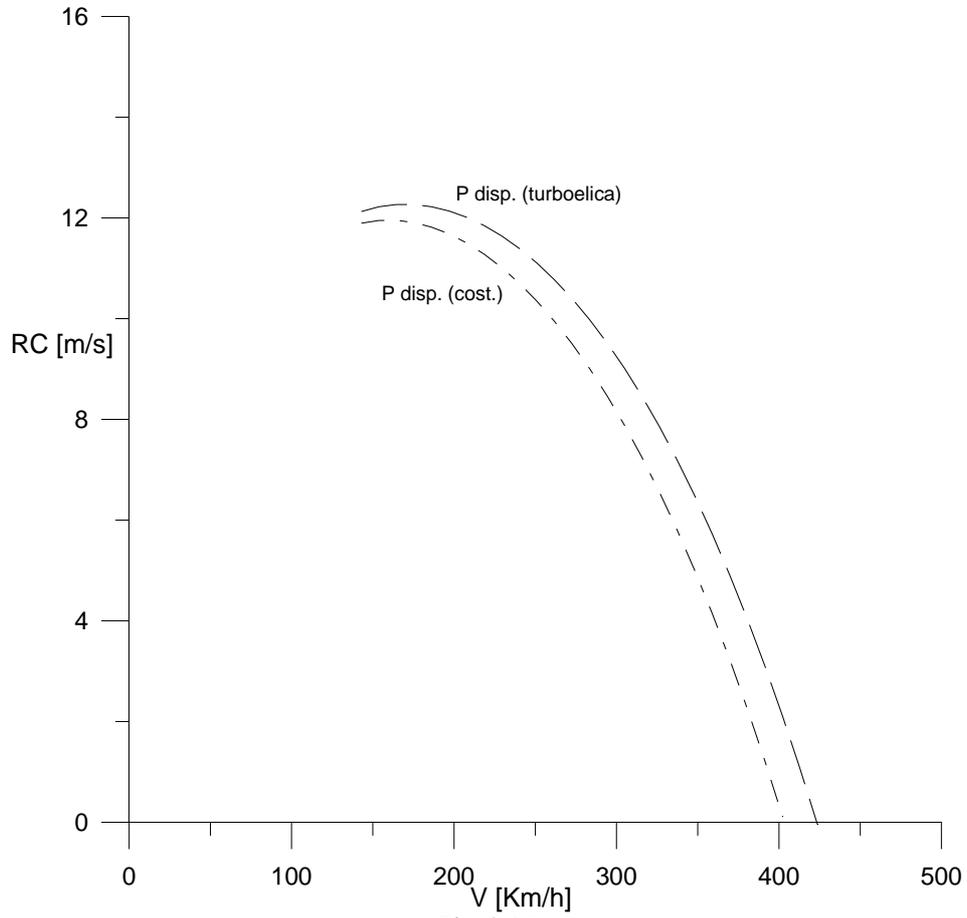
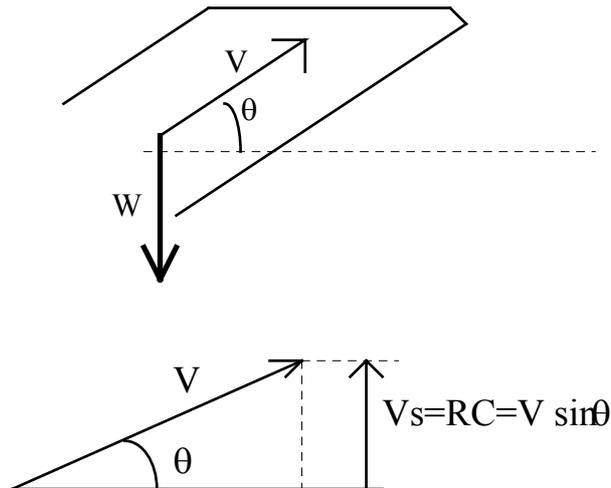


Fig. 8.15

### 8.3 VELOCITA' DI SALITA- TRATTAZIONE ANALITICA



#### Equilibrio

$$\text{Asse x} \quad T-D-W\sin\gamma=0$$

$$\text{Asse z} \quad L-W\cos\gamma=0$$

La velocità di salita (detta anche rateo di salita, in ingl. Rate of Climb (RC)):

$$V_z=RC=V\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{T-D}{W} \quad RC = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}$$

vediamo ora le differenze per velivoli propulsi ad elica e velivoli a getto.

#### 8.3.1 VELIVOLI A GETTO

Vale la relazione

$$RC=V \sin\theta = \frac{T}{W} - \frac{DV}{W}$$

O anche, essendo  $D=q S (C_{D0}+KCL^2) = q S (C_{D0}+K(W/q S)^2)$  :

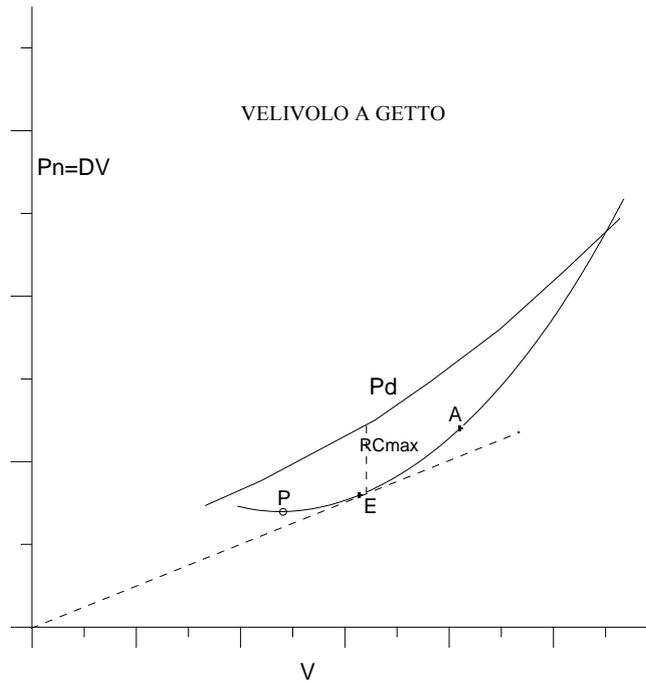
$$RC = V \left[ \frac{T}{W} - q \frac{S}{W} C_{D0} - \frac{W}{S} \frac{2K}{\rho V^2} \right] \quad [8.9]$$

Nel caso di velivoli a getto, dalle forme delle curve di spinta e potenza si vede come il massimo angolo di salita (massimo eccesso di spinta), essendo la spinta pressochè costante con V, si avrà ad ogni quota all'assetto di minima resistenza, cioè all'assetto del punto E (max efficienza).

Il massimo rateo di salita si avrà ad assetti minori (cioè a velocità maggiori) di quelli del punto E.

Comunque non sarà molto lontano dal punto E, come evidenziato anche in figura.

Si vede già graficamente che l'assetto che garantisce il massimo rateo di salita si ottiene ad assetti prossimi a quelli di massima efficienza.



**Approccio approssimato**

Un primo (approssimato) approccio analitico consiste nel calcolare il massimo rateo di salita ad una certa quota all’assetto di massima efficienza.

Quindi :

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W} = T_d \frac{V_E}{W} - \frac{\Pi_E}{W} \quad [8.10]$$

E’ chiaro quindi che, calcolato il punto E con  $D_E = D_{MIN}$  e la V di massima efficienza è banale il calcolo del massimo rateo di salita con la formula precedente.

Per i velivoli a getto è invece esatto e facile il calcolo del massimo angolo di salita, dato dalla formula :

$$\theta_{MAX} = \frac{T_d - D_{MIN}}{W} \quad [8.11]$$

con  $\theta$  espresso in radianti. Per avere i gradi moltiplicare per 57.3.

**Approccio esatto**

Vediamo ora di ricavare una espressione analitica più corretta per  $RC_{MAX}$

$$D(RC)/dV=0 \Rightarrow T - D - V - \frac{dD}{dV}=0$$

$$\frac{T}{W} - \frac{\rho_0 \varepsilon f}{2W} V^2 - \frac{2}{\pi \rho_0 \varepsilon} \left( \frac{W}{b_e^2} \right) \frac{1}{V^2} - \frac{\rho_0 \varepsilon f}{W} V^2 + \frac{4}{\pi \rho_0 \varepsilon} \left( \frac{W}{b_e^2} \right) \frac{1}{V^2} = 0$$

$$6 f q^2 - 2 T q - \frac{2}{\pi} \left( \frac{W}{b_e} \right)^2 = 0$$

da cui, risolvendo

$$q_{RCMAX} = \frac{T}{6f} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^2 \left( \frac{T}{W} \right)^2}} \right] = \frac{T}{6f} \Gamma \quad [8.12]$$

Avendo indicato con  $q_{RCMAX}$  la pressione dinamica in corrispondenza della velocità di massimo rateo di salita.

$$\Gamma = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^2 \left( \frac{T}{W} \right)^2}} \right]$$

Il fattore  $\Gamma$  è pari a circa 2, in quanto il denominatore è solitamente  $\gg 3$  e quindi la radice è circa 1.

In corrispondenza della quota di tangenza  $\frac{T}{W} = \frac{1}{E_{max}}$  e  $\Gamma=3$  ( e si ha la velocità di salita rapida limite (di fatto con  $RC=0$ ).

Una volta ricavata  $q_{RCMAX}$  si può calcolare la velocità  $V$  in corrispondenza del rateo di salita massimo,

cioè :

$$V_{RCMAX} = \sqrt{\frac{2 \cdot q_{RCMAX}}{\rho}} \quad [8.13]$$

Una volta determinata la  $V_{RCMAX}$  si può facilmente determinare il massimo rateo di salita :

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_{RCMAX} - D \cdot V_{RCMAX}}{W} \quad [8.14]$$

La relazione 8.14 può essere esplicitata per ricavare le dipendenze del rateo di salita dalle caratteristiche del velivolo.

In effetti, si può ottenere la relazione esatta :

$$RC_{MAX} = \left[ \frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CDo} \right]^{1/2} \cdot \left( \frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[ 1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right] \quad [8.15]$$

dove chiaramente  $T_d$  è la spinta massima.

Questa relazione mostra chiaramente che il massimo rateo di salita per un velivolo a getto dipende:

- dal carico alare (W/S) ( $RC_{MAX}$  cresce al crescere di W/S)
- dal rapporto spinta / peso
- dal CDo
- dall'efficienza massima

E' importante notare come aumentare il carico alare (ad esempio riducendo la superficie alare) per un velivolo a getto equivale ad aumentare sia la velocità massima (e la velocità di crociera) sia il massimo rateo di salita del velivolo.

Questo avviene perché riducendo S si riduce la superficie bagnata e così si riduce la resistenza parassita (di attrito) importante alle alte velocità.

Una altra relazione, questa volta approssimata che può essere usata per calcoli pratici è :

$$RC_{MAX} = 1.54 \left( \frac{T}{W} \right) \left( \frac{T}{f} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2 \frac{\left( \frac{W}{b_e^2} \right)}{\left( \frac{T}{f} \right)^{1/2} \sqrt{\sigma}} \quad [8.16]$$

con T in Kg, f e  $b_e$  in  $m^2$  e W in Kg . Il valore di  $RC_{MAX}$  sarà in m/s.

Ad esempio , considerando un velivolo a getto con

$T_d=25000$  Kg (massima totale a livello del mare)

W=100000 Kg

CDo=0.015 S=205  $m^2$  b=37 m  $b_e=33$  m (e=0.80)

Il calcolo della 8.16 fornisce :

$$RC_{MAX} = 34.72 - 2.24 = 32.5 \text{ m/s} = 6400 \text{ ft/min}$$

### 8.3.2 VELIVOLI AD ELICA

$\Pi_d = \eta_p \Pi_a = T V$  da ora in poi indicheremo per semplicità con

$$RC = \eta_p \left( \frac{\Pi_a}{W} \right) - \frac{1}{2} \frac{\rho V^3 C_{Do}}{(W/S)} - \frac{2}{\pi AR_e} \frac{1}{\rho V} (W/S)$$

E' chiaro che il massimo rateo di salita ad una certa quota si avrà alla velocità (e quindi all'assetto) di minima potenza necessaria al volo orizzontale, cioè :

$$\begin{aligned} \Pi_{no\ min} &= \frac{1}{2} \rho S (4 C_{Do}) V_P^3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W^{3/2} \frac{1}{S^{1/2}} \frac{4 C_{Do}}{3^{3/4} \pi^{3/4} AR_e^{3/4} C_{Do}^{3/4}} \\ &= \frac{4}{3^{3/4}} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}} = 0.95 \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}} \\ & \text{(nelle unità del S.I., } \rho_0 = 1.225 \text{ Kg/m}^3\text{)} \end{aligned}$$

da cui 
$$RC_{max} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}}$$

avendo espresso, per semplicità il peso in Kg e la potenza in hp.

ma 
$$\frac{C_{Do}^{1/4}}{\left(\frac{b_e^2}{S}\right)^{3/4} S^{1/2}} = \frac{(C_{Do} S)^{1/4}}{b_e^{3/2} S^{-3/4} S^{1/2} S^{1/4}} = \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}$$

da cui

$$\boxed{RC_{MAX} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}} \quad [8.17]$$

con potenza in [hp], W in [kg] e f e  $b_e$  in  $m^2$

La 8.17 risulta di facile applicazione.

Si può anche ricavare una espressione più semplice:

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - \frac{\Pi_{MIN}}{W}$$

ma 
$$\Pi_{MIN} = \Pi_P = V_P \cdot D_P = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_P} = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_{MAX}} \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.875 \frac{V_E}{E_{MAX}} \cdot \frac{W}{E_{MAX}}$$

quindi

$$\boxed{RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - 0.875 \frac{V_E}{E_{MAX}}} \quad [8.18]$$

che diventa

$$\boxed{RC_{MAX} = \eta_P \frac{\Pi_a}{W} - 0.875 \left[ \frac{2 W}{\rho S} \frac{1}{CL_E} \right]^{1/2} \frac{1}{E_{MAX}}} \quad [8.19]$$

Si vede dalla 8.19, che per un velivolo ad elica il parametro fondamentale per avere un alto massimo rateo di salita è la potenza all'albero rapportata al peso.

Un'altra importantissima informazione che si ricava dalla 8.19 è che per un velivolo ad elica il massimo rateo di salita si riduce all'aumentare del carico alare.

Quindi, mentre per un velivolo a getto il rateo massimo di salita cresce al crescere del carico alare, per un velivolo ad elica succede il contrario !

Quindi ridurre la superficie alare per un velivolo ad elica non comporta per il rateo di salita un vantaggio come per i velivoli a getto.

Per il calcolo del massimo rateo di salita si potranno usare sia la 8.17 che la 8.18 (e la 8.19 che ne è una altra forma).

### 8.4 VOLO PLANATO (SENZA MOTORE)

Ogni volta che un aeroplano sta volando così che (in maniera tale che) la potenza necessaria sia più grande di quella disponibile, esso scenderà piuttosto che salire. Nell'ultima situazione non c'è affatto potenza; in questo caso, l'aeroplano sarà in volo planato o senza motore. Ciò accadrà per un aeroplano convenzionale quando il motore si ferma durante il volo (guasto al motore o fine del carburante). Inoltre questo è il caso degli alianti e dei veleggiatori. (Raymer è autore di una "osservazione culturale" che distingue tra alianti e veleggiatori. Egli affermò che "un 'veleggiatore' è un aereo senza motore, costoso, ad alte prestazioni. Un 'aliente' è un aereo senza motore, rozzo, e a basse prestazioni!"). Il volo planato è un caso particolare (e opposto) delle nostre precedenti considerazioni che trattano la salita.

Il diagramma delle forze per un aereo senza motore nel volo in discesa è mostrato in Fig. 5.39. Per discesa regolare, non accelerata, dove  $\theta$  è l'angolo di planata di equilibrio,

$$L = W \cos \theta \quad [8.20]$$

$$D = W \sin \theta \quad [8.21]$$

L'angolo di planata di equilibrio è ottenuto dividendo l'Eq. [8.20] con l'Eq. [8.21].

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{D}{L}$$

o

$$\tan \theta = \frac{1}{L/D} \quad [8.22]$$

Decisamente l'angolo di planata è una stretta funzione del rapporto portanza-resistenza; più alto è il rapporto  $L/D$ , più basso è l'angolo di planata. Dall'Eq. [8.22] il più piccolo angolo di planata di equilibrio si verifica ad  $(L/D)_{\max}$ .

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}} \quad [8.23]$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

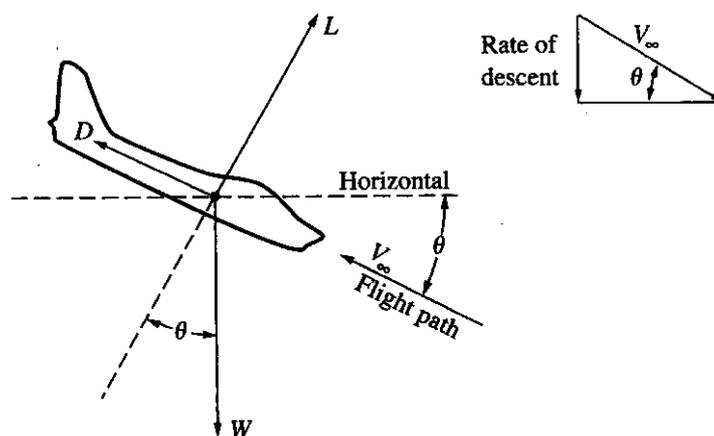


Diagramma delle forze e velocità per il volo librato

Per un aereo ad una data quota  $h$ , questo è il caso della massima distanza orizzontale ricoperta al suolo (massimo range). Questa distanza, indicata con  $R$ , è illustrata in Fig. 5.40 per un  $\theta$  costante. La semplicità riflessa nelle Eq. [8.22] e [8.23] è stupenda. L'angolo di planata di equilibrio  $\theta$  non dipende dalla quota o dal carico alare, o cose simili; esso dipende soltanto dal rapporto portanza – resistenza. Tuttavia, per ottenere un dato  $L/D$  ad una data quota, l'aereo deve volare ad una fissata velocità  $V_\infty$ , chiamata *velocità di planata di equilibrio*, e questo valore di  $V_\infty$  dipende dalla quota e dal carico alare come segue. Poiché

$$L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S C_L$$

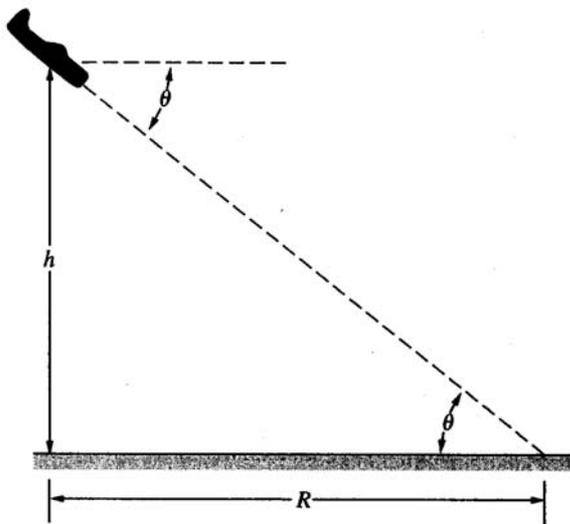
l'Eq. [8.20] diventa

$$\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S C_L = W \cos \theta$$

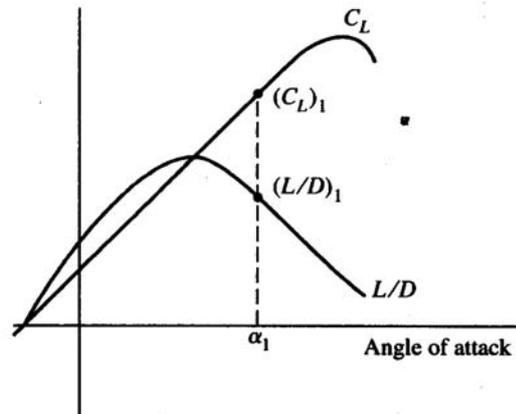
o

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_\infty C_L S}} \quad [8.24]$$

Nell'Eq. [8.24],  $V_\infty$  è la velocità di planata di equilibrio. Chiaramente essa dipende dalla quota (attraverso  $\rho_\infty$ ) e dal carico alare. Il valore di  $C_L$  nell'Eq. [8.24] è quel valore particolare che corrisponde al valore specifico di  $L/D$  usato nell'Eq. [8.22]. Ricordiamo che sia  $C_L$  che  $L/D$  sono caratteristiche aerodinamiche dell'aereo che variano con l'angolo d'attacco, come mostrato in Fig. 5.41. Si noti dalla Fig. 5.41 che un determinato valore di  $L/D$ , indicato con  $(L/D)_1$ , corrisponde ad un determinato angolo d'attacco  $\alpha_1$ , che successivamente impone il coefficiente di portanza  $(C_L)_1$ . Se  $L/D$  è mantenuto costante per tutta la traiettoria di planata, allora  $C_L$  è costante lungo la traiettoria. Comunque la velocità di equilibrio cambierà con la quota lungo questa traiettoria, diminuendo al diminuire della quota.



Distanza percorsa in volo librato



Schema della variazione del  $C_L$  e dell'efficienza al variare dell'angolo d'attacco

Consideriamo di nuovo il caso di minimo angolo di planata come trattato con l'Eq. [8.23]. Per un tipico aeroplano moderno,  $(L/D)_{\max} = 15$ , e per questo caso, dall'Eq. [8.23],  $\theta_{\min} = 3.8^\circ$  - un angolo piccolo. Quindi possiamo ragionevolmente ipotizzare  $\cos\theta = 1$  per casi di questo genere. Ricordiamo che

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4C_{D,0}K}} \quad [8.25]$$

e per  $L = W$  (compatibile con l'ipotesi di  $\cos\theta = 1$ ), la velocità alla quale  $L/D$  è massimo è data da

$$V_{(L/D)\max} = \left(\frac{2}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{K}{C_{D,0}}} \frac{W}{S}\right)^{\frac{1}{2}} \quad [8.26]$$

Quindi, per  $\theta_{\min}$ , la velocità di equilibrio lungo la traiettoria di planata è data dall'Eq. [5.34].

La velocità di discesa, talvolta chiamata la *velocità di affondata*, è la velocità verticale verso il basso dell'aeroplano  $V_V$ . Essa è, per il volo senza motore, l'analoga della velocità di salita per il volo con motore.

$$\text{Rateo di discesa RD} = V_V = V_\infty \sin\theta \quad [8.27]$$

La velocità di discesa è un numero positivo nella direzione (se diretta) verso il basso. Moltiplicando l'Eq. [8.21] per  $V_\infty$  ed inserendo l'Eq. [8.27], abbiamo

$$DV_\infty = WV_\infty \sin\theta = WV_V$$

$$V_V = \frac{DV_\infty}{W} \quad [8.28]$$

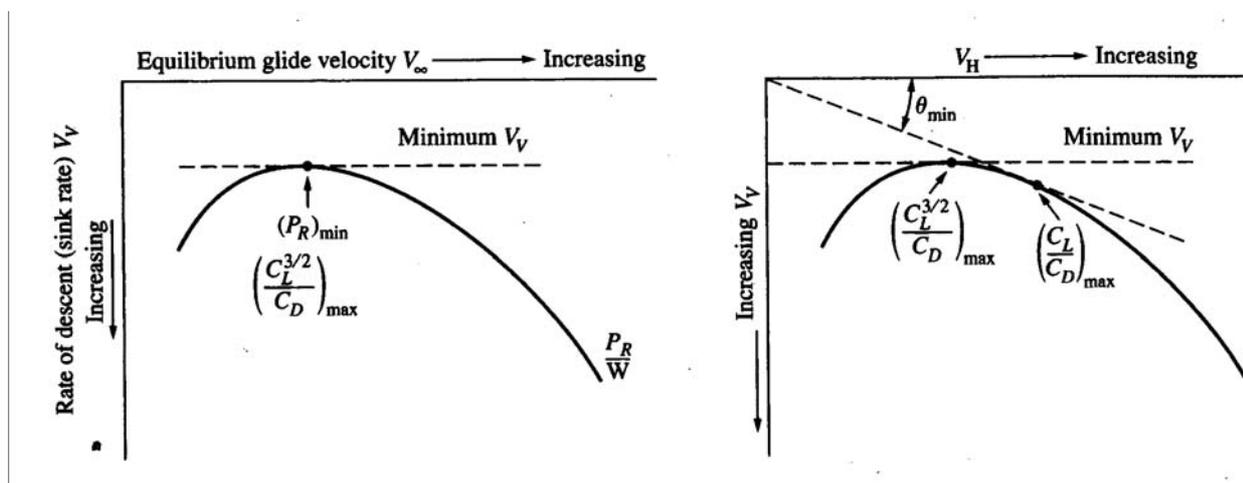
Facendo l'ipotesi che  $\cos\theta = 1$ , nell'Eq. [8.28],  $DV_\infty$  è semplicemente la potenza necessaria per volo livellato regolare. Quindi, la variazione di  $V_V$  con la velocità è la stessa della curva della potenza necessaria divisa per il peso. Questa variazione è mostrata in Fig. 5.42 con valori positivi di  $V_V$  crescenti lungo l'asse verticale diretto verso il basso (proprio per sottolineare che la velocità di affondata  $V_V$  è diretta verso il basso). Chiaramente, la velocità minima di affondata si verifica alla velocità di volo in corrispondenza della minima potenza necessaria. Quindi le condizioni per la minima velocità di affondata sono la stesse di quelle per  $(P_{no})$ , che sono

1.  $\frac{C_L^{3/2}}{C_D}$  è massimo
2.  $(V_\infty)_{\text{min velocità di affondata}} = \left( \frac{2}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{K}{3C_{D,0}}} \frac{W}{S} \right)^{1/2}$

Il diagramma odografo è abbozzato in Fig. 5.43 dove una linea dall'origine tangente alla curva odografo definisce  $\theta_{\min}$ . Questo schizzo è mostrato proprio per sottolineare che la minima velocità di affondata non corrisponde al minimo angolo di planata. La velocità di volo per la velocità minima di affondata (corrispondente al massimo  $C_L^{3/2}/C_D$ ) è minore di quella per il minimo angolo di rampa (corrispondente al massimo  $C_L/C_D$ ).

Un'espressione analitica per la velocità di affondata  $V_V$  può essere ottenuta come segue. Dall'Eq. [8.20]

$$W \cos\theta = L = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S C_L$$



Rateo di discesa in funzione della velocità di volo livrato

Odografo del volo livrato

quindi

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2W \cos \theta}{\rho_{\infty} S C_L}} \quad [8.29]$$

Sostituendo l'Eq. [8.29] nella [8.27], abbiamo

$$V_V = V_{\infty} \sin \theta = (\sin \theta) \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}} \quad [8.30]$$

Dividendo l'Eq. [8.21] con l'Eq. [8.20], otteniamo

$$\sin \theta = \frac{D}{L} \cos \theta = \frac{C_D}{C_L} \cos \theta \quad [8.31]$$

Inserendo l'Eq. [8.29] nell' Eq. [8.30], abbiamo

$$V_V = \sqrt{\frac{2 \cos^3 \theta W}{\rho_{\infty} (C_L^3 / C_D^2) S}} \quad [8.32]$$

Facendo l'ipotesi che  $\cos \theta = 1$ , l'Eq. [8.32] è scritta come

$$V_V = \sqrt{\frac{2 W}{\rho_{\infty} (C_L^3 / C_D^2) S}} \quad [8.33]$$

L'Equazione [8.33] mostra esplicitamente che  $(V_V)_{\min}$  si verifica a  $(C_L^{3/2} / C_D)_{\max}$ . Essa mostra inoltre che la velocità di affondata diminuisce al diminuire della quota e aumenta come la radice quadrata del carico alare.

## 8.5 QUOTA DI TANGENZA TEORICA E PRATICA

Si è visto dalla trattazione grafica e da quella analitica che il massimo rateo di salita si riduce all'aumentare della quota, sia per i velivoli a getto che per quelli ad elica.

Nell'interesse della trattazione consideriamo un aeroplano propulso a elica: i risultati di questo paragrafo saranno qualitativamente gli stessi per un aeroplano a getto. Al crescere della quota la massima potenza in eccesso diminuisce, come già mostrato. Successivamente, il massimo  $R/C$  diminuisce. Ciò è illustrato in Fig. 8.16, che è un grafico del massimo  $R/C$  in funzione della quota, ma con  $R/C$  come ascissa.

Ci sono alcune quote abbastanza alte alle quali la curva  $P_d$  diventa tangente alla curva  $P_{no}$  (punto 1 in Fig. 8.17). La velocità in questo punto è l'unico valore al quale è possibile il volo regolare (uniforme) livellato; inoltre, in questo punto, la potenza in eccesso è nulla, quindi è nulla la massima velocità ascensionale. La quota alla quale il massimo  $R/C = 0$  è definita come la *quota di tangenza teorica* dell'aeroplano. Una quantità più utile è la *quota di tangenza pratica*, definita come la quota dove il massimo  $R/C = 0.5$  m/s. La quota di tangenza pratica rappresenta il limite pratico superiore per il volo regolare livellato.

Le quote di tangenza teorica e pratica possono essere determinate come segue:

1. si calcolano i valori del massimo  $R/C$  per un certo numero di quote diverse.
2. si rappresenta la massima velocità ascensionale in funzione della quota, come mostrato in Fig. 8.16.
3. Si estrapolano le curve a 0.5 m/s e 0 m/s per trovare le quote di tangenza pratica e teorica rispettivamente, come mostrato in Fig. 8.16.

### Esempio

Consideriamo due velivoli di esempio :

#### Esercizio a

Un aeroplano privato leggero, monomotore, propulso ad elica copiato approssimativamente dal Cessa Skylane mostrato in Fig. 6.10. Per comodità indicheremo come CP-1 il nostro ipotetico aeroplano avente le seguenti caratteristiche:

Apertura alare = 10.91 m

Superficie alare = 16.16 m<sup>2</sup>

Peso = 1338 kg

Capacità di carburante = 246 l

Impianto di potenza = un motore a pistoni di 230 hp al livello del mare

Consumo specifico = 0.45 lb/(hp)(h)

Coefficiente di resistenza parassita  $C_{D,0} = 0.025$

Fattore di Oswald  $e = 0.8$

Rendimento dell'elica = 0.8

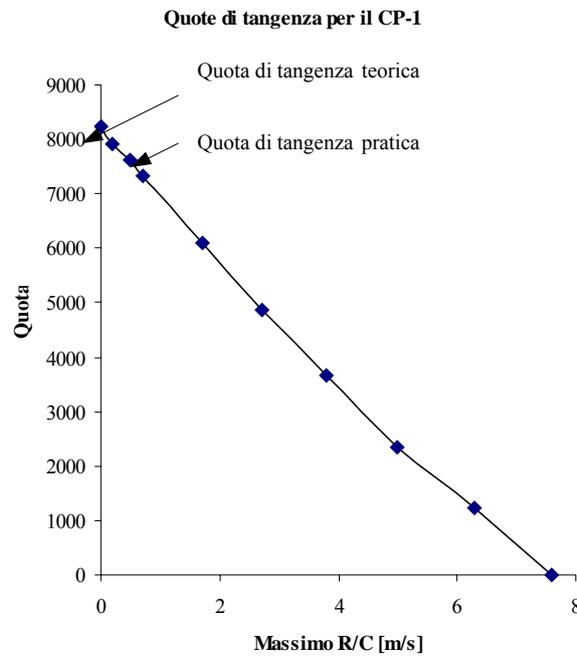
Si calcoli la quota di tangenza teorica e pratica per il CP-1

**Soluzione**

a. Per il CP-1 abbiamo i risultati riportati nella tavola seguente

Quota, m	Massimo R/C, m/s
0	7.6
1219.2	6.3
2348.4	5.0
3657.6	3.8
4876.8	2.7
6096	1.7
7315.2	0.7
7924.8	0.2

Questi risultati sono rappresentati in Fig. 8.16. Da questi numeri, troviamo  
 Quota di tangenza teorica ( $R/C = 0$ ) = 8230 m  
 Quota di tangenza pratica ( $R/C = 0.5$  m/s) = 7620 m



**Figura 8.16** Determinazione delle quote di tangenza teorica e pratica per il CP-1

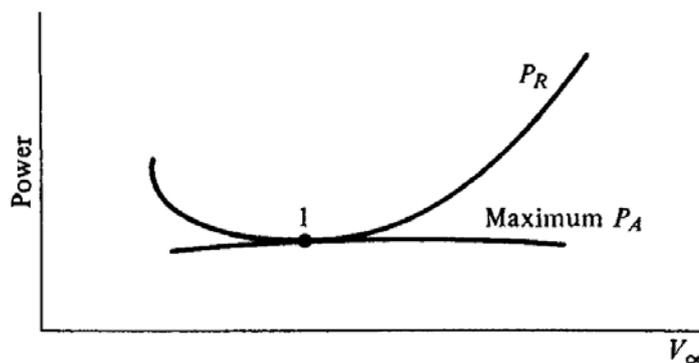
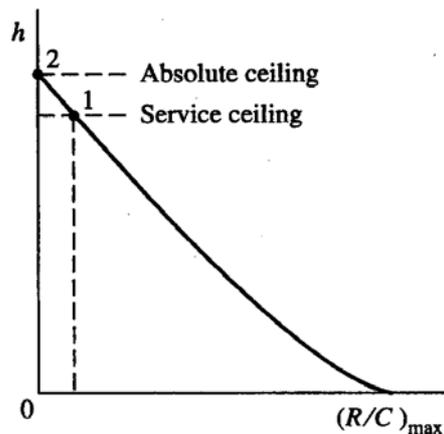
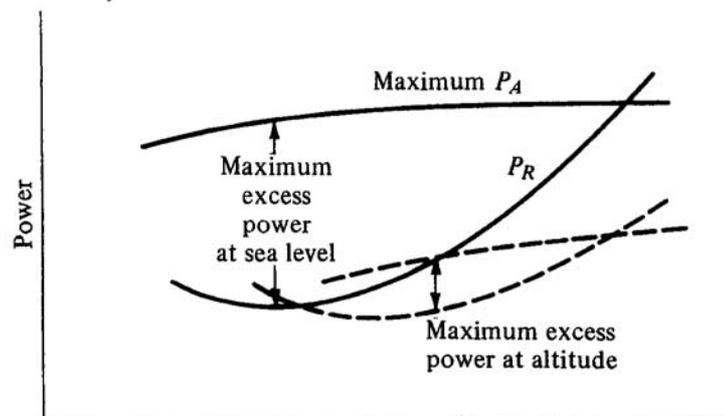


Diagramma della potenza necessaria e disponibile alla quota di tangenza teorica (absolute ceiling)



Schema della quota di tangenza teorica (absolute ceiling) e della quota di tangenza pratica (service ceiling)

In effetti al variare della quota la potenza necessaria al volo orizzontale e la potenza disponibile cambiano come in figura sotto, quindi da ciò deriva il diagramma di sopra che riporta il valore del massimo rateo di salita in funzione della quota



### Esercizio b

Un aereo executive a getto, approssimativamente copiato dal Cessa Citation 3, mostrato in Fig. 6.11. Per comodità indicheremo come CJ-1 il nostro ipotetico aereo a getto avente le seguenti caratteristiche:

Apertura alare = 16.24 m

Superficie alare = 29.54 m<sup>2</sup>

Peso = 8988 kg

Capacità di carburante = 4230 l

Impianto di potenza = due motori turbofan di 1655 kg di spinta ciascuno a livello del mare

Consumo specifico = 0.6 lb di carburante/(lb di spinta)(h)

Coefficiente di resistenza parassita  $C_{D,0} = 0.02$

Fattore di Oswald  $e = 0.81$

Per il CJ-1 facendo calcoli simili al caso precedente, a varie quote, otteniamo:

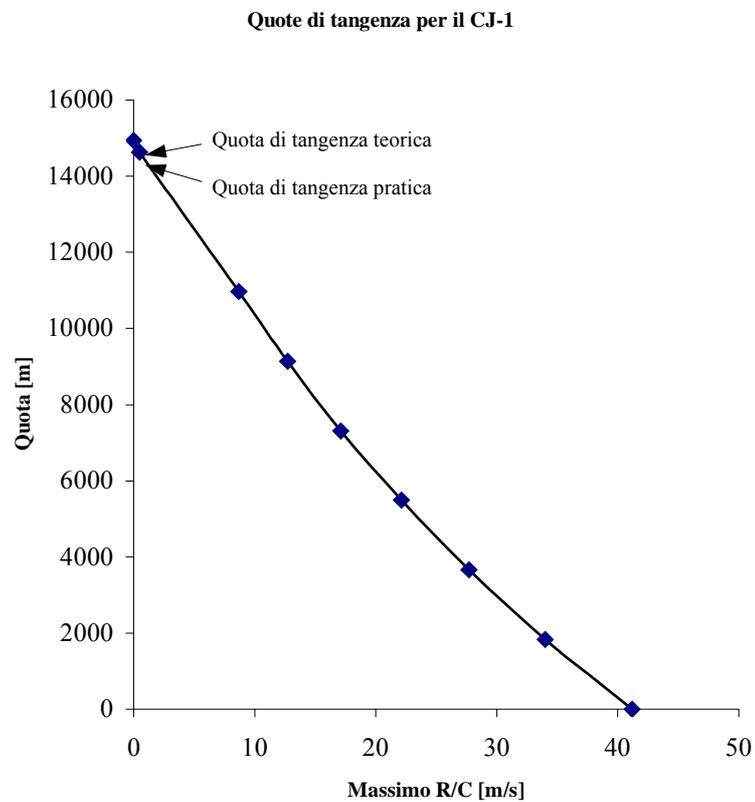
Quota, m	Massimo $R/C$ , m/s
0	41.2
1828.8	34.0
3657.6	27.7
5486.4	22.1
7315.2	17.1
9144	12.7
10972.8	8.7

Questi risultati sono rappresentati in Fig. 8.18.

Da essi ricaviamo

Quota di tangenza teorica ( $R/C = 0$ ) = 14935.2 m

Quota di tangenza pratica ( $R/C = 0.5$  m/s) = 14630.4 m



**Figura 8.18** Determinazione delle quote di tangenza teorica e pratica per il CJ-1

## 8.6 TEMPO DI SALITA

Per eseguire adeguatamente il suo ruolo difensivo, un caccia deve essere in grado di salire dal livello del mare alla quota dell'aereo nemico avanzante nel minor tempo possibile. In un altro caso, un aereo commerciale deve essere in grado di salire rapidamente ad alte quote per minimizzare il disagio e i rischi di un tempo inclemente (rigido) e per minimizzare i problemi di traffico aereo. Come conseguenza il tempo necessario ad un aeroplano a salire ad una quota stabilita può diventare un'importante considerazione di progetto. Il calcolo del tempo di salita deriva direttamente dalla nostra precedente trattazione, come descritto sotto.

Il rateo di salita è stato definito come la velocità verticale dell'aeroplano. La velocità è semplicemente la variazione della distanza nel tempo, dove per distanza qui si intende la quota  $h$ .

Quindi  $R/C = dh/dt$ . Perciò

$$dt = \frac{dh}{R/C} \quad [8.34]$$

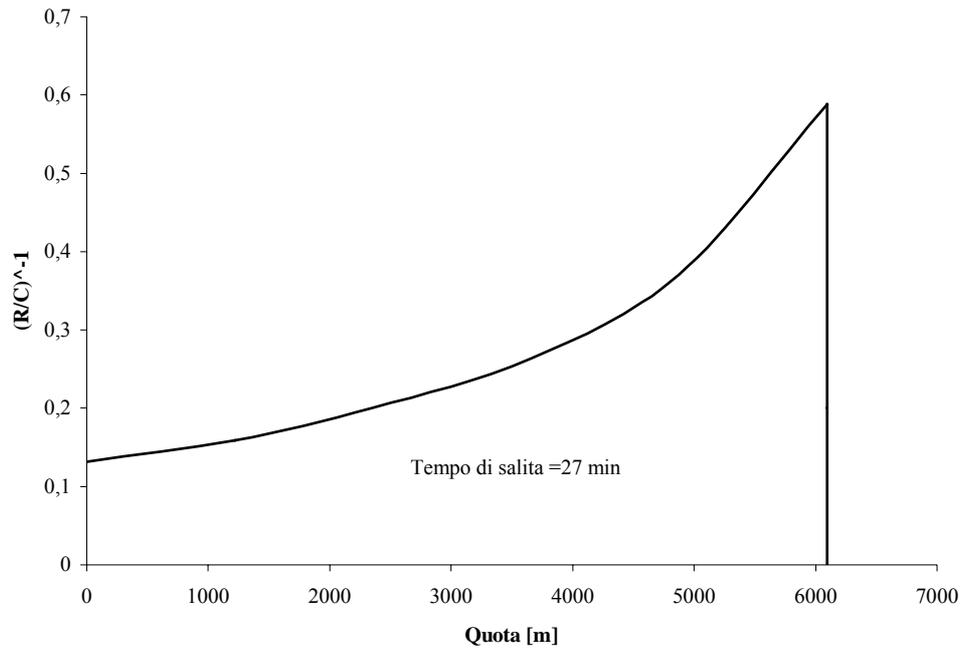
Nell'Eq. [8.34],  $dt$  è l'intervallo infinitesimo di tempo necessario per salire di un infinitesimo  $dh$  di quota. Per tale ragione, dal calcolo (differenziale), il tempo per salire da una quota  $h_1$  ad un'altra  $h_2$  è ottenuto integrando l'Eq. [8.34]:

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{R/C}$$

Normalmente il tempo di salita è considerato dal livello del mare, dove  $h_1 = 0$ . Quindi, il tempo di salita ad una quota stabilita  $h_2$  è

$$t = \int_0^{h_2} \frac{dh}{R/C} \quad [8.35]$$

Per calcolare  $t$  graficamente prima si rappresenta  $(R/C)^{-1}$  in funzione di  $h$ , come mostrato in Fig. 8.19. L'area sottesa alla curva da  $h = 0$  a  $h = h_2$  è il tempo di salita alla quota  $h_2$ .



**Figura 8.19** Determinazione del tempo di salita per il CJ-1

Se assumiamo che l'andamento del massimo rateo di salita sia lineare con la quota  $h$  :

cioè :

$$RC_{MAX} = a + b \cdot h$$

$$t_{min} = \int_0^h \frac{dh}{RC_{MAX}} = \int_0^h \frac{dh}{a + b \cdot h}$$

da cui integrando il tempo per arrivare ad una certa quota  $h$  è :

$$t_{MIN} = \frac{1}{b} [\ln(a + b \cdot h) - \ln(a)] \quad [8.36]$$