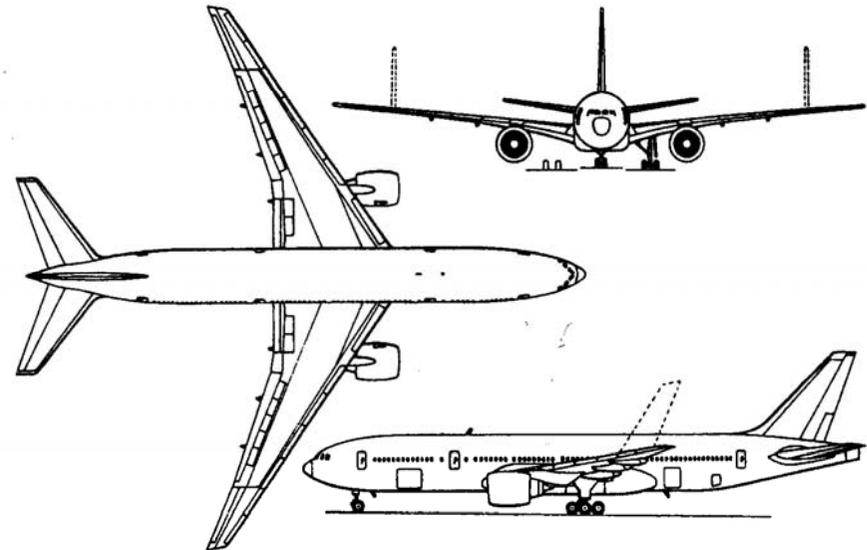


Cap.8 – Prestazioni di salita

Si immagina un Boeing 777 (vedi Fig. 8.1) che si sta portando alla velocità di decollo sulla pista di un aeroporto. Esso si solleva dolcemente a circa 180 mi/h (289.7 km/h), il muso ruota verso l'alto, e l'aeroplano rapidamente sale fuori dalla vista. In una questione di minuti esso sta volando a velocità di crociera a 30000 ft (9144 m).

Quanto rapidamente può salire un aeroplano? Quanto tempo impiega a raggiungere una certa quota?

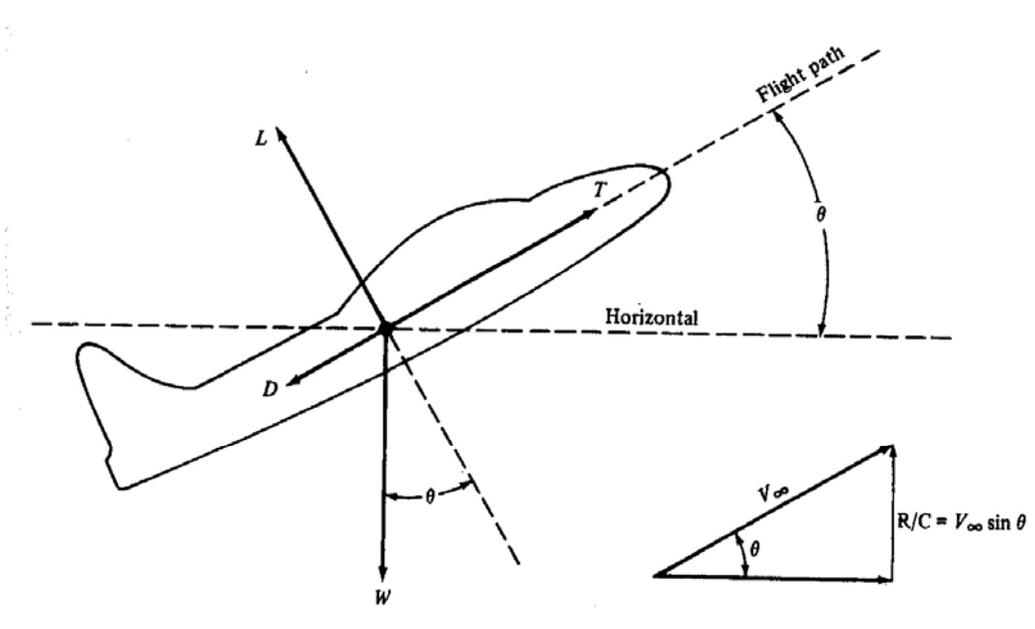


Cap.8 – Prestazioni di salita

$$L = W \cos \theta$$

$$T = D + W \sin \theta$$

$$TV_{\infty} = DV_{\infty} + WV_{\infty} \sin \theta$$

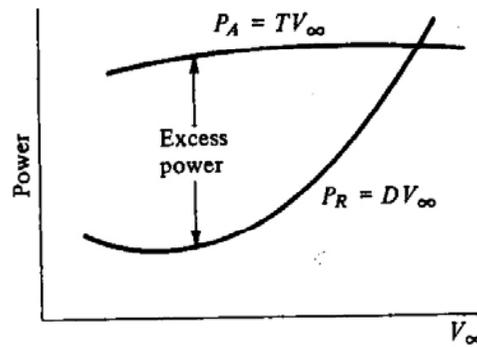


$$\frac{TV_{\infty} - DV_{\infty}}{W} = V \cdot \sin \theta$$

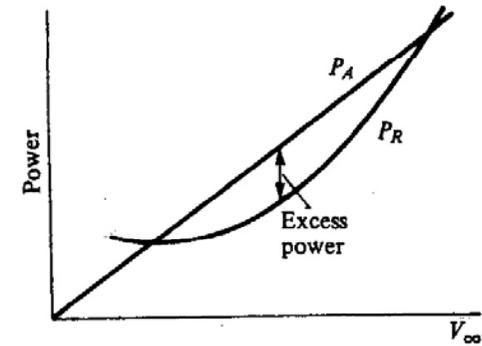
ma $RC \equiv V_{\infty} \sin \theta$

$$\Rightarrow R/C = \frac{TV_{\infty} - DV_{\infty}}{W}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita



(a)



(b)

$$TV_{\infty} - DV_{\infty} = \text{potenza in eccesso}$$

$$R/C = \frac{\text{potenza in eccesso}}{W}$$

- Le potenze sono assunte pari a quelle in volo livellato
- L'angolo di salita è piccolo, cioè $\cos\theta$ circa = 1, cioè $L=W$

$$\sin\theta = \frac{T_d - D}{W} \quad \theta \approx \frac{T_d - D}{W} = \frac{\text{Eccesso di spinta}}{\text{peso}}$$

L'equazione è approssimata

Cap.8 – Prestazioni di salita

semplicemente perché D è più piccola per il volo in salita che per quello livellato alla stessa V_∞ . Per vedere ciò più chiaramente, consideriamo un aeroplano con $W = 5000$ lb (2268 kg), $S = 100$ ft² (9.29 m²), $C_{D0} = 0.015$, $e = 0.6$ e $AR = 6$. Se la velocità è $V_\infty = 500$ ft/s (548.64 km/h) al livello del mare, e se l'aeroplano è in volo *livellato*, allora $CL = L / (q_\infty S) = W / \left(\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \right) = 0.168$.

Successivamente

$$CD = CD_0 + \frac{CL^2}{\pi e AR} = 0.015 + 0.0025 = 0.0175$$

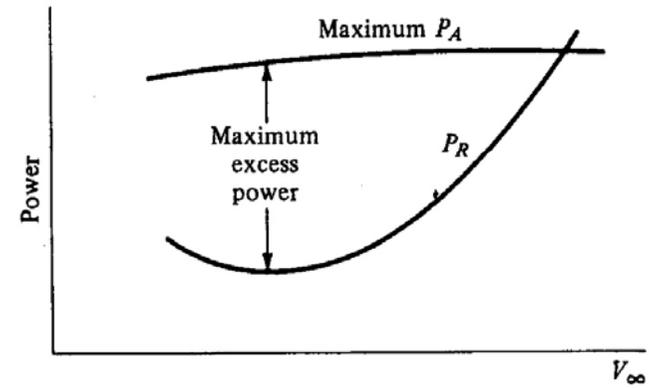
Ora consideriamo lo stesso aeroplano in una salita a 30° al livello del mare, con la stessa velocità $V_\infty = 500$ ft/s (548.64 km/h). Qui la portanza è minore del peso, $L = W \cos \theta$, e perciò

$$CL = W \cos 30^\circ / \left(\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \right) = 0.145.$$

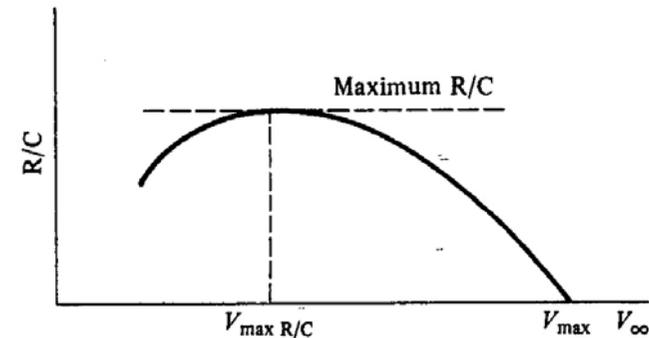
Successivamente, $CD = CD_0 + CL^2 / \pi e AR = 0.015 + 0.0019 = 0.0169$. Questo può essere paragonato con il valore più alto 0.0175 ottenuto sopra per il volo livellato. Come visto in quest'esempio, per un volo regolare in salita, L (quindi CL) è più piccola e perciò è più piccola la resistenza indotta. Conseguentemente, la resistenza totale per il volo in salita è più piccola di quella per il volo livellato alla stessa velocità.

Cap.8 – Prestazioni di salita

$$RC_{MAX} = \frac{\text{massima potenza in eccesso}}{W}$$

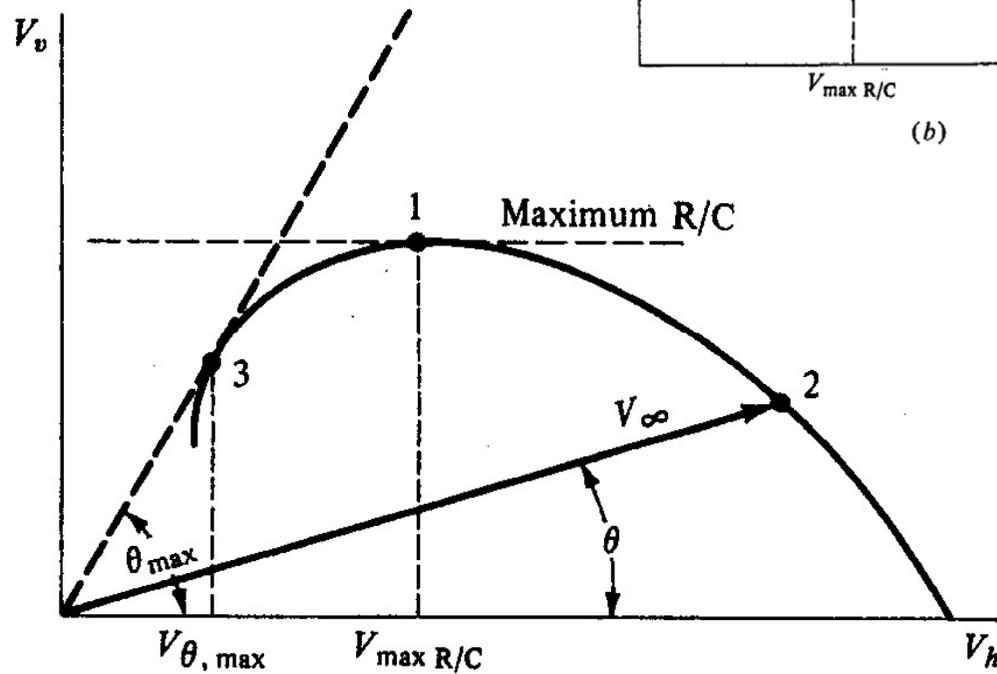
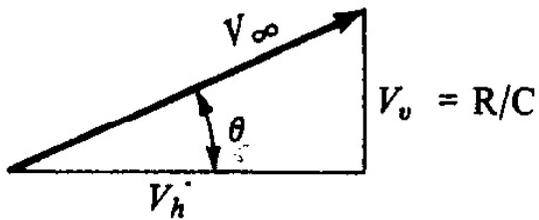


(a)



(b)

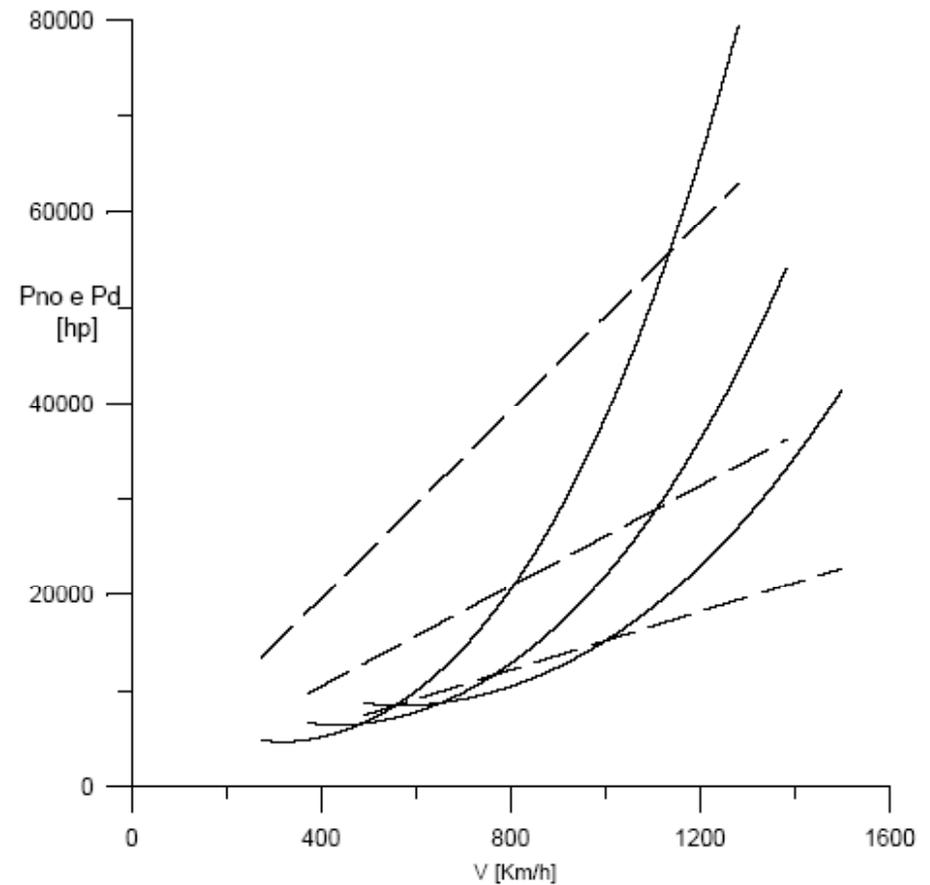
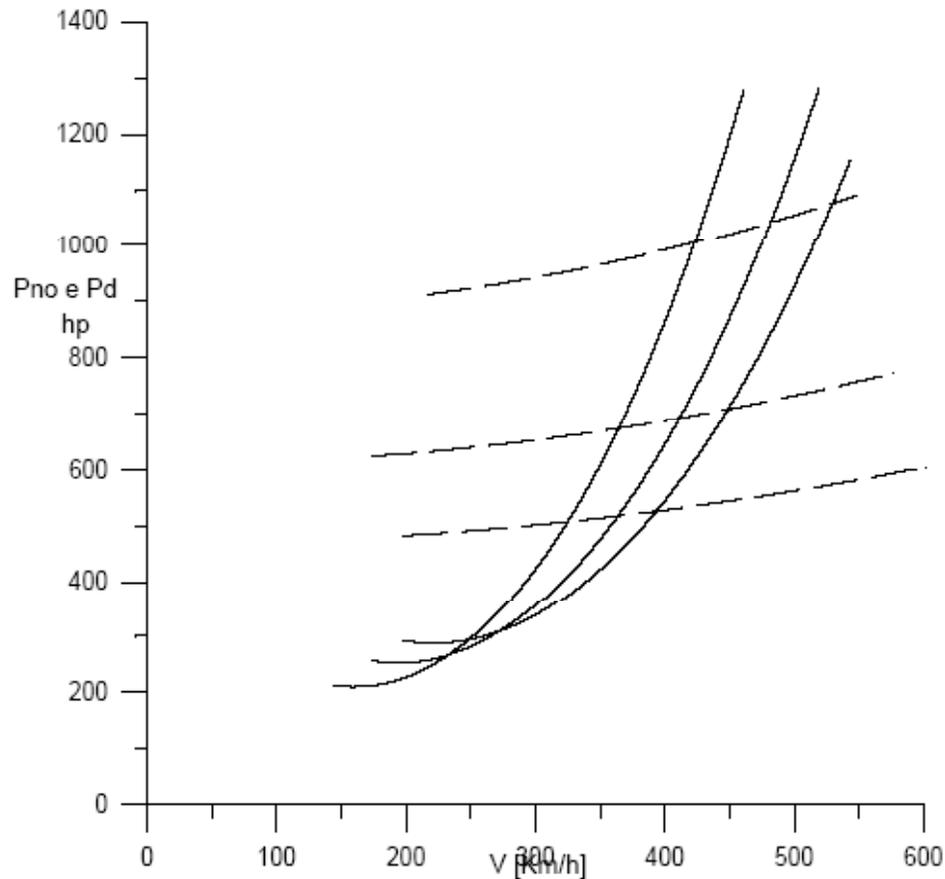
Odografo volo in salita



Cap.8 – Prestazioni di salita

Le prestazioni precedenti sono da considerarsi ad una certa quota.
Che succede al variare della quota ?

Differenze sul rateo di salita tra velivolo ad elica e a getto.



Cap.8 – Prestazioni di salita

Facciamo prima l'esempio relativo al velivolo a getto MD-80, di cui riportiamo i dati :

$W=W_{TO} = 63500 \text{ Kg}$ peso massimo al decollo

$S=118 \text{ m}^2$ $b=33 \text{ m}$ $AR=9.23$

$C_{Do}=0.018$ $e=0.80$ $CL_{MAX}=1.5$

Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 8400 Kg di spinta ciascuno, cioè

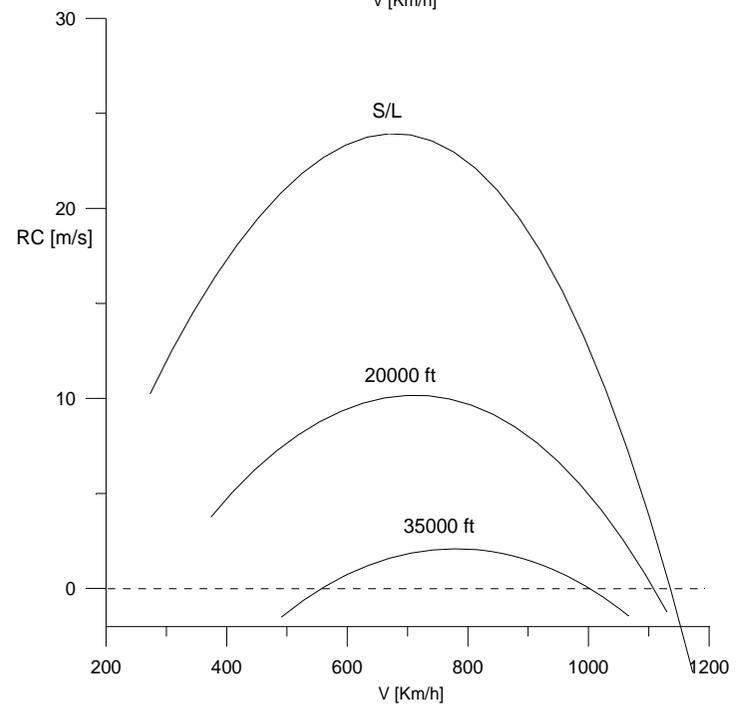
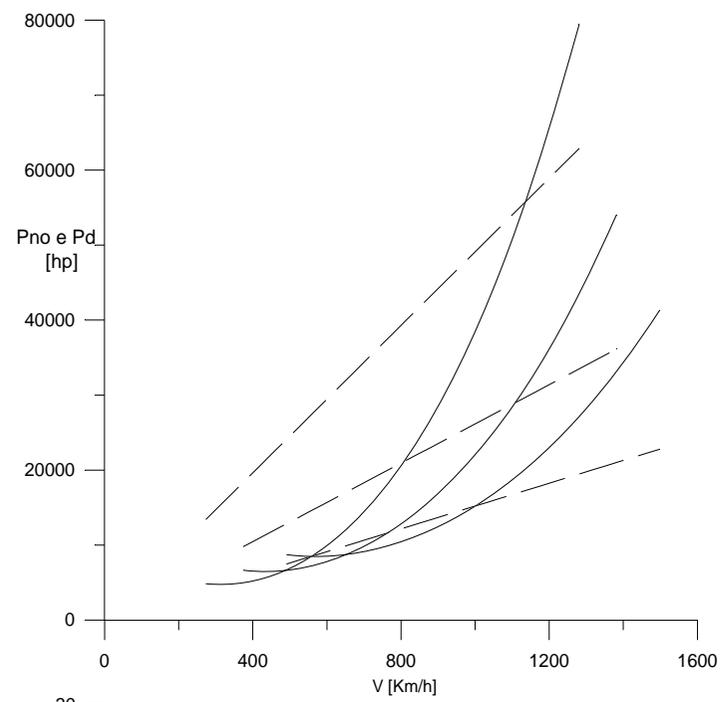
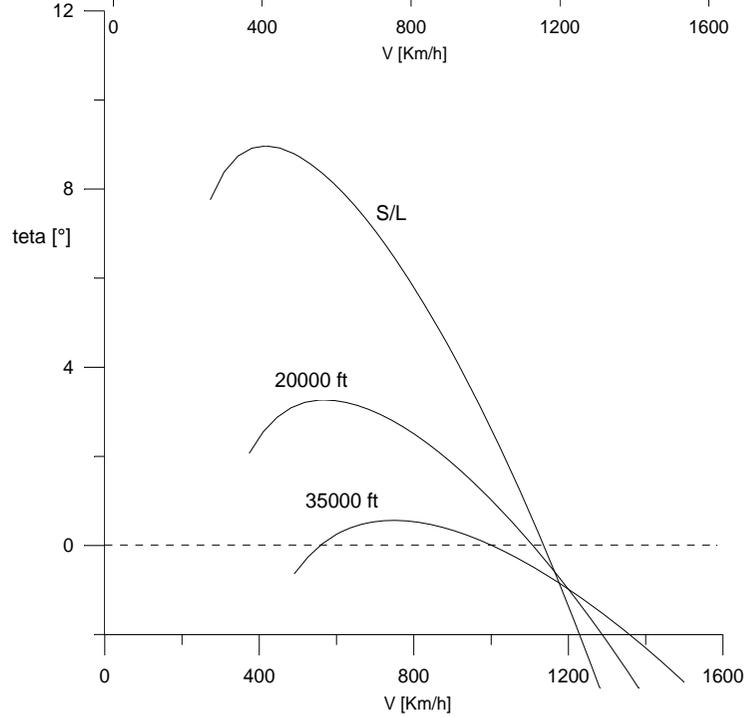
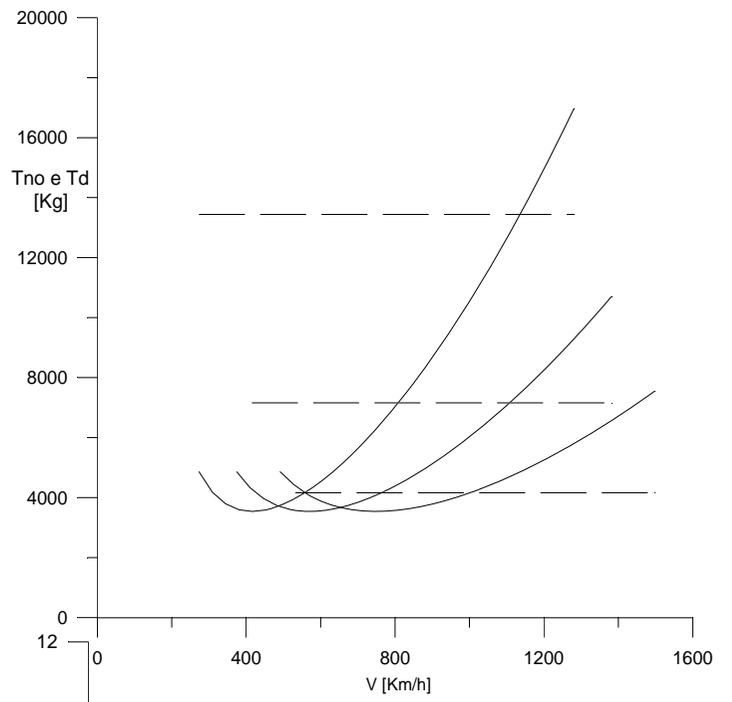
$T_o=8400 = 16800 \text{ Kg}$

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho :

$E_{MAX}=17.95$



Cap.8 – Prestazioni di salita



Cap.8 – Prestazioni di salita

Un velivolo a getto ha solitamente un massimo rateo di salita al livello del mare intorno ai 20-25 m/s corrispondenti a circa 1200-1500 m/min (cioè guadagna un chilometro al minuto) o anche circa 4000 ft/min.

Teniamo presente che il calcolo effettuato è approssimato per il fatto che la spinta disponibile alle basse quote per un motore turbofan non è costante, come già visto nel cap.6 e 7.

Dalla fig. 8.9 si vede come per un velivolo a getto il massimo rateo di salita si ottiene a velocità non proprio bassissime. In effetti, per un velivolo a getto vale il principio che volando (sulla traiettoria) a velocità elevata si sale anche veloce.

Cap.8 – Prestazioni di salita

Consideriamo sempre il velivolo Beechcraft King Air C90.

$W=4380$ Kg peso massimo al decollo

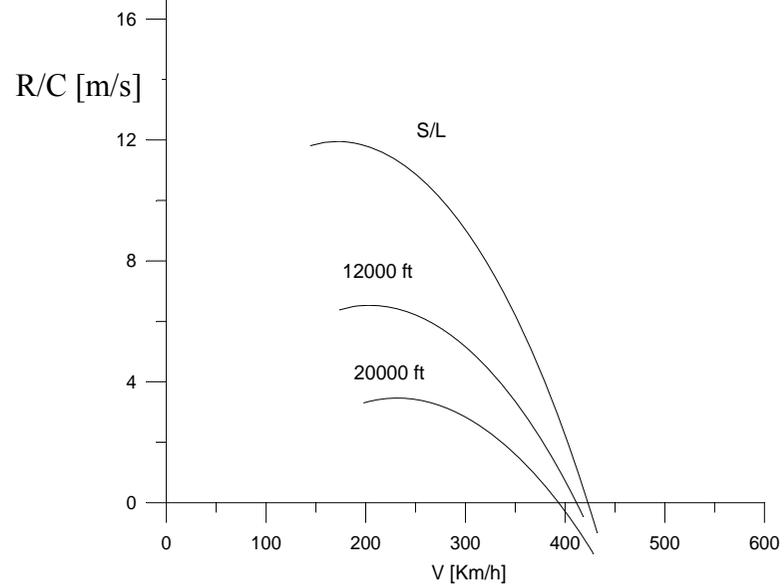
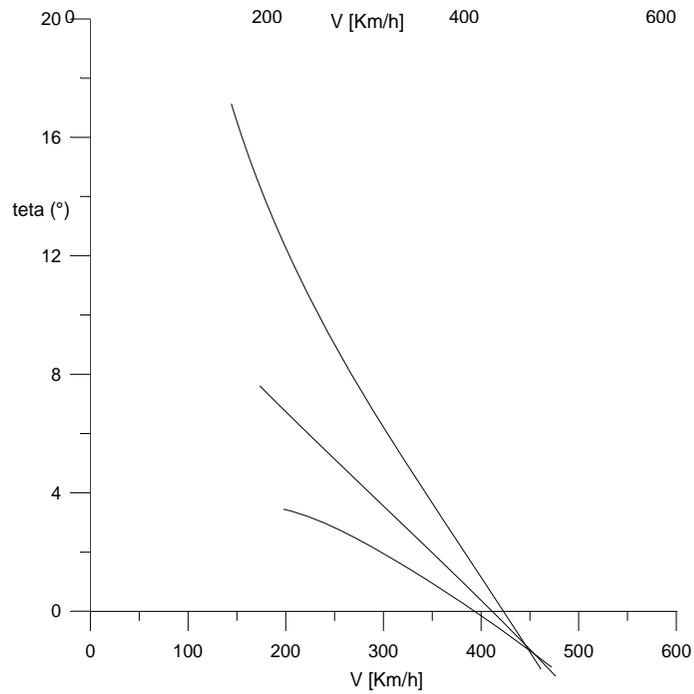
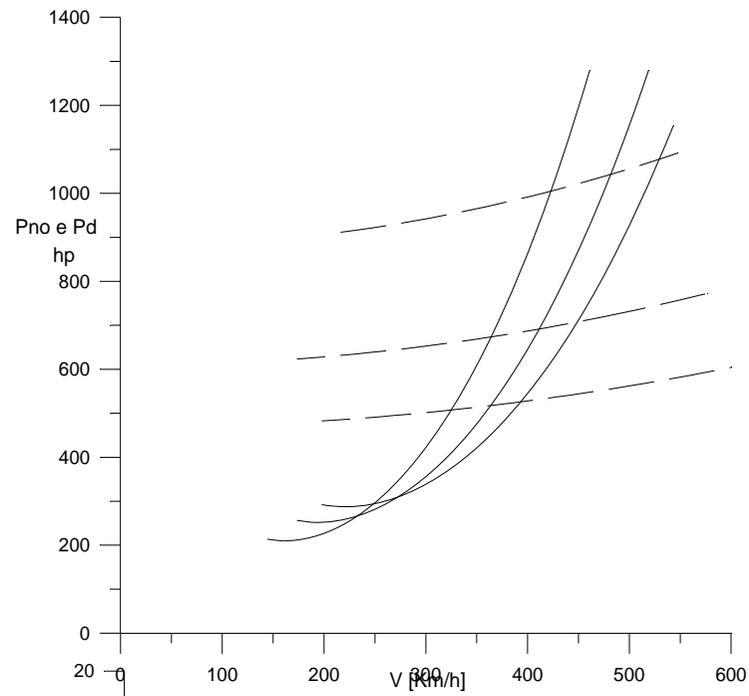
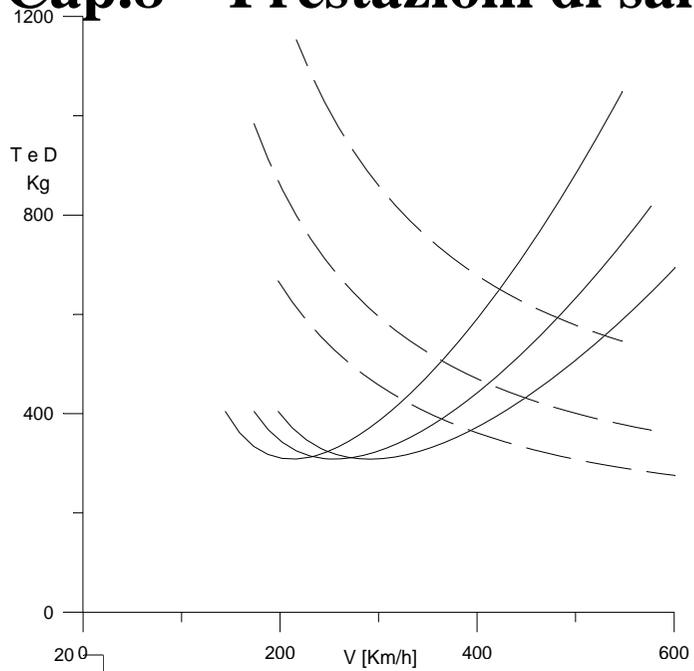
$S= 27.3$ m² $b=15.3$ m $AR=8.57$

$CD_0=0.026$ $e=0.78$ $CL_{MAX}=1.6$

2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero. I motori sono turboelica. Rendimento prop. delle eliche $\eta_p=0.80$



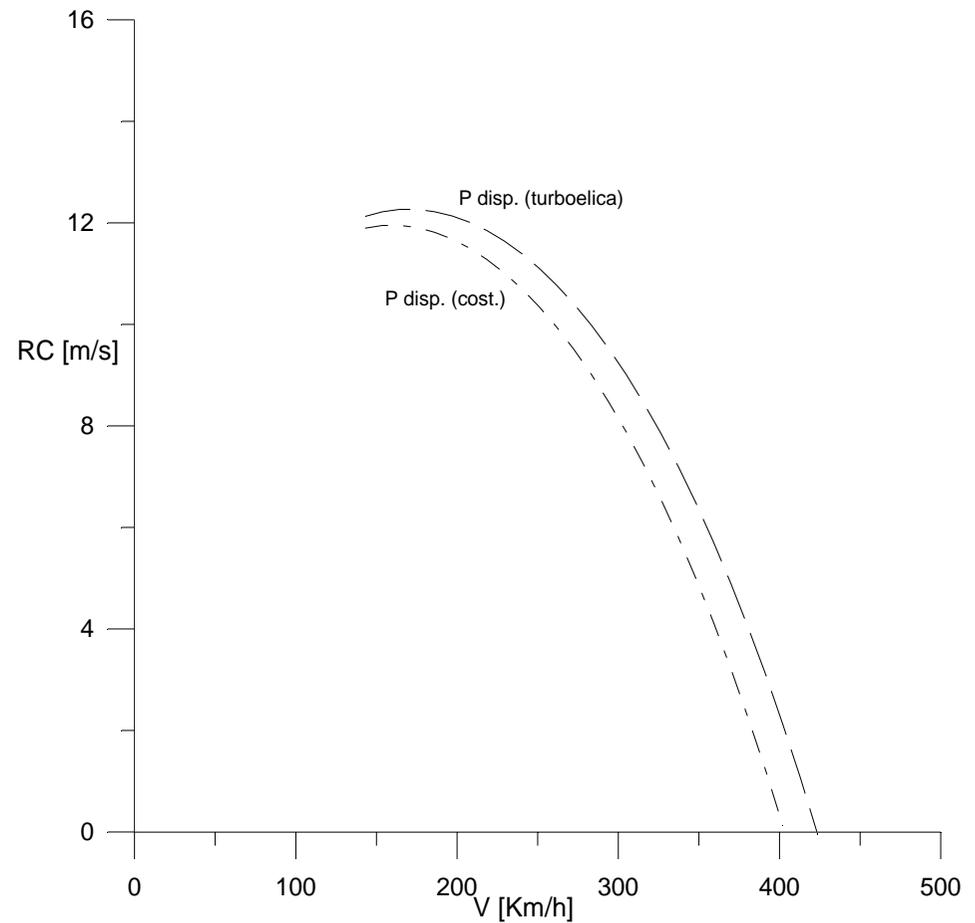
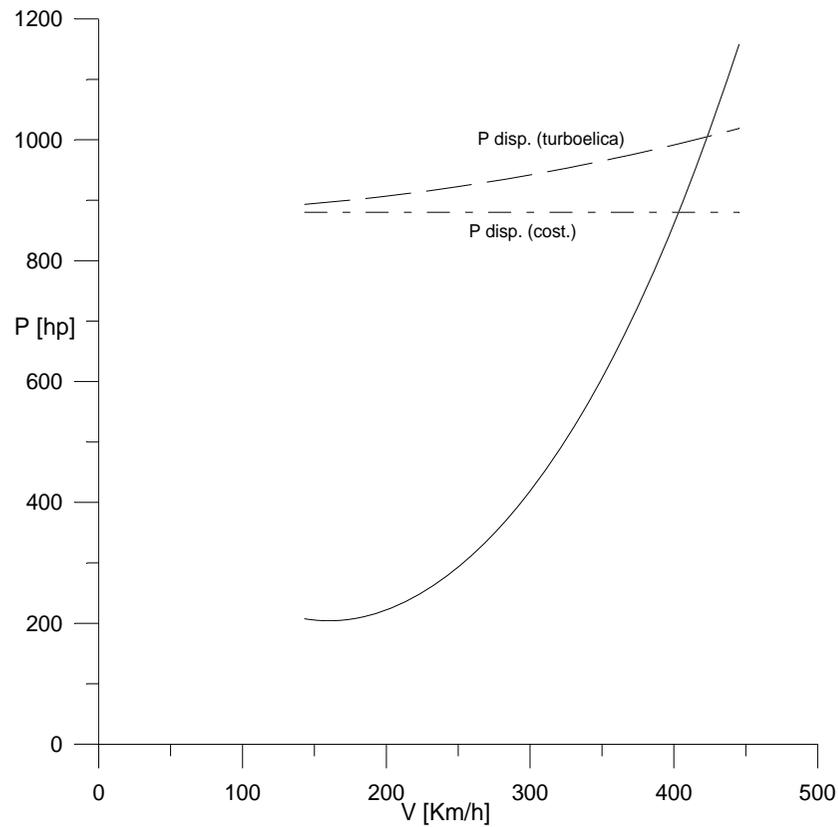
Cap.8 – Prestazioni di salita



Cap.8 – Prestazioni di salita

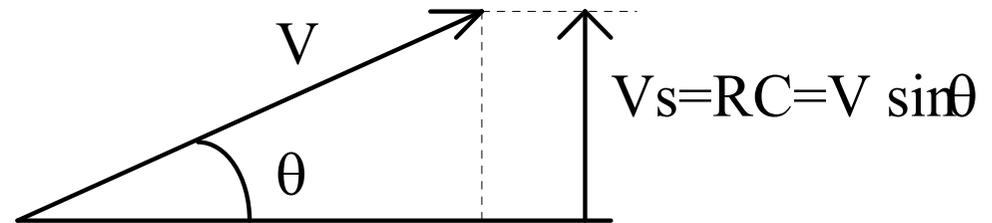
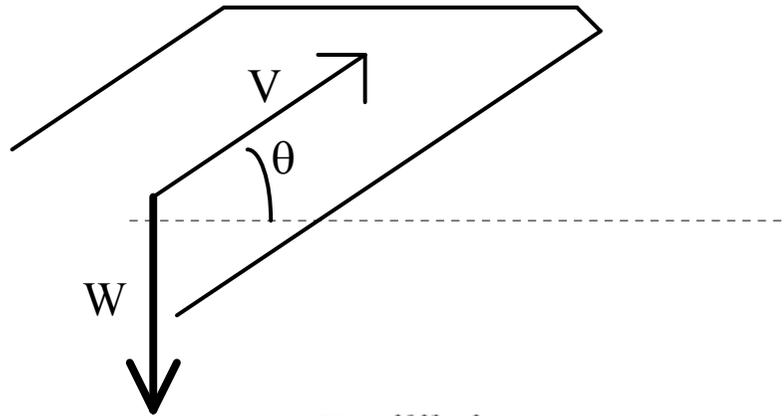
RC al liv mare circa 10-12 m/s

Angoli anche di 10-11° (anche leggermente > getto)



Cap.8 – Prestazioni di salita

Trattazione analitica



Equilibrio

$$\text{Asse x} \quad T - D - W \sin \gamma = 0$$

$$\text{Asse z} \quad L - W \cos \gamma = 0$$

La velocità di salita (detta anche rateo di salita, in ingl. Rate of Climb (RC)):

$$V_z = RC = V \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{T - D}{W}$$

$$RC = \frac{\Pi_d - \Pi_{no}}{W}$$

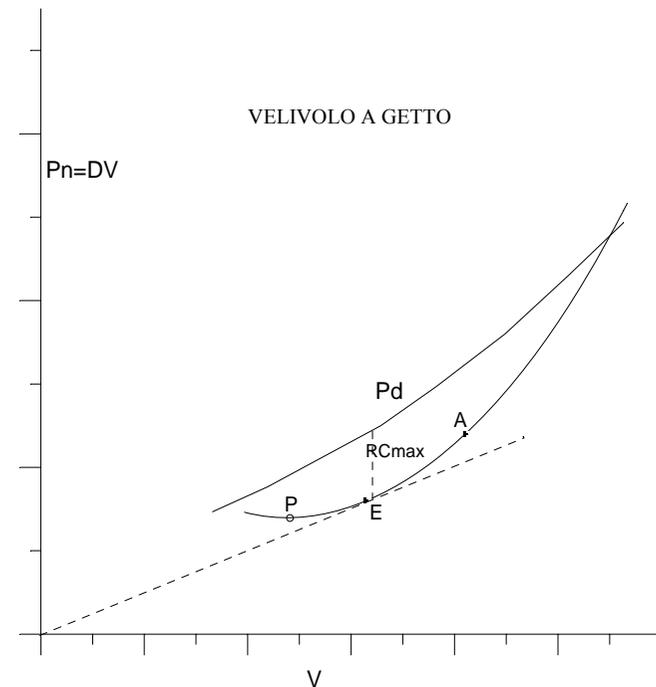
vediamo ora le differenze per velivoli propulsi ad elica e velivoli a getto.

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC = V \sin \theta = \frac{TV}{W} - \frac{DV}{W}$$

$$D = q S (C_{D0} + K C_L^2) = q S \left[C_{D0} + K \cdot \left(\frac{W}{qS} \right)^2 \right] = q S C_{D0} + K \frac{W^2}{qS}$$

$$RC = V \left[\frac{T}{W} - q \frac{S}{W} C_{D0} - \frac{W}{S} \frac{2K}{\rho V^2} \right]$$



Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

Approccio approssimato

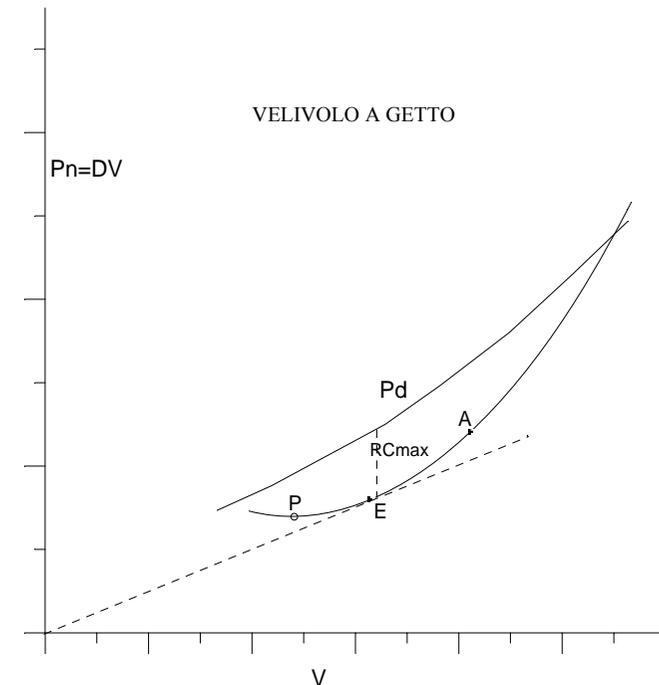
Un primo (approssimato) approccio analitico consiste nel calcolare il massimo rateo di salita ad una certa quota all'assetto di massima efficienza.

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_E - D_E \cdot V_E}{W} = T_d \frac{V_E}{W} - \frac{\Pi_E}{W}$$

$$\theta_{MAX} = \frac{T_d - D_{MIN}}{W}$$

con θ espresso in radianti.

Per avere i gradi moltiplicare per 57.3.



Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

Approccio esatto

$$D(RC)/dV=0 \Rightarrow T - D - V - \frac{dD}{dV} = 0$$

$$\frac{T}{W} - \frac{\rho_o \varepsilon f}{2W} V^2 - \frac{2}{\pi \rho_o \varepsilon} \left(\frac{W}{b_e^2} \right) \frac{1}{V^2} - \frac{\rho_o \varepsilon f}{W} V^2 + \frac{4}{\pi \rho_o \varepsilon} \left(\frac{W}{b_e^2} \right) \frac{1}{V^2} = 0$$

$$6 f q^2 - 2 T q - \frac{2}{\pi} \left(\frac{W}{b_e} \right)^2 = 0$$

$$q_{RCMAX} = \frac{T}{6f} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^2 \left(\frac{T}{W} \right)^2}} \right] = \frac{T}{6f} \Gamma \quad \Gamma = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^2 \left(\frac{T}{W} \right)^2}} \right]$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

Approccio esatto

$$\Gamma = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{MAX}^2 \left(\frac{T}{W} \right)^2}} \right]$$

Il fattore Γ è pari a circa 2, in quanto il denominatore è solitamente $\gg 3$ e quindi la radice è circa 1.

In corrispondenza della quota di tangenza $\frac{T}{W} = \frac{1}{E_{max}}$

e $\Gamma=3$ (e si ha la velocità di salita rapida limite (di fatto con $RC=0$).

$$q_{RCMAX} = q_{fc} = \frac{T}{6f} \Gamma$$

$$V_{RCMAX} = V_{fc} = \sqrt{\frac{2 \cdot q_{fc}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{T \cdot \Gamma}{6f}} = \sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

Approccio esatto

$$V_{RCMAX} = V_{fc} = \sqrt{\frac{2 \cdot q_{fc}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{T \cdot \Gamma}{6f}} = \sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}}$$

RICORDIAMO che il rateo di salita è :

$$RC_{MAX} = \frac{T_d \cdot V_{fc} - D_{fc} \cdot V_{fc}}{W} = \theta_{fc} \cdot V_{fc}$$

Ricaviamo l'espressione generica di D/W

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W} (CD_o + CD_i)$$

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W} \left(CD_o + \frac{CL^2}{\pi A Re} \right) \quad CL = \frac{W}{qS} \quad \frac{D}{W} = \frac{qS}{W} \left(CD_o + \frac{1}{q^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2 \frac{1}{\pi A Re} \right)$$

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W} \cdot CD_o + \frac{1}{q} \frac{W}{S} \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

Approccio esatto

$$\frac{D}{W} = \frac{qS}{W} \cdot CD_0 + \frac{1}{q} \frac{W}{S} \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e}$$

Ma ricordo che :

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{AR \cdot e}{CD_0}} \Rightarrow \pi \cdot AR \cdot e = 4 \cdot CD_0 \cdot E_{MAX}^2$$

Sostituendo a q $q_{RCMAX} = \frac{T}{6f} \Gamma$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{6f}\right) \Gamma \frac{f}{W} + \left(\frac{6f}{T}\right) \frac{1}{\Gamma} \frac{W}{S} \frac{1}{4 \cdot CD_0 \cdot E_{MAX}^2}$$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{W}\right) \frac{\Gamma}{6} + 6 \left(\frac{W}{T}\right) \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{1}{4 \cdot E_{MAX}^2}\right)$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO
Approccio esatto

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{W}\right)\frac{\Gamma}{6} + 6\left(\frac{W}{T}\right)\frac{1}{\Gamma}\left(\frac{1}{4 \cdot E_{MAX}^2}\right)$$

$$\left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \left(\frac{T}{W}\right)\frac{\Gamma}{6} + \frac{3}{2 \cdot \Gamma} \left(\frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right) \cdot E_{MAX}^2} \right)$$

Ma

$$\theta_{fc} = \frac{T}{W} - \left(\frac{D}{W}\right)_{fc} = \frac{T}{W} \left(1 - \frac{\Gamma}{6}\right) - \frac{3}{2 \cdot \Gamma} \frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right) \cdot E_{MAX}^2}$$

$$RC_{MAX} = \theta_{fc} \cdot V_{fc} = \left\{ \frac{T}{W} \left(1 - \frac{\Gamma}{6}\right) - \frac{3}{2 \cdot \Gamma} \frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right) \cdot E_{MAX}^2} \right\} \left(\sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}} \right)$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO Approccio esatto

Con la nuova espressione per la V

$$V_{fc} = \left(\sqrt{\frac{T \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot f}} \right) = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CD_o} \frac{T}{S}} = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CD_o}} \sqrt{\frac{T}{S}}$$

$$V_{fc} = \sqrt{\frac{\Gamma}{3 \cdot \rho_o \cdot \sigma \cdot CD_o}} \sqrt{\frac{T}{W}} \sqrt{\frac{W}{S}}$$

$$RC_{MAX} = \theta_{fc} \cdot V_{fc} = \left\{ \frac{T}{W} \left(1 - \frac{\Gamma}{6} \right) - \frac{3}{2 \cdot \Gamma} \frac{1}{\left(\frac{T}{W} \right) \cdot E_{MAX}^2} \right\} \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{3 \rho \cdot CD_o}} \sqrt{\frac{T}{W}} \sqrt{\frac{W}{S}} \right)$$

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CD_o} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right]$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CDo} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right]$$

- da W/S
- dal rapporto spinta / peso (in modo forte)
- dal CDo
- dall'efficienza massima

E' importante notare come aumentare il carico alare (ad esempio riducendo la superficie alare) per un velivolo a getto equivale ad aumentare sia la velocità massima (e la velocità di crociera) sia il massimo rateo di salita del velivolo.

Questo avviene perché riducendo S si riduce la superficie bagnata e così si riduce la resistenza parassita (di attrito) importante alle alte velocità.

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CD_0} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right]$$

Assumendo $\Gamma=2$

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot 2}{3 \cdot \rho \cdot CD_0} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot 2} \right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \rho_0}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{W}{S \cdot CD_0}} \cdot \sqrt{\frac{T}{W}} \left(\frac{T}{W} \right) \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot 2} \right]$$

$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{b_e^2}{f}} \Rightarrow E_{MAX}^2 = \frac{\pi b_e^2}{4 f}$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \rho_0}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{W}{S \cdot CD_0}} \cdot \sqrt{\frac{T}{W}} \left(\frac{T}{W} \right) \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3 \cdot f}{(T/W)^2 \cdot \pi \cdot b_e^2} \right]$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \rho_0}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{W}{f}} \cdot \sqrt{\frac{T}{W}} \left(\frac{T}{W}\right) \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3 \cdot f}{(T/W)^2 \cdot \pi \cdot b_e^2} \right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \rho_0}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{T}{f}} \left(\frac{T}{W}\right) \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3 \cdot f}{(T/W)^2 \cdot \pi \cdot b_e^2} \right]$$

$$RC_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot \rho_0}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{T}{f}} \left(\frac{T}{W}\right) \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{\pi} \left(\frac{f}{T}\right) \left(\frac{W}{T}\right) \frac{W}{b_e^2} \right]$$

$$RC_{MAX} = \left[\sqrt{\frac{2}{3\rho_0}} \frac{2}{3} \right] \cdot \left(\frac{T}{W}\right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \left(\frac{T}{W}\right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\left(\frac{T}{W}\right)} \frac{1}{\left(\frac{T}{f}\right)} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left(\frac{W}{b_e^2}\right) \left[\sqrt{\frac{2}{3\rho_0}} \frac{3}{\pi} \right]$$

$$RC_{MAX} = 1.54 \left(\frac{T}{W}\right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2}\right)}{\sqrt{\frac{T}{f}} \sqrt{\sigma}}$$

Con T e W espresse in Kg

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = \left[\frac{(W/S) \cdot \Gamma}{3 \cdot \rho \cdot CDo} \right]^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{W} \right)^{3/2} \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{6} - \frac{3}{2 \cdot (T/W)^2 \cdot (E_{MAX})^2 \cdot \Gamma} \right]$$

Quindi siamo arrivati ad un'espressione approssimata ($\Gamma=2$)
e utilizzando forze espresse in [Kg]

$$RC_{MAX} = 1.54 \left(\frac{T}{W} \right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2} \right)}{\sqrt{\frac{T}{f}} \sqrt{\sigma}}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = 1.54 \left(\frac{T}{W} \right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2} \right)}{\sqrt{\frac{T}{f}} \sqrt{\sigma}}$$

Ad esempio , considerando un velivolo a getto con
Td=25000 Kg (massima totale a livello del mare)

$$W=100000 \text{ Kg}$$

$$CDo=0.015 \quad S=205 \text{ m}^2 \quad b=37 \text{ m} \quad b_e=33 \text{ m} \quad (e=0.80)$$

Il calcolo della 8.16 fornisce :

$$RCMAX = 34.72 - 2.24 = 32.5 \text{ m/s} = 6400 \text{ ft/min}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica – VEL GETTO

$$RC_{MAX} = 1.54 \left(\frac{T}{W} \right) \sqrt{\frac{T}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2} \right)}{\sqrt{\frac{T}{f}} \sqrt{\sigma}}$$

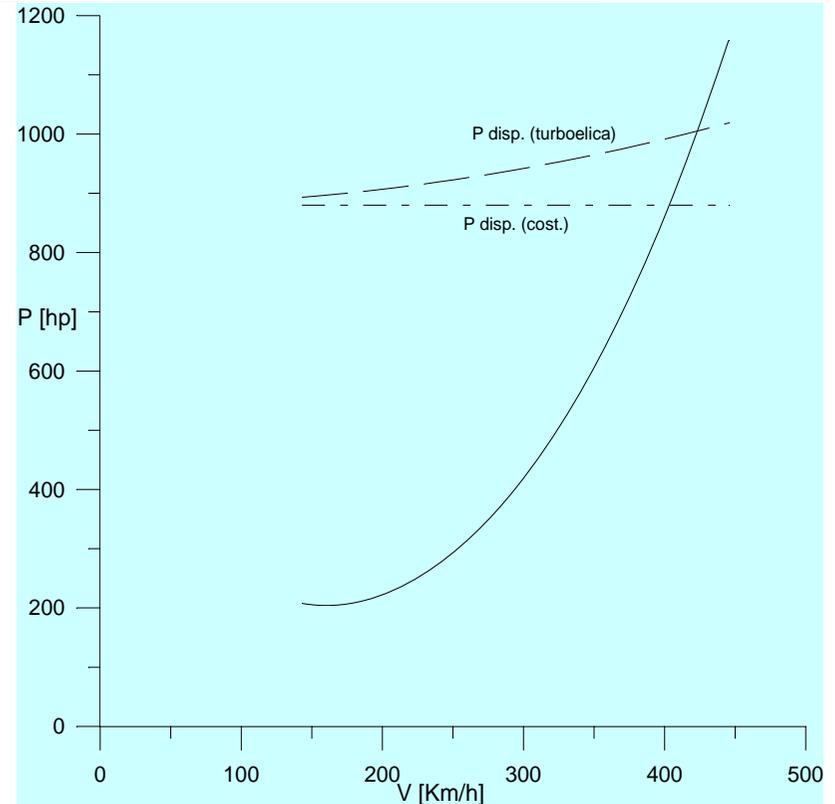
Rispetto al calcolo precedente andrebbe però considerato un valore di T diverso da T_0 . Infatti dal grafico della spinta di un turbofan a livello del mare (S/L) in funzione della velocità (del Mach) si vede che ad un valore di $M=0.4-0.6$ (tipico della velocità di salita) T/T_0 è circa 0.50-0.60.

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$\Pi_d = \eta_p \Pi_a = T V$$

$$RC = \eta_p \left(\frac{\Pi_a}{W} \right) - \frac{1}{2} \frac{\rho V^3 C_{D0}}{(W/S)}$$

$$- \frac{2}{\pi AR_e} \frac{1}{\rho V} (W/S)$$



$$\Pi_{no_MIN} = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot (4 \cdot CD_0) \cdot V_P^3 = \sqrt{\frac{2}{\rho}} W^{3/2} \frac{1}{S^{1/2}} \frac{4C_{D0}}{3^{3/4} \pi^{3/4} AR_e^{3/4} C_{D0}^{3/4}}$$

$$= \frac{4}{3^{3/4}} \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{D0}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}} = 0.95 \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{D0}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$\Pi_{no_MIN} = \frac{4}{3^{3/4}} \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}} = 0.95 \frac{W^{3/2}}{\sigma^{1/2}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}}$$

$$RC_max = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{C_{Do}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$RC_{\text{max}} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{C_{D0}^{1/4}}{AR_e^{3/4} S^{1/2}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

ma

$$\frac{C_{D0}^{1/4}}{\left(\frac{b_e^2}{S}\right)^{3/4} S^{1/2}} = \frac{(C_{D0} S)^{1/4}}{b_e^{3/2} S^{-3/4} S^{1/2} S^{1/4}} = \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}$$

$$RC_{\text{MAX}} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}$$

Con potenza in [hp] e W in [Kg]

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

Si può anche ricavare una espressione più semplice:

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - \frac{\Pi_{MIN}}{W}$$

$$\Pi_{MIN} = \Pi_P = V_P \cdot D_P = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_P} = \frac{V_E}{1.32} \cdot \frac{W}{E_{MAX}} \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.875 \frac{V_E}{E_{MAX}} \cdot \frac{W}{E_{MAX}}$$

$$RC_{MAX} = \frac{\Pi_d}{W} - 0.875 \frac{V_E}{E_{MAX}}$$

$$RC_{MAX} = \eta_P \frac{\Pi_a}{W} - 0.875 \left[\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_E} \right]^{1/2} \frac{1}{E_{MAX}}$$

Cap.8 – Prestazioni di salita Trattazione analitica - ELICA

$$RC_{MAX} = 76 \cdot \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \sqrt{\frac{W}{\sigma}} \frac{f^{1/4}}{b_e^{3/2}}$$

PARAMETRO
FONDAMENTALE

$$RC_{MAX} = \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 0.875 \left[\frac{2 W}{\rho S CL_E} \right]^{1/2} \frac{1}{E_{MAX}}$$

Un'altra importantissima informazione che si ricava dalla 8.19 è che per un velivolo ad elica il massimo rateo di salita si riduce all'aumentare del carico alare.

Quindi, mentre per un velivolo a getto il rateo massimo di salita cresce al crescere del carico alare, per un velivolo ad elica succede il contrario !

Quindi ridurre la superficie alare per un velivolo ad elica non comporta per il rateo di salita un vantaggio come per i velivoli a getto.

Per i velivoli ad elica è molto importante l'apertura alare per avere buone capacità di salita !!

Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$L = W \cos \theta$$

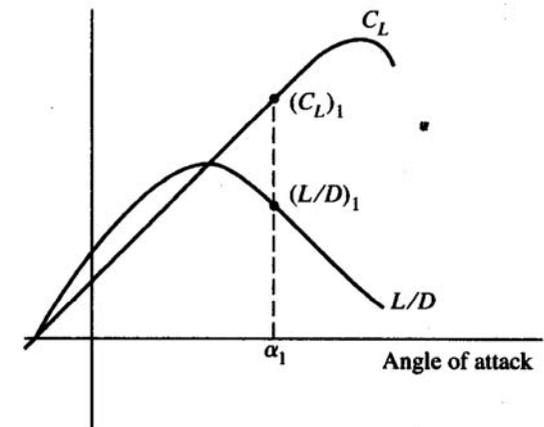
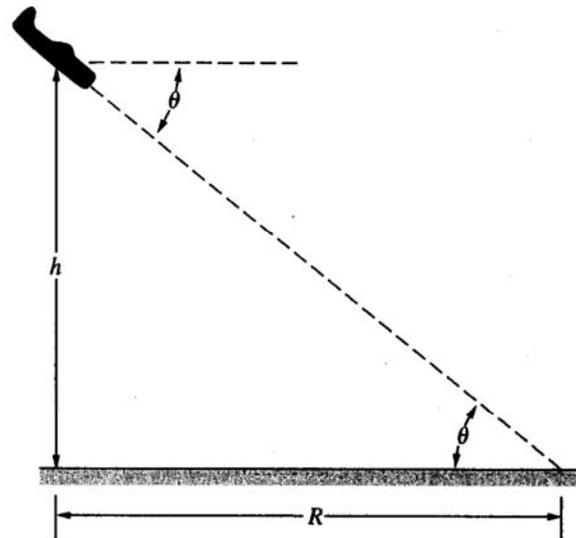
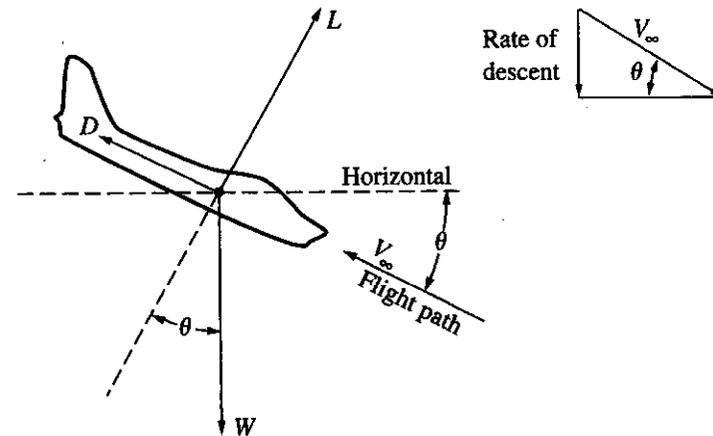
$$D = W \sin \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{D}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{1}{L/D}$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

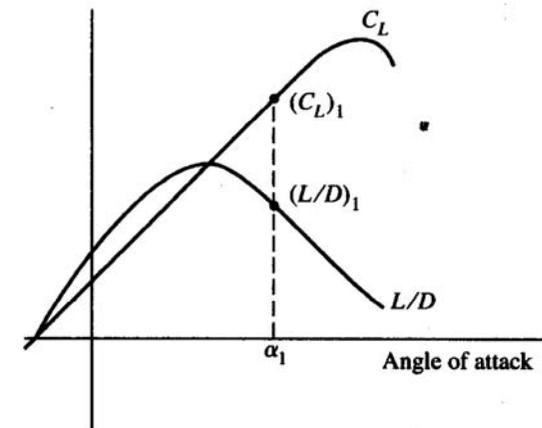
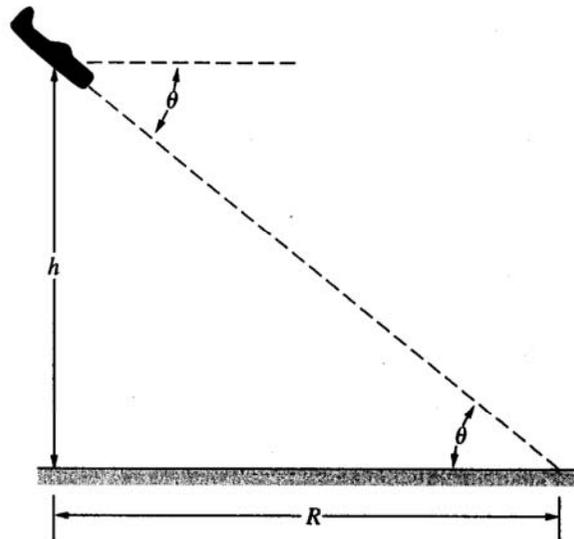


Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

L'angolo di planata minimo non dipende dalla quota, dal carico alare o cose simili, ma

SOLO dall'EFFICIENZA MASSIMA !



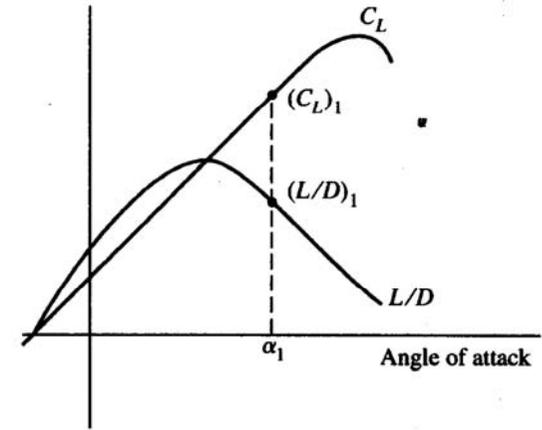
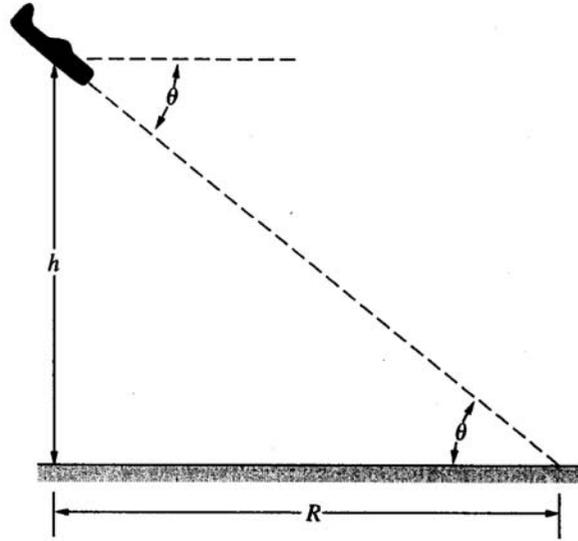
Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L$$

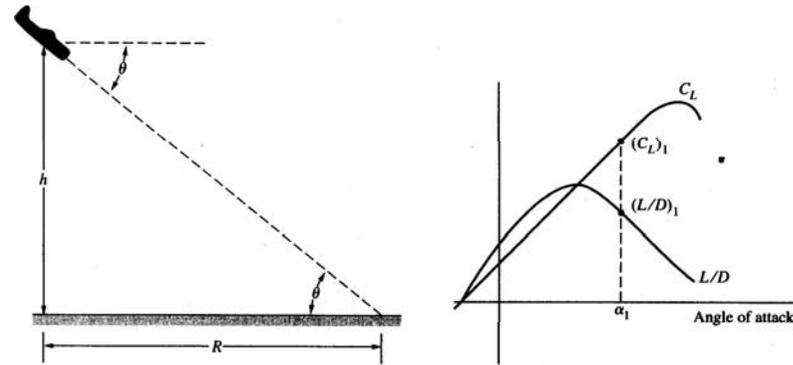
$$\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L = W \cos \theta$$

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}}$$



Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}}$$

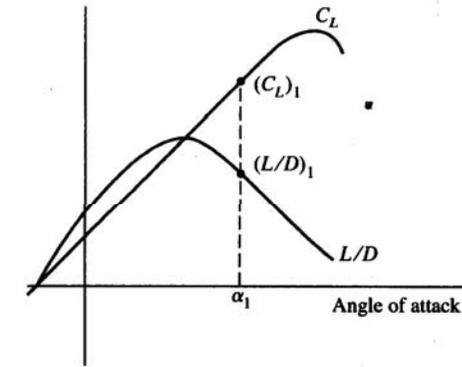
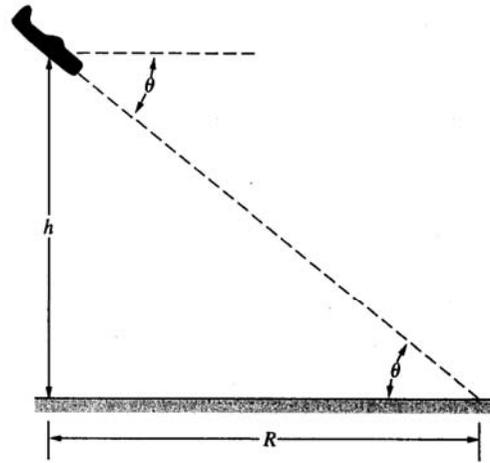


è la velocità di planata di equilibrio. Chiaramente essa dipende dalla quota) e dal carico alare. Il valore di C_L nell'Eq. [8.24] è quel valore particolare che corrisponde al valore specifico di L/D usato nell'Eq. [8.22]. Ricordiamo che sia C_L che L/D sono caratteristiche aerodinamiche dell'aereo che variano con l'angolo d'attacco, come mostrato in Fig. 5.41. Si noti dalla Fig. 5.41 che un determinato valore di L/D , indicato con $(L/D)_1$, corrisponde ad un determinato angolo d'attacco, che successivamente impone il coefficiente di portanza (C_L). Se L/D è mantenuto costante per tutta la traiettoria di planata, allora C_L è costante lungo la traiettoria. Comunque la velocità di equilibrio cambierà con la quota lungo questa traiettoria, diminuendo al diminuire della quota.

Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}}$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$



Consideriamo di nuovo il caso di minimo angolo di planata come trattato con l'Eq. [8.23]. Per un tipico aeroplano moderno, $(L/D)_{\max} = 15$, e per questo caso, dall'Eq. [8.23],

$$\theta_{\min} = 3.8^{\circ}$$

è un angolo piccolo. Quindi possiamo ragionevolmente $\cos \theta = 1$

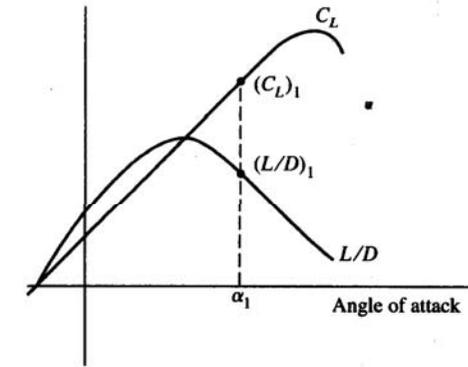
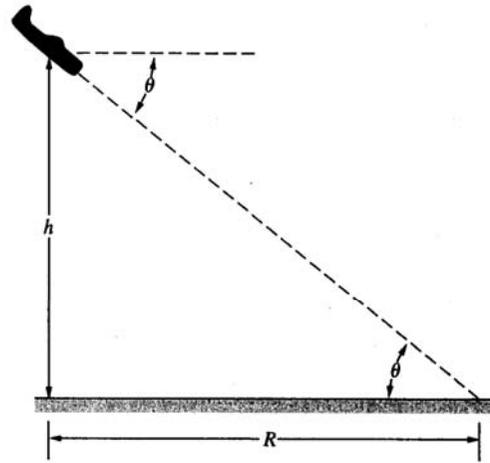
$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4C_{D,0}K}}$$

$$V_{(L/D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho_{\infty}} \sqrt{\frac{K}{C_{D,0}}} \frac{W}{S} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}}$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$



Rateo di discesa RD $RD = V_V = V_{\infty} \sin \theta$

$$DV_{\infty} = W \cdot V_{\infty} \sin \theta = W \cdot V_V$$

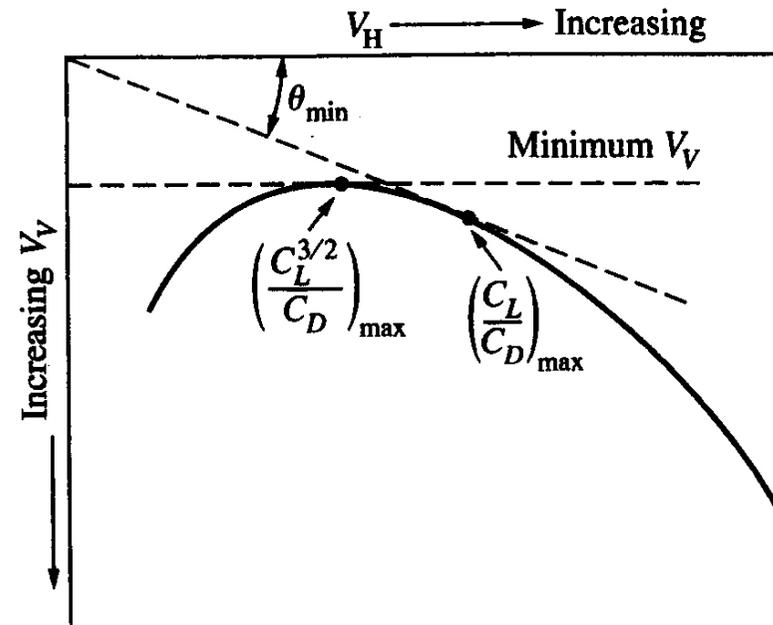
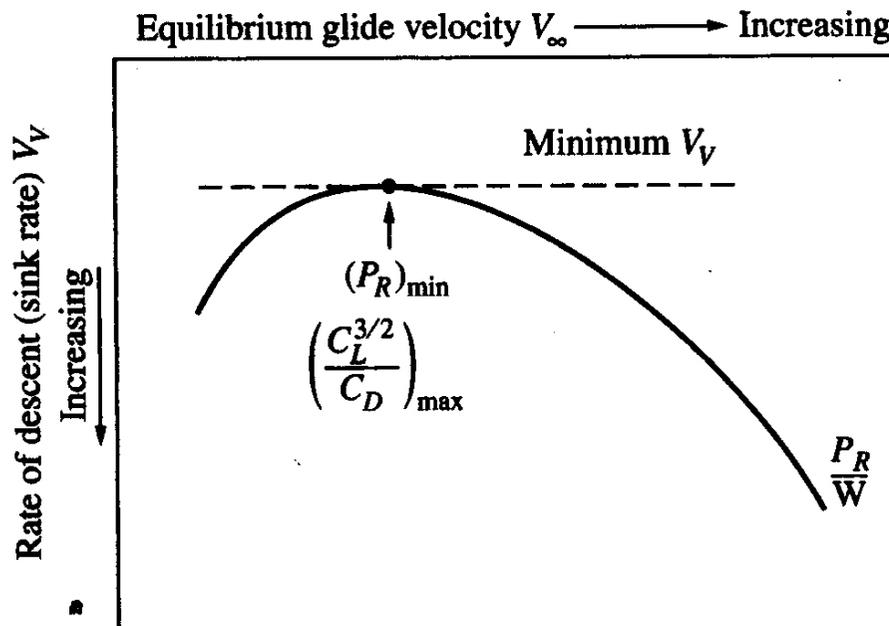
$$V_V = \frac{DV_{\infty}}{W}$$

Cap.8 – VOLO LIBRATO

RD MINIMO => POTENZA Minima

$$\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \text{ è massimo}$$

$$(V_\infty)_{\text{min velocità di affondata}} = \left(\frac{2}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{K}{3C_{D,0}}} \frac{W}{S} \right)^{1/2}$$



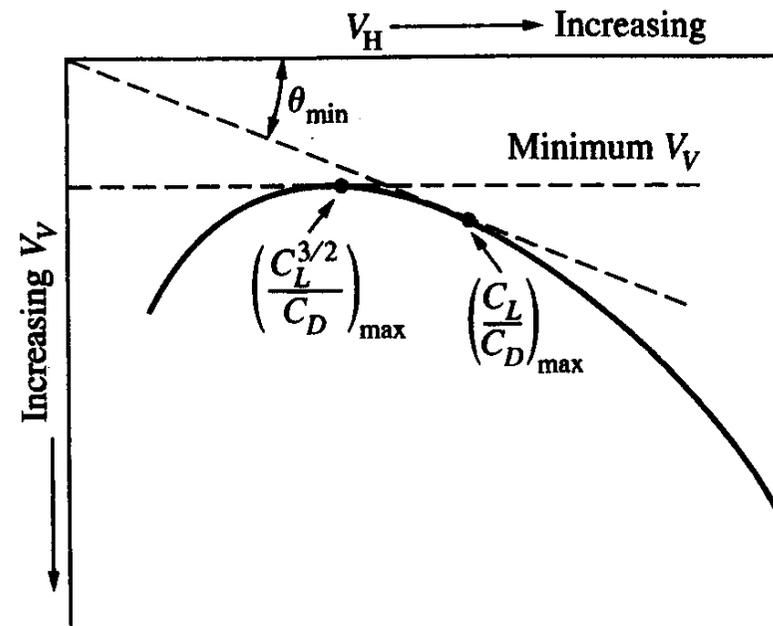
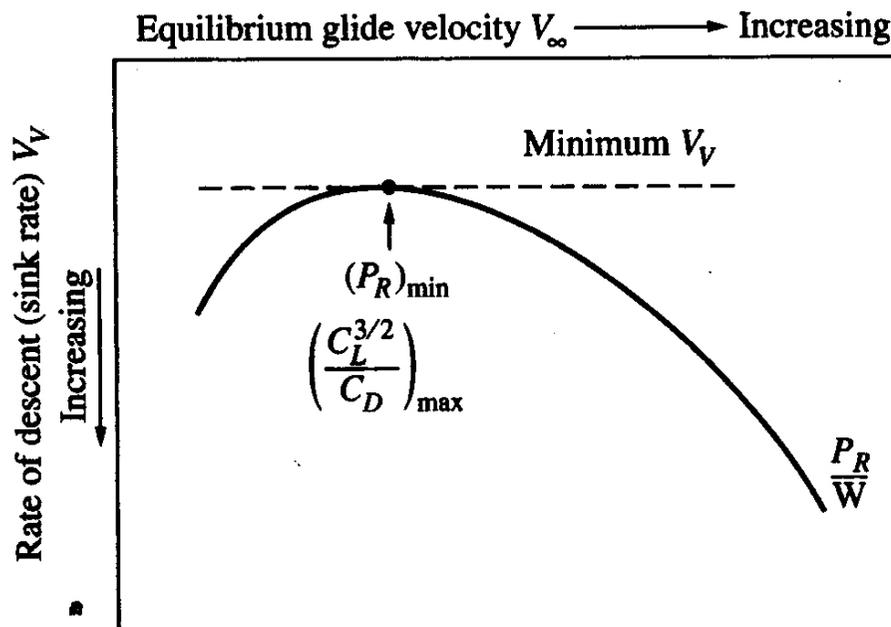
Cap.8 – VOLO LIBRATO

ASSETTO di minimo RD e di minimo angolo sono diversi !!

$$L = W \cos \theta$$

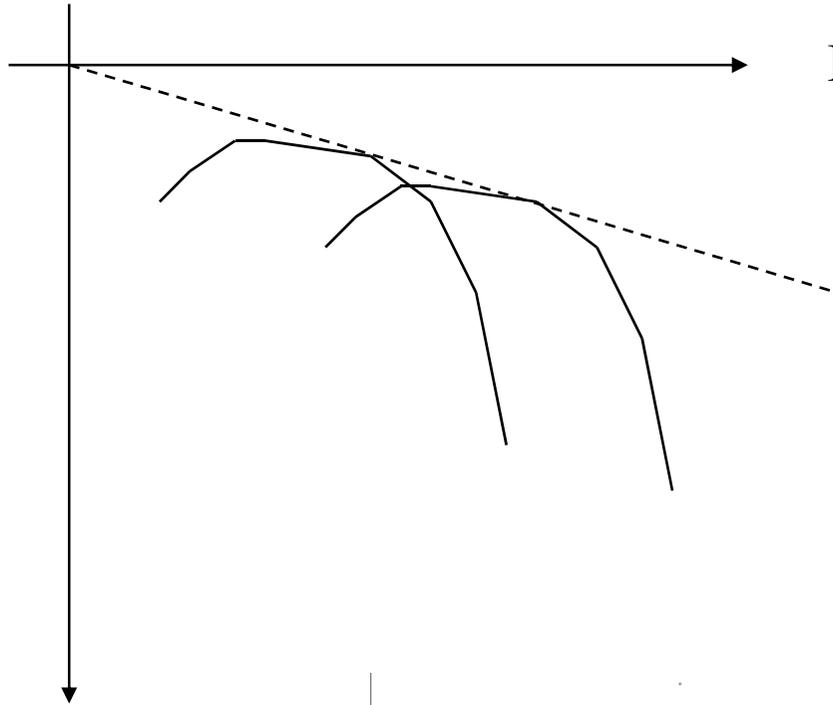
$$W \cos \theta = L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L$$

ODOGRAFO VOLO LIBRATO



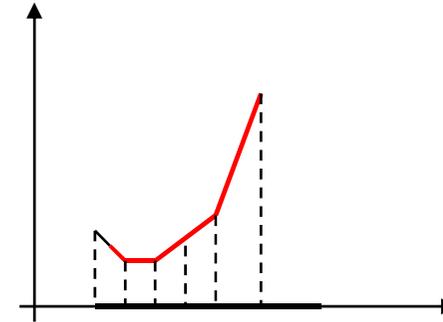
Cap.8 – VOLO LIBRATO

La curva di RD è la curva della potenza necessaria ribaltata.

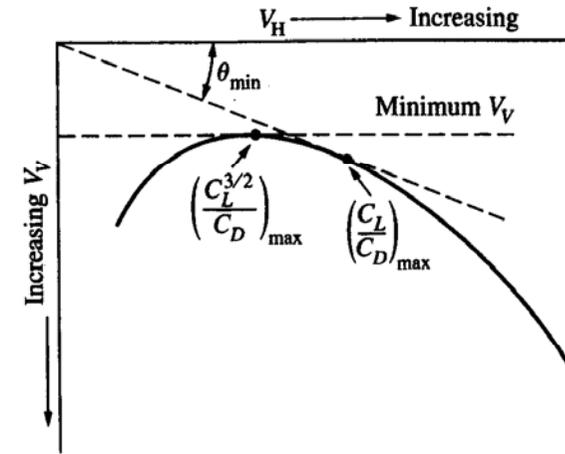
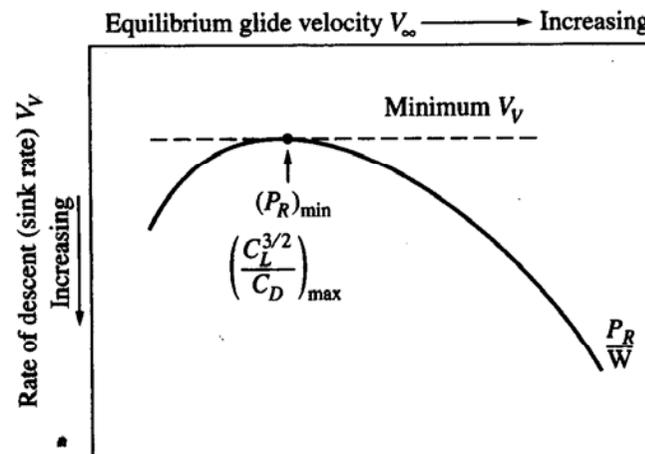


E' come RC con potenza disponibile=0

$$RC = \frac{TV}{W} - \frac{DV}{W} = -\frac{DV}{W}$$



ODOGRAFO VOLO LIBRATO



Cap.8 – VOLO LIBRATO

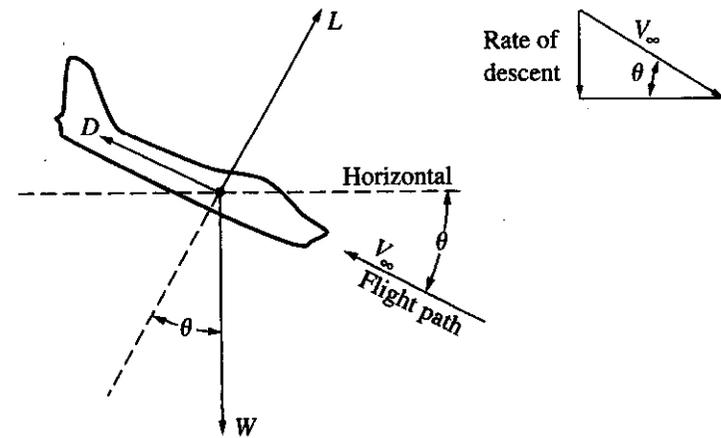
$$L = W \cos \theta$$

$$D = W \sin \theta$$

$$W \cos \theta = L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L$$

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2W \cos \theta}{\rho_{\infty} S C_L}}$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$



$$V_V = V_{\infty} \sin \theta = (\sin \theta) \sqrt{\frac{2 \cos \theta W}{\rho_{\infty} C_L S}}$$

Dividendo tra loro le 2 equazioni di equilibrio $\sin \theta = \frac{D}{L} \cos \theta = \frac{C_D}{C_L} \cos \theta$

$$V_V = \sqrt{\frac{2 \cos^3 \theta W}{\rho_{\infty} (C_L^3 / C_D^2) S}} \Rightarrow \boxed{V_V = \sqrt{\frac{2 W}{\rho_{\infty} (C_L^3 / C_D^2) S}} \quad (\cos \theta) = 1$$

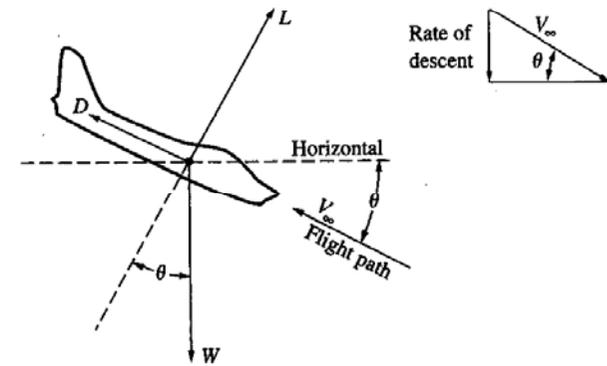
Cap.8 – VOLO LIBRATO

$$L = W \cos \theta$$

$$D = W \sin \theta$$

$$\tan \theta_{\min} = \frac{1}{(L/D)_{\max}}$$

$$V_V = \sqrt{\frac{2}{\rho_{\infty}} \frac{W}{(C_L^3 / C_D^2) S}}$$



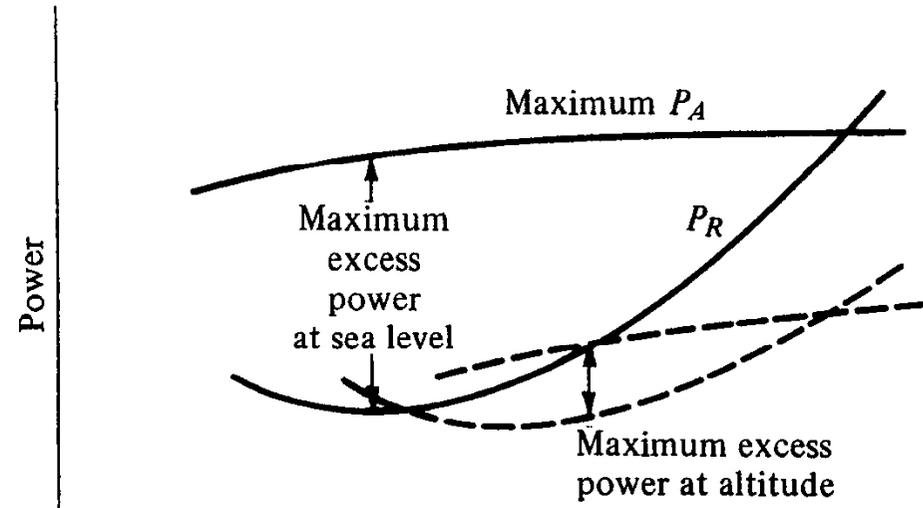
L'Equazione mostra esplicitamente che

$$(V_V)_{\min} \Rightarrow (C_L^{3/2} / C_D)_{\max}$$

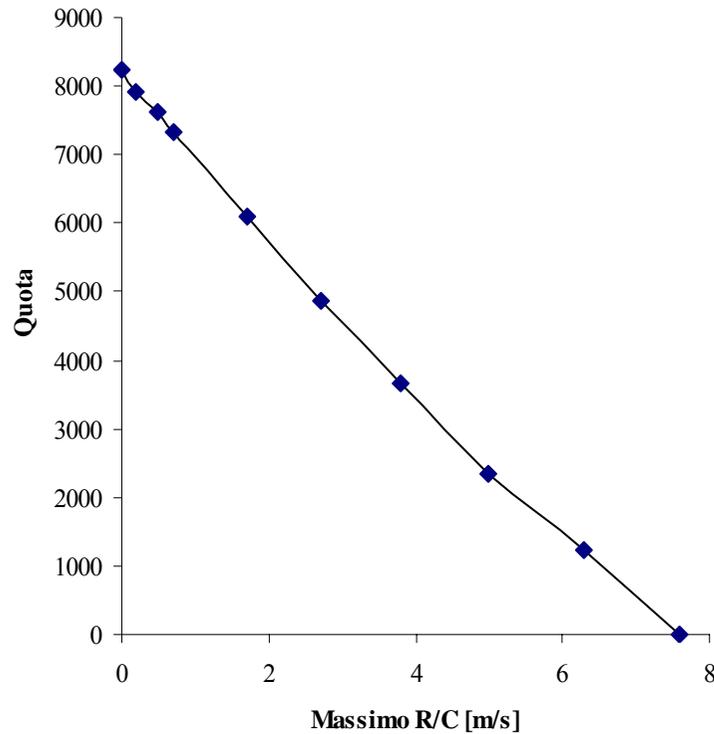
Essa mostra inoltre che la velocità di discesa diminuisce al diminuire della quota e aumenta come la radice quadrata del carico alare.

Cap.8 – QUOTA TANGENZA

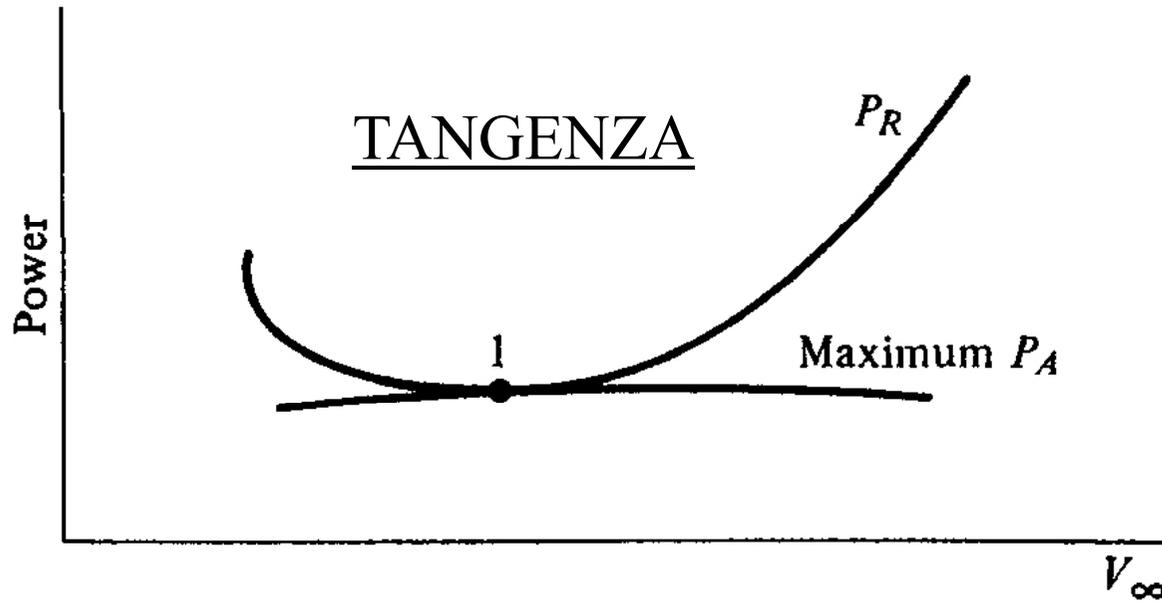
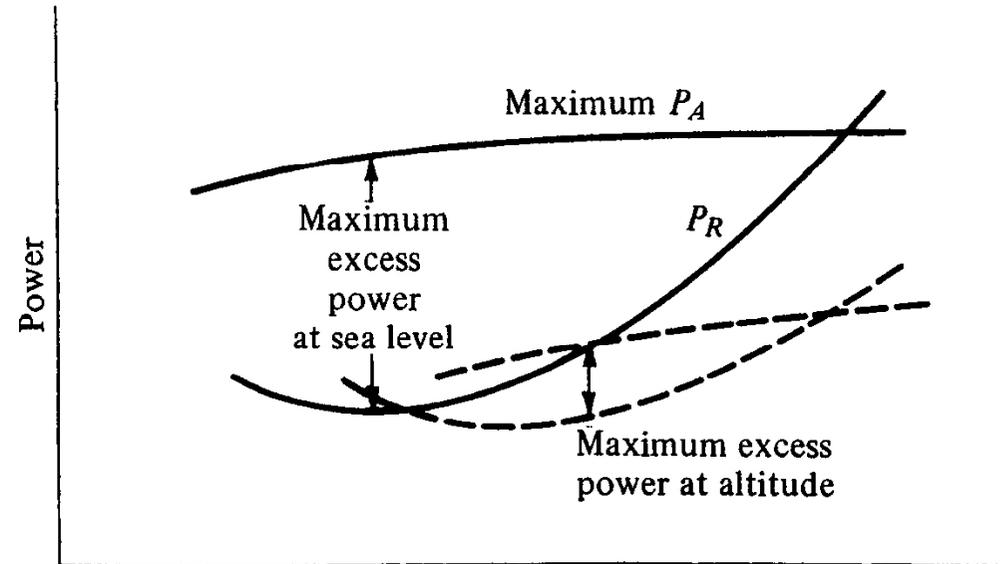
Quota, m	Massimo R/C, m/s
0	7.6
1219.2	6.3
2348.4	5.0
3657.6	3.8
4876.8	2.7
6096	1.7
7315.2	0.7
7924.8	0.2



Quote di tangenza per il CP-1



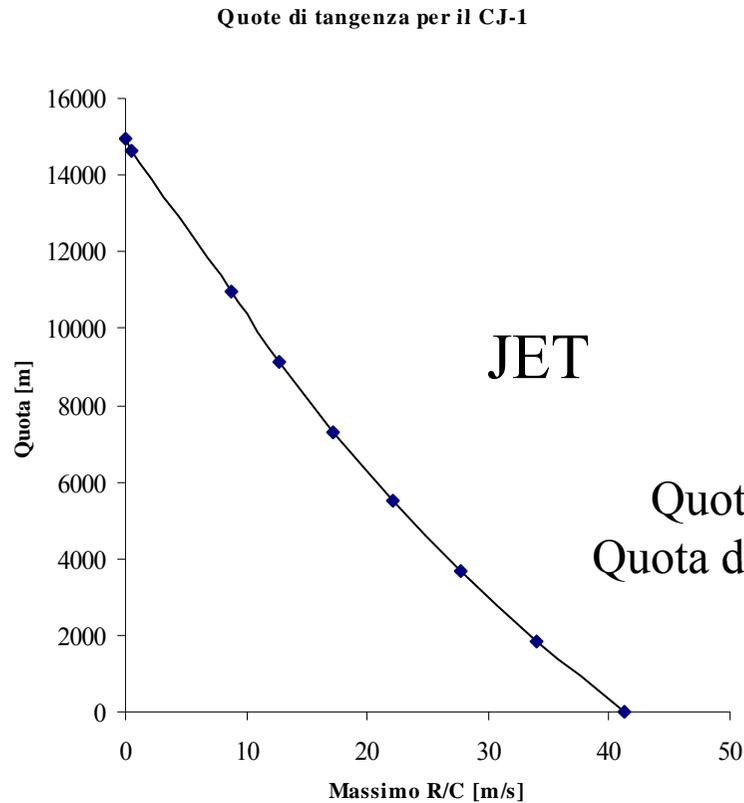
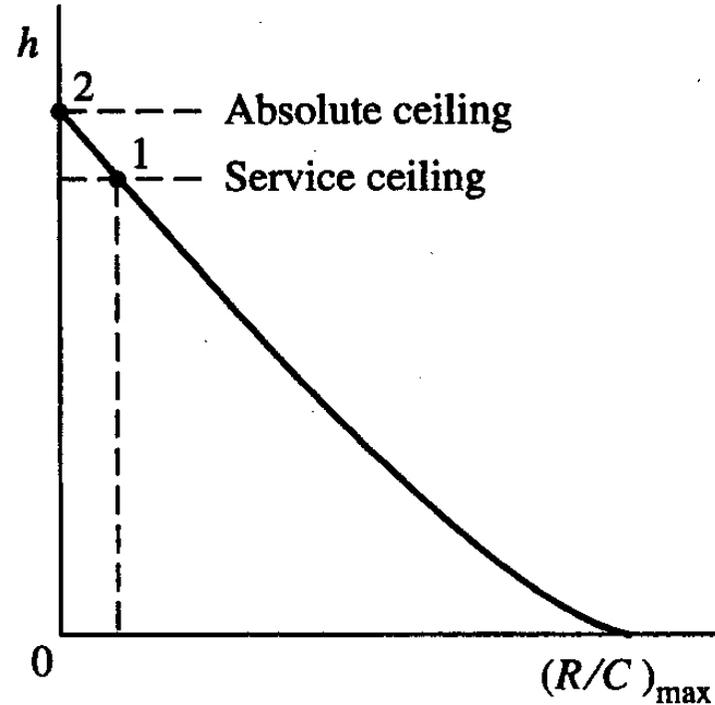
Cap.8 – QUOTA TANGENZA



Cap.8 – QUOTA TANGENZA

Tangenza Teorica (RC=0)

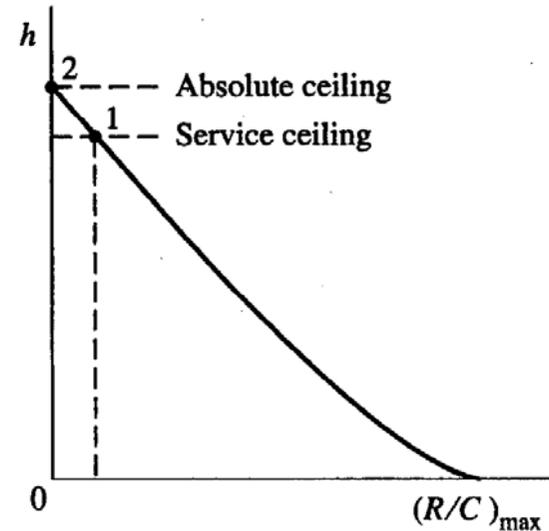
Tangenza pratica (RC=0.5 m/s)
(circa 100 ft/min)



JET

Quota di tangenza teorica ($R/C = 0$) = 14935.2 m
Quota di tangenza pratica ($R/C = 0.5$ m/s) = 14630.4 m

Cap.8 – QUOTA TANGENZA



Based on maximum climb rates

Absolute Ceiling = 0 ft/min ROC (quota tangenza teorica)

Service Ceiling = 100 ft/min ROC (quota tangenza pratica)

Cruise Ceiling = 300 ft/min ROC

Combat Ceiling = 500 ft/min ROC

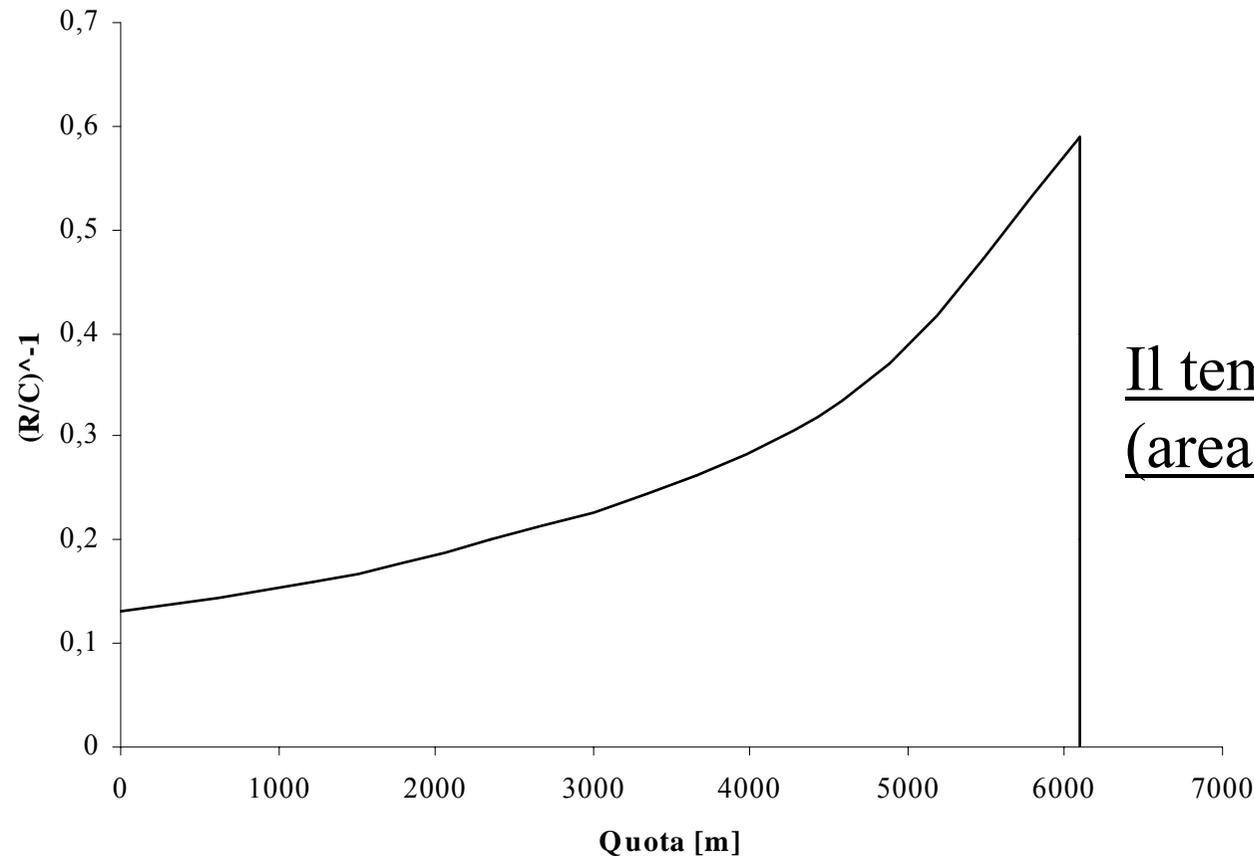
Cap.8 – TEMPO DI SALITA

$$RC = dh/dt \quad dt = \frac{dh}{R/C}$$

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{R/C}$$

$$t = \int_0^{h_2} \frac{dh}{R/C}$$

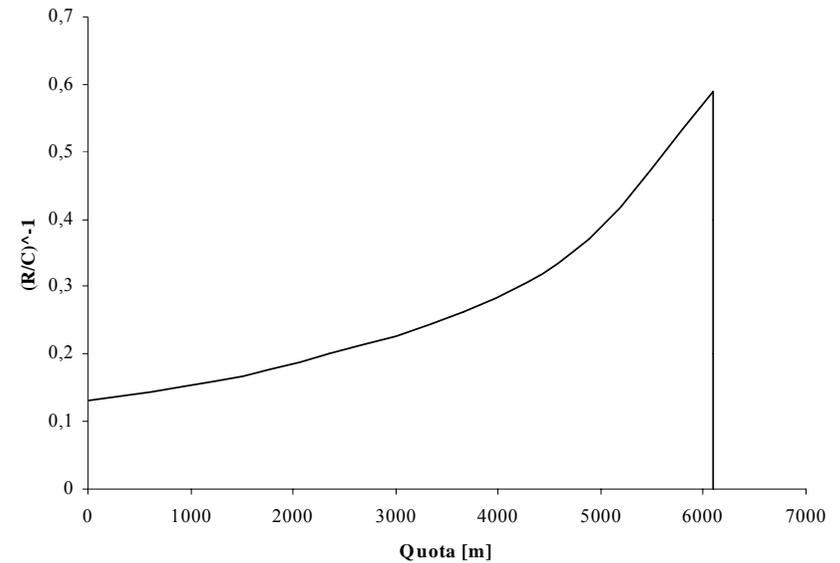
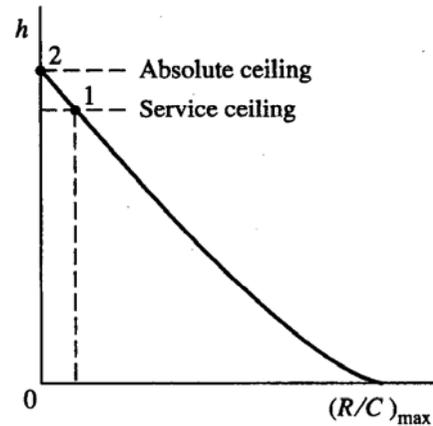
Partendo da S/L



Il tempo è l'integrale
(area sottesa)

Cap.8 – TEMPO DI SALITA

$$t = \int_0^{h_2} \frac{dh}{R/C}$$



Se assumiamo come legge di $RC_{\max}(h)$ una legge lineare:

$$RC_{\max} = a + b \cdot h$$

$$t_{\min} = \int_0^h \frac{dh}{RC_{\max}} = \int_0^h \frac{dh}{a + b \cdot h}$$

$$t_{\min} = \frac{1}{b} [\ln(a + b \cdot h) - \ln(a)]$$

Cap.8 – QUOTA ENERGIA ED ECCESSO DI POTENZA SPECIFICO

Overview

- Energy Height (quota energia)
- Specific Excess Power
- P_s Charts
- Applicazioni
 - Minimo tempo di salita
 - Confronto velivoli

Motivo di H_e e P_s

- Il diagramma V-n mostra i limiti delle prestazioni dei velivoli
- Ad ogni modo, mostra solo una prestazione istantanea. Non si può determinare la sostenibilità di una manovra dal V-n diagram
- Energy height e specific excess power sono una misura di “sustained performance”

Energy Height

Energy Height è misura dell'energia meccanica totale posseduta (potenziale + cinetica) da un velivolo.

$$E = mgh + \frac{1}{2}mV^2$$

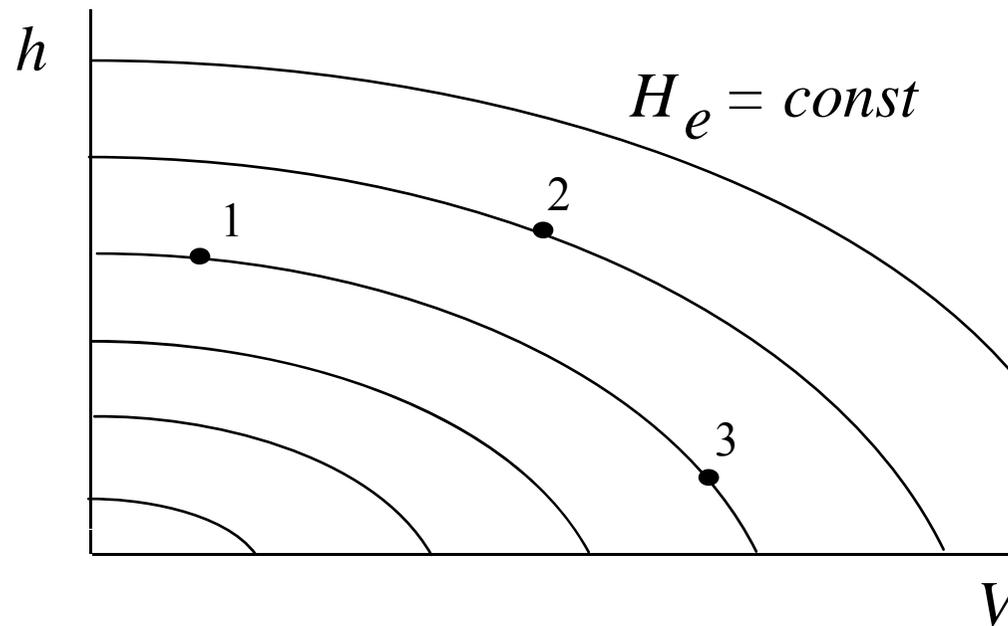
Per confrontare velivoli possiamo normalizzare rispetto al peso(mg).

$$H_e = h + \frac{V^2}{2g}$$

Energy Height

Energy Height

Plot di curve a costante energy height.



E' quello che ogni pilota sa: si può trasformare velocità in quota e viceversa e più si ha di entrambe le cose meglio è !

Specific Excess Power

Un pilota vuole iniziare un combattimento con quanta maggiore energia possibile.

Il velivolo che riesce a cambiare la propria “Energy height” più rapidamente avrà un significativo vantaggio:

Guardiamo la derivata rispetto al tempo di H_e :

$$\frac{dH_e}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt}$$

Questa è una misura della capacità del velivolo di salire e/o accelerare.

Specific Excess Power

$$\begin{aligned}\frac{dH_e}{dt} &\equiv P_s = \frac{dh}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{(T - D)V}{W} \\ &\approx \frac{(T_A - T_R)V}{W} \\ &\approx \frac{P_A - P_R}{W}\end{aligned}$$

*Specific
Excess
Power,
P_s*

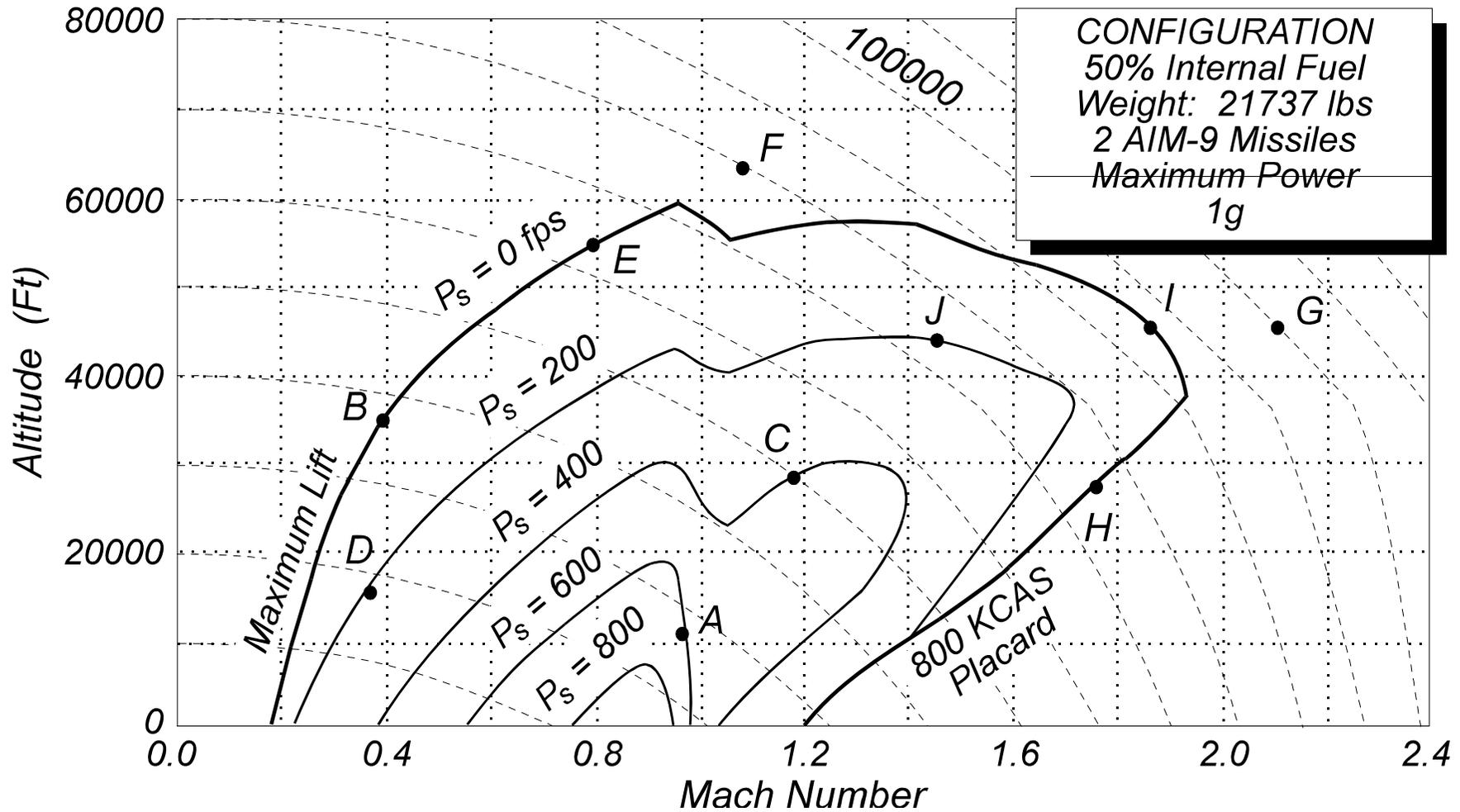
Specific Excess Power

- Se P_s è *positiva*, il velivolo può:
 - *Salire*
 - *Accelerare*
 - *O entrambe le cose*
- If P_s is *negative*, il velivolo può:
 - *Scendere (perdere quota)*
 - *Decelerare*
 - *O entrambe le cose*
- Se $P_s = 0$, il velivolo si stabilizza in volo diritto e livellato, non accelerato.
- Noi plottiamo P_s al di sopra di un plot di He (visto prima) (energy height plot).

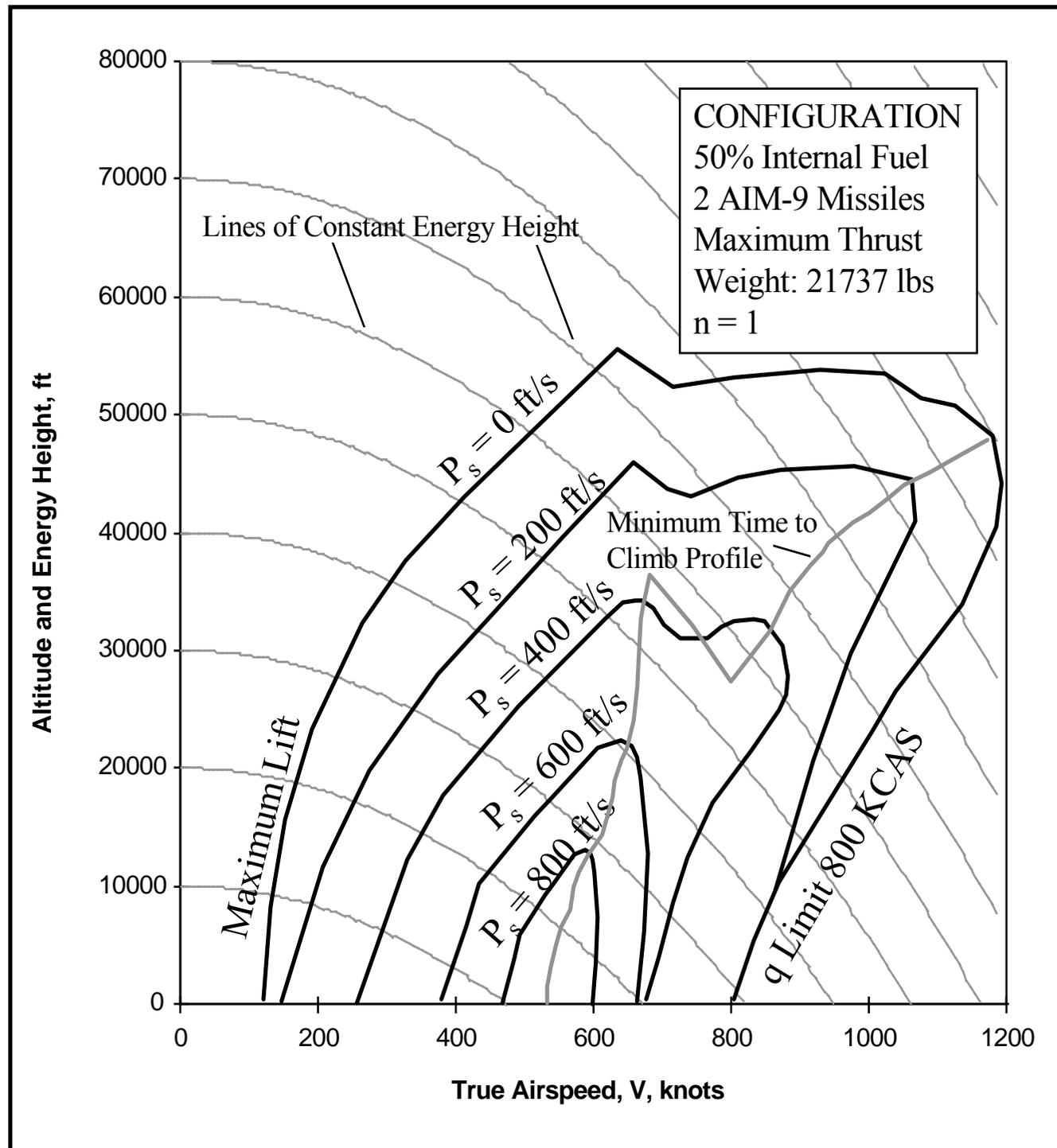
P_s Charts

F-16C

SPECIFIC EXCESS POWER



P_s Charts



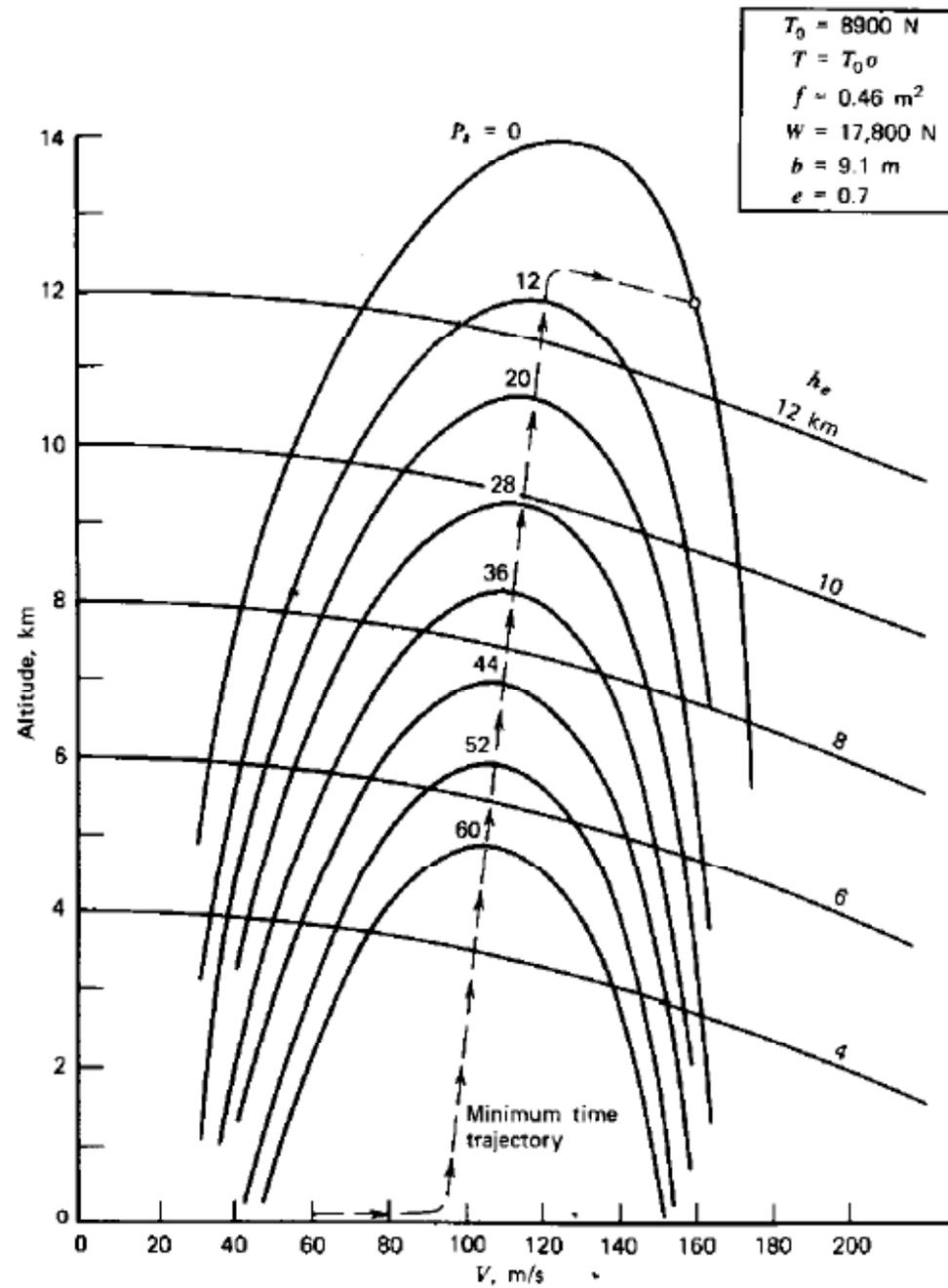


Figure 7.31 Excess specific power and specific energy for a hypothetical subsonic airplane.

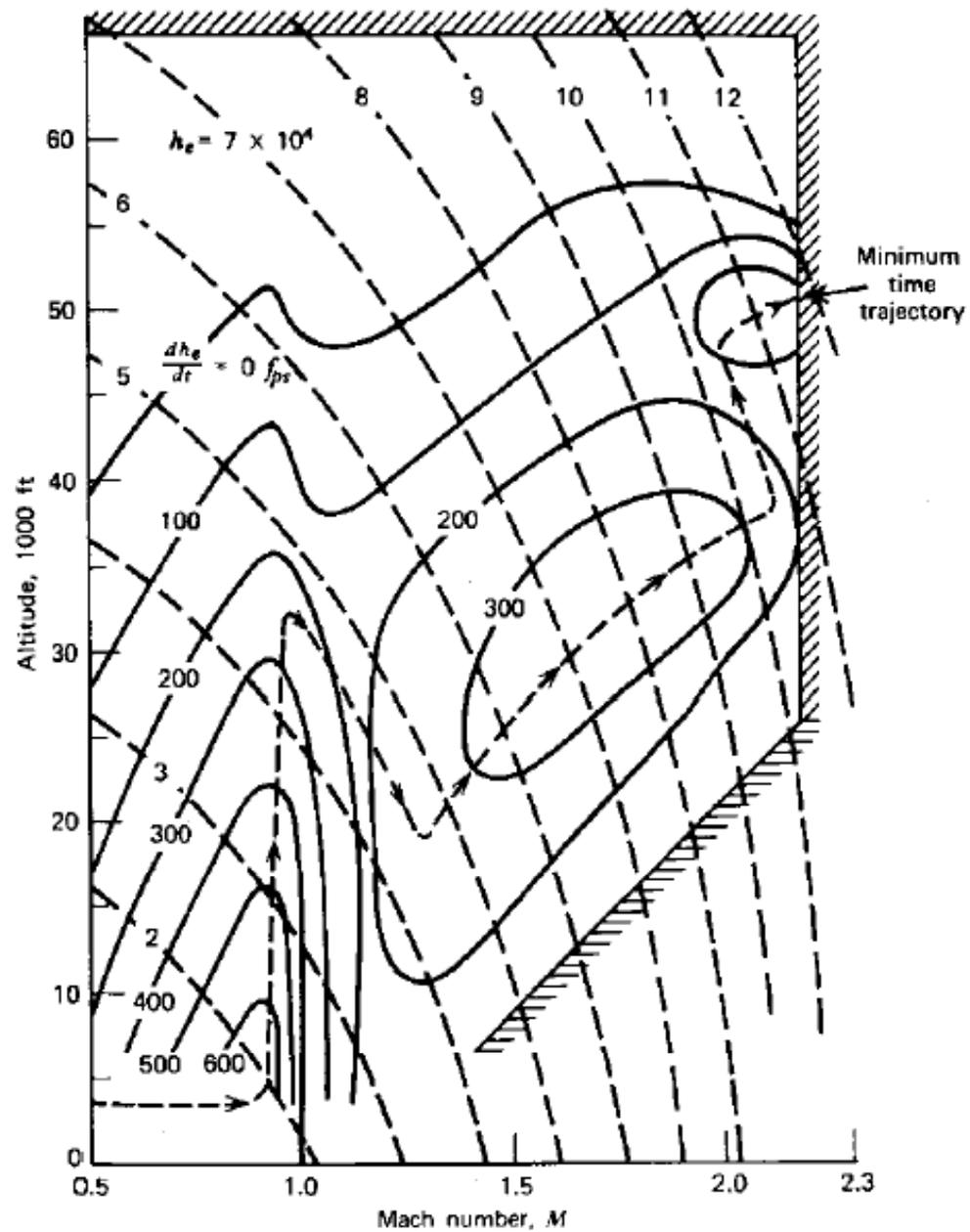


Figure 7.32 Excess specific power and specific energy for the F-104 at maximum power and a weight of 18,000 lb(80,064 N). (L. M. Nicolai, *Fundamentals*

P_s Charts

Un P_s chart è valido per:

- 1 Peso (ad es. 21737 lbs)
 - Se incremento il peso $P_s=0$ contour “shrinks”
- 1 configurazione (ad es. 2 AIM-9 missiles)
 - “Dirty” configuration shrinks plot
- 1 Throttle setting (Maximum power)
 - Lower throttle setting shrinks plot
- 1 Load factor (1 g)
 - Increased “g” shrinks plot

P_s Charts

Che informazioni posso ricavare da un P_s chart?

- Absolute ceilings (subsonic and supersonic)
- Maximum speed
- Maximum “zoom” altitude
- “Reachability” (sinistra di max He)
- Sustainability (On or inside $P_s=0$)

Applicazione: Minimum Time to Climb

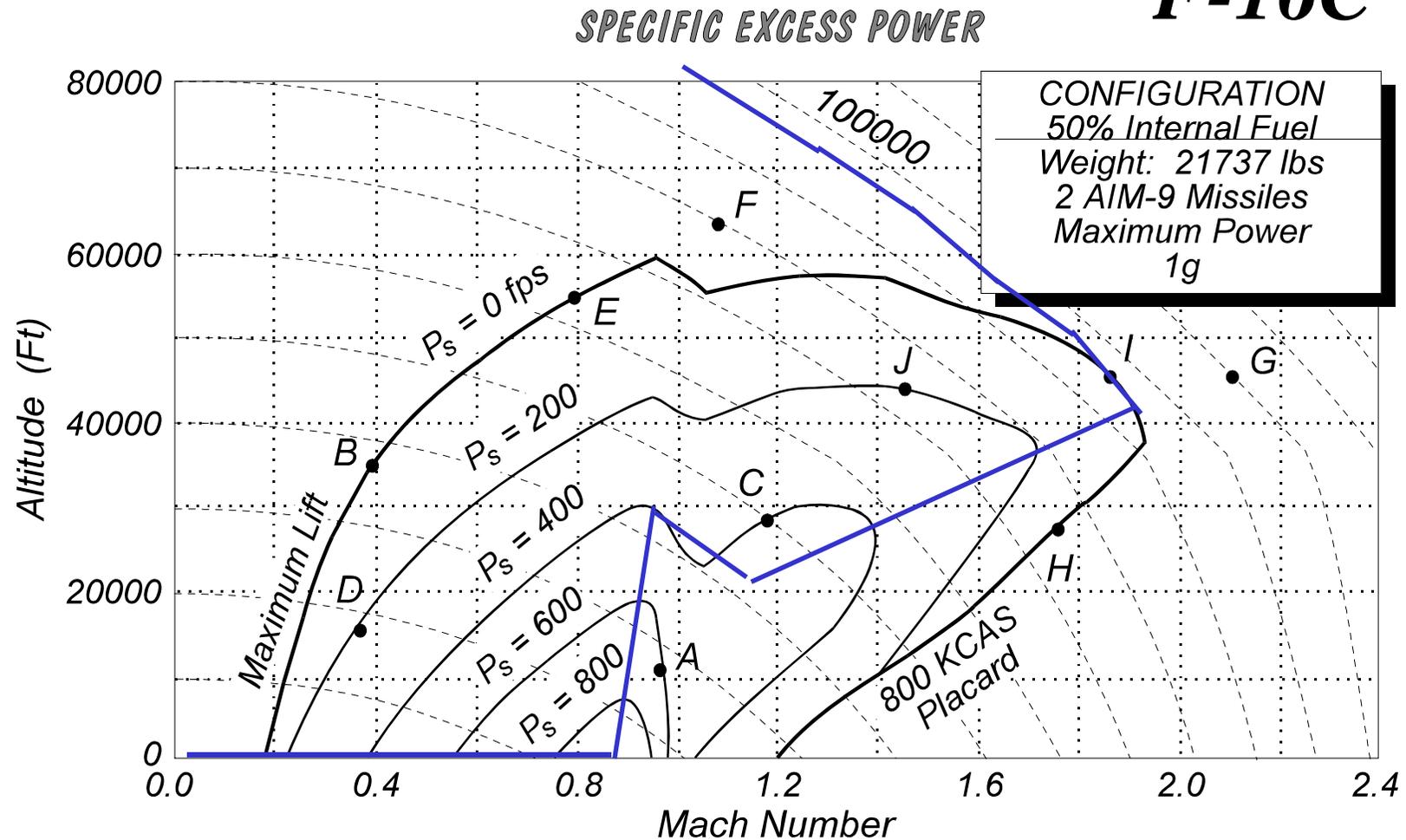
Recall:

$$P_s = \frac{dH_e}{dt} = \frac{dh}{dt} + \frac{V}{g} \frac{dV}{dt}$$

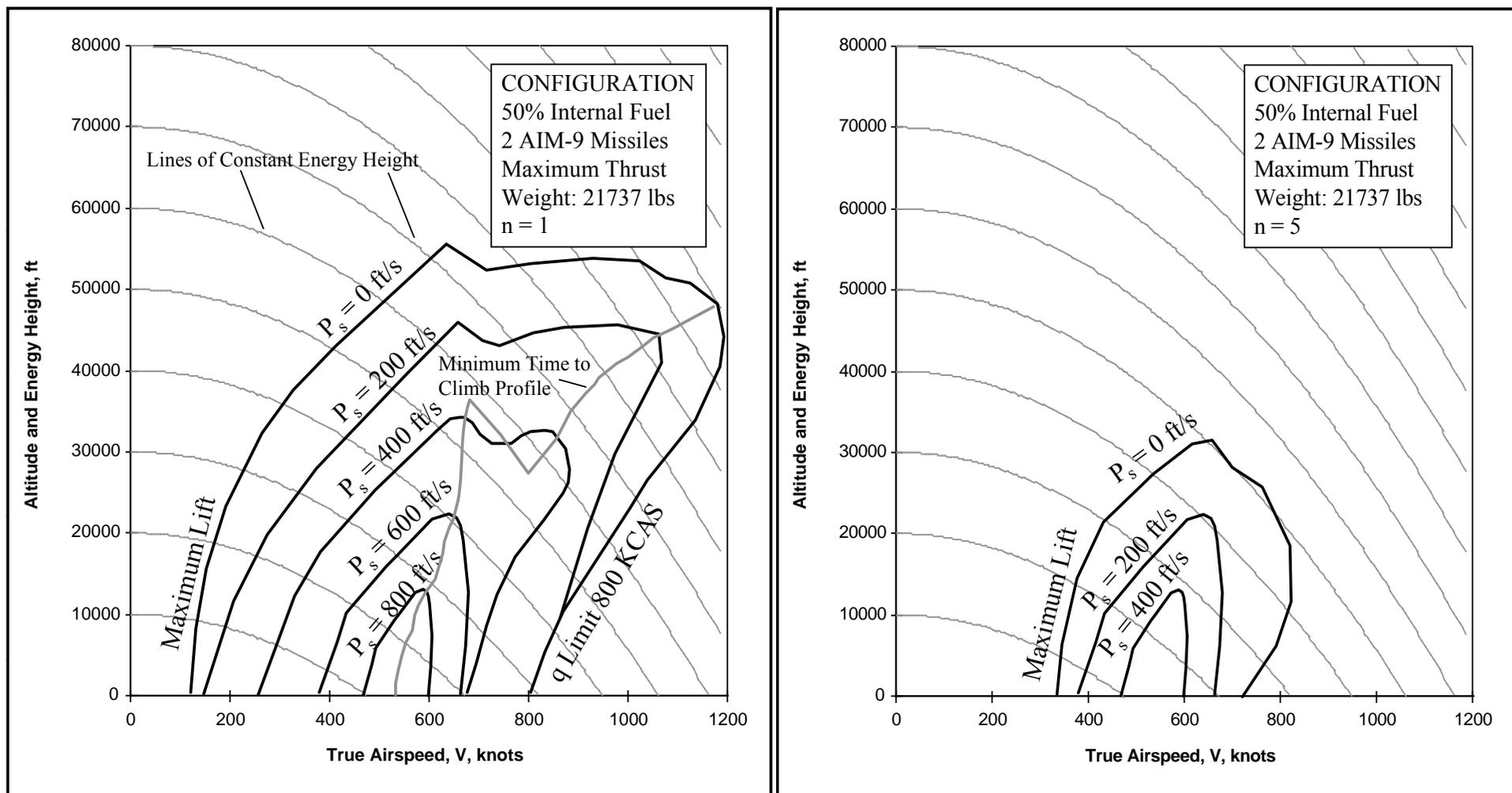
Per ottenere il minimo tempo di salita bisogna massimizzare il climb rate (dH_e/dt). Quindi bisogna attraversare ogni energy height curve (curva a costante H_e) alla massima possibile specific excess power P_s .

Applicazione: Minimum Time to Climb

F-16C



Applicazione: Maneuvering Ps (Come cambia il Ps plot in caso di $n=5$)



Applicazione: Confronto fra velivoli

- Overlay(Sovrapporre) P_s charts per 2 velivoli
- Determinare chi ha un vantaggio
- Dove può volare e come ad esempio un velivolo vuole combattere.
- Tanti altri fattori da considerare

