

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Modulo di PRESTAZIONI

Docente : Prof. Ing. F. NICOLOSI

CAP. 7

**CALCOLO DELLA VELOCITA’
IN VOLO LIVELLATO**

7.1 PRESTAZIONI DI VOLO

Nel capitolo 5 abbiamo trattato le caratteristiche necessarie, cioè il calcolo della spinta o della potenza necessarie al volo livellato.

Nel capitolo 6 abbiamo invece trattato le caratteristiche disponibili, cioè la spinta e la potenza disponibili dall'impianto propulsivo.

Quando si hanno a disposizione i dati geometrici, di massa, aerodinamici e propulsivi di un velivolo possono essere valutate le sue prestazioni.

Dall'analisi effettuata già nel cap. 5, abbiamo visto che si possono scrivere delle equazioni generali del moto di un velivolo nel quale le forze agenti (aerodinamiche e propulsive), insieme alle forze di inerzia (accelerazioni) vanno a costituire un equilibrio istante per istante.

In generale le prestazioni di un velivolo possono essere suddivise in due gruppi : prestazioni in volo non accelerato (cioè senza che ci siano accelerazioni in gioco) e prestazioni in volo accelerato.

Le prestazioni in volo non accelerato (accelerazioni nulle nelle equazioni 5.5, 5.8, 5.11 del cap. 5) di un velivolo sono espresse solitamente dalle seguenti :

PRESTAZIONI IN VOLO NON ACCELERATO

- Velocità massima in volo livellato
- Velocità di crociera (ad un grado di ammissione <1 , ad es. 0.75) in volo livellato
- Velocità di stallo
- Rateo di salita (salita stabilizzata, cioè a velocità sulla traiettoria costante)
- Angolo di salita (“ “)
- Quota di tangenza pratica e teorica
- Tempo di salita
- Volo librato
- Autonomia oraria e di distanza

Mentre quelle in presenza di accelerazioni sono :

PRESTAZIONI IN PRESENZA DI ACCELERAZIONI

- Prestazioni di decollo (corsa di decollo)
- Prestazioni di atterraggio
- Virata
- Manovra nel piano longitudinale (cabrata)

Nei cap. 7,8,9 tratteremo il primo gruppo.

7.2 VOLO LIVELLATO

Le prestazioni in volo livellato si basano sul considerare la condizione di equilibrio in volo $T=D$ ed $L=W$, cioè portanza uguale al peso e spinta uguale alla resistenza aerodinamica.

La fig. 7.1 ripropone quanto già detto nel cap. 5.

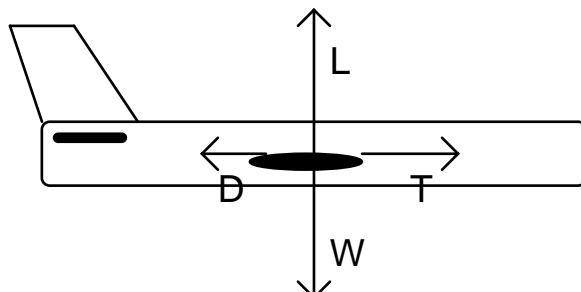


Fig. 7.1

Il calcolo delle prestazioni in volo livellato consiste nel calcolare la velocità alla quale si equilibra l'aereo in corrispondenza di un certo livello di spinta.

Questo corrisponde al fatto che il pilota, ad una certa quota, stabilisce il livello di spinta (o di potenza) dei motori (attraverso la “manetta” o grado di ammissione ϕ) ed il velivolo accelererà fino a stabilizzarsi ad una certa velocità di equilibrio in corrispondenza della quale $T=D$. Ovviamente, per volare in volo livellato la portanza dovrà eguagliare il peso e quindi, in corrispondenza di quella velocità di volo, il velivolo si dovrà trovare ad un assetto (angolo di attacco) tale che

$$L = C_L \cdot q \cdot S = W \quad [7.1]$$

quindi a velocità elevate dovranno corrispondere C_L bassi (assetti meno cabrati) e a velocità basse assetti elevati, come già chiarito nel capitolo 5.

E' chiaro che quindi il problema della valutazione delle prestazioni in volo livellato (crociera o velocità massima) consisterà nel valutare a quale velocità di volo la spinta disponibile (nel caso del getto) o la potenza disponibile (nel caso dell'elica) eguagliano la spinta o la potenza necessaria al volo orizzontale.

Abbiamo visto come i motori dei velivoli a getto (turbogetto puro o turbofan) vengono solitamente caratterizzati dalla spinta T che il motore riesce a fornire in funzione della quota e della velocità di volo. Nei velivoli propulsi ad elica invece la combinazione motore+elica viene solitamente caratterizzata dalla potenza sviluppata all'albero dal motore (alternativo, cioè motoelica o a turbina a gas, turboelica) e tramite l'elica si ottiene poi la potenza propulsiva disponibile pari alla potenza all'albero per il rendimento dell'elica η_P .

Sarà perciò naturale, per il calcolo delle velocità di equilibrio, considerare il diagramma della spinta in funzione della velocità nel caso del velivolo propulso a getto ed il diagramma delle potenze nel caso del velivolo propulso ad elica.

Nella fig. 7.2 è mostrata la curva della potenza disponibile e necessaria per un velivolo a getto quote diverse, mentre in fig. 7.3 sono mostrate le stesse curve per un velivolo ad elica, riportando però la potenza in funzione della velocità e non la spinta..

Nella fig. 7.3 non si è considerato il caso di motore turboelica (vedi cap. 6) altrimenti la potenza sarebbe stata funzione della velocità di volo (effetto ram).

E' chiaro come ad ogni quota, la velocità alla quale si ha l'equilibrio varia. Ovviamente, se la spinta (o la potenza) sono quelle in corrispondenza del massimo grado di ammissione avrò le velocità massime in volo livellato alle varie quote. Se invece il grado di ammissione è quello di crociera (ad es. 0.75) avrò le velocità di crociera alle varie quote.

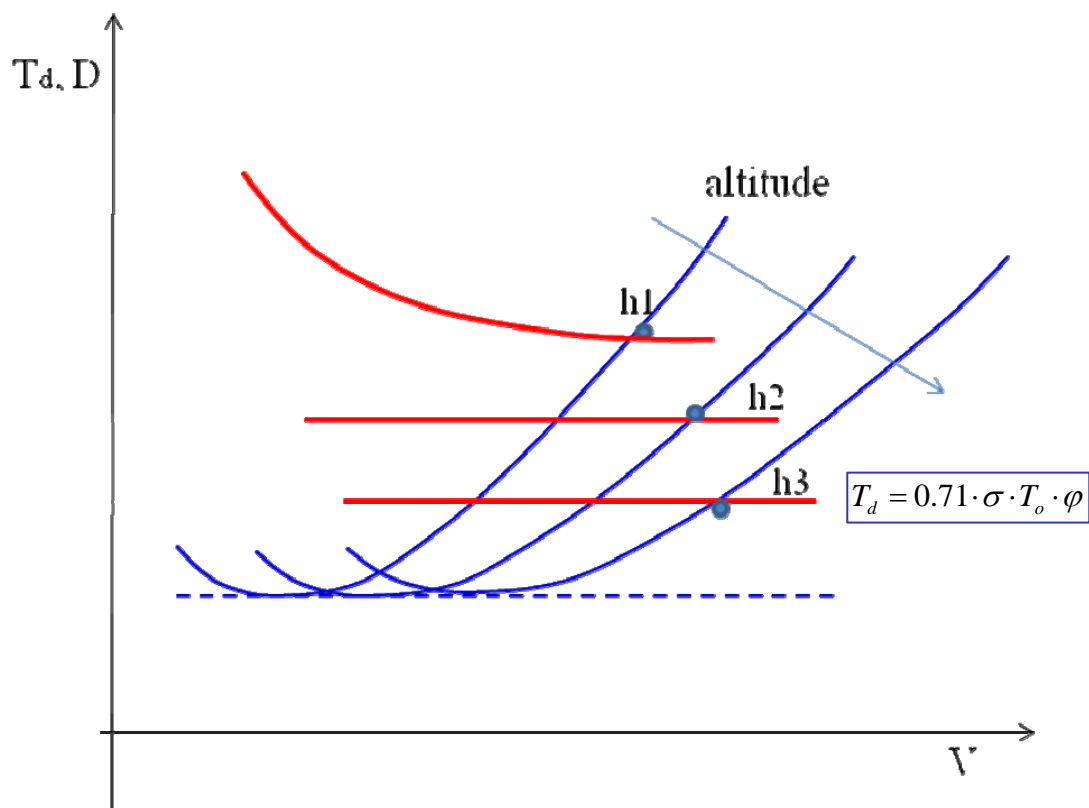


Fig. 7.2 Curve di spinta necessaria e disponibile di un velivolo a getto a varie quote

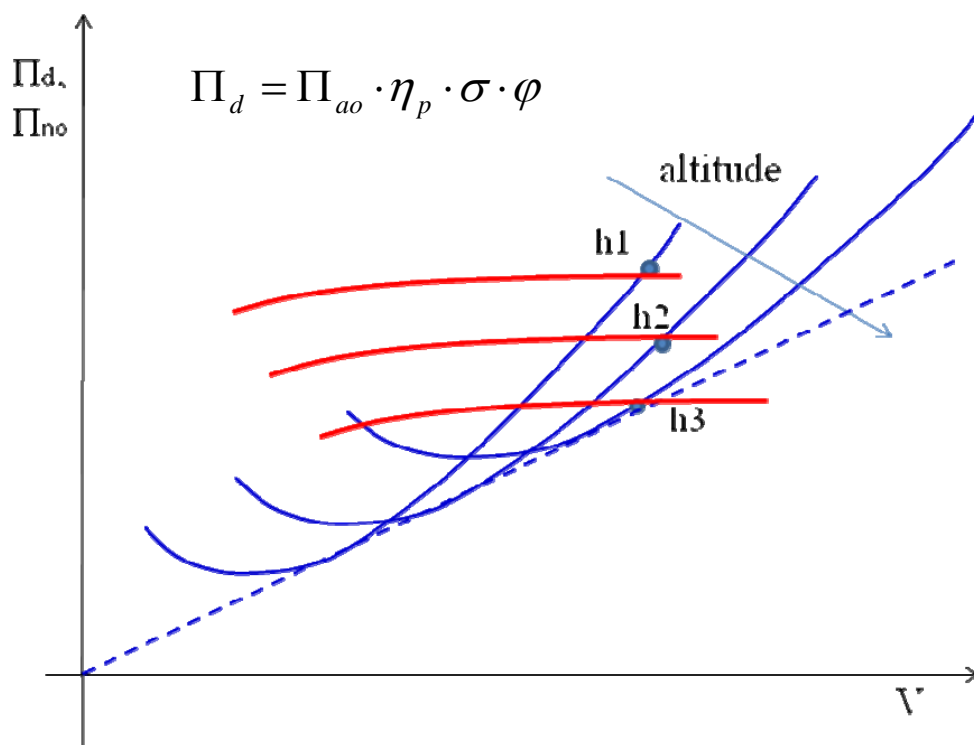


Fig. 7.3 : Curve potenza necessaria e disponibile di un velivolo ad elica a varie quote

E' evidente che se il velivolo ad elica fosse propulso con motore turboelica, le curve di potenza disponibile risentirebbero dell'effetto RAM e la potenza sarebbe variabile con la velocità attraverso il fattore K_v introdotto nel cap. 6.

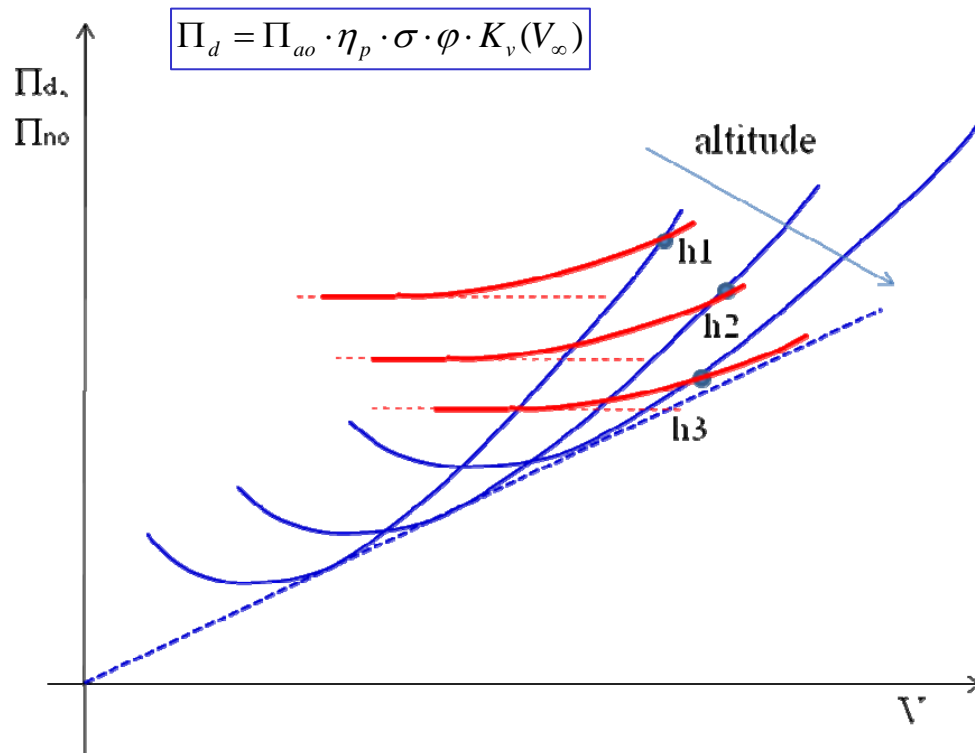
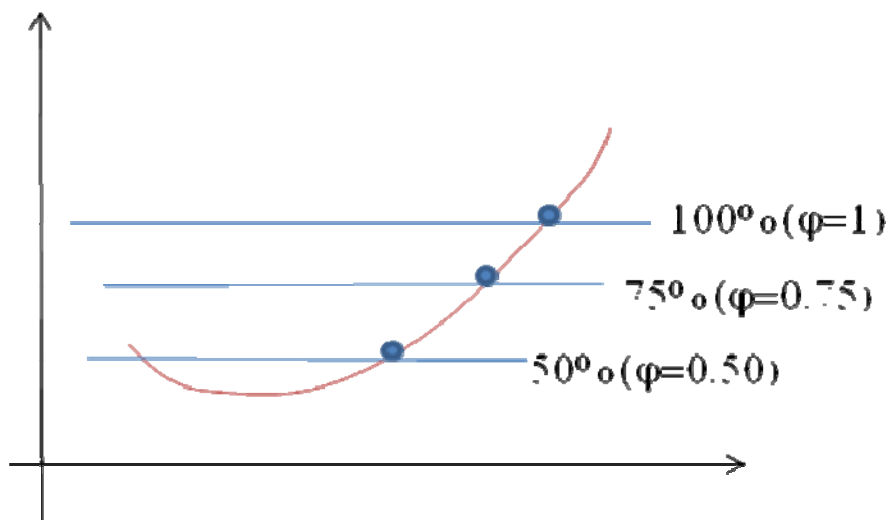


Fig. 7.4 : Curve potenza necessaria e disponibile di un velivolo turboelica a varie quote

Sia nel caso di velivolo a getto, sia nel caso di velivolo ad elica, ad una certa fissata quota, il pilota attraverso la “manetta” o grado di ammissione φ (nei motori alternativi il pilota controlla attraverso il throttle la cosiddetta MAP Manifold Absolute Pressure, cioè la pressione di alimentazione,) può regolare la velocità di volo (vedi figura sotto).



7.3 VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

7.3.1 VELIVOLI A GETTO

Se riportiamo su di un diagramma la curva della spinta necessaria al volo livellato e quella massima disponibile dall'impianto propulsivo in volo potremo ottenere la velocità di equilibrio.

Ad esempio consideriamo il velivolo MD-80 , con i seguenti dati :



$W=W_{TO}=63500 \text{ Kg}$ peso massimo al decollo
 $S=112 \text{ m}^2$ $b=33 \text{ m}$ $AR=9.72$
 $CD_0=0.020$ $e=0.80$ $CL_{MAX}=1.5$

Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 9072 Kg di spinta ciascuno, cioè $T_o=9072 \cdot 2=18144 \text{ Kg}$

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho :

$E_{MAX}=17.5$

Da cui la minima spinta necessaria al volo sarà :

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633 \text{ Kg}$$

Anche se non è dimensionalmente corretto, esprimeremo le spinte in Kg, intendendo Kgf, cioè *Kgforza* (sistema tecnico) perché di più facile comprensione dei Newton.

Dal cap. 6, per il motore turbofan ad alto rapporto di by-pass, consideriamo la spinta ad alta quota costante con la velocità e dipendente dalla quota con la relazione:

$$T = 0.83 \cdot K_{MZ} \cdot T_o \cdot \varphi \quad (\text{MAX CRUISE})$$

Alle alte quote la relazione diventa semplicemente la seguente dove si evidenzia la indipendenza dalla velocità:

$$T = 0.71 \cdot \sigma \cdot T_o \cdot \varphi \quad (\text{setting MAX CRUISE}) \quad [7.2]$$

Dai dati precedenti è possibile calcolare la curva della spinta necessaria a quota 0, ad una quota di 10,000 ed anche alla quota di crociera di 33,000 ft e valutare con le formule ed i modelli proposti, la spinta disponibile alle stesse quote con grado di ammissione =1.

In fig. 7.5 sono riportate le tre curve in funzione della velocità di volo e in fig. 7.6 in funzione del Mach di volo. Si evidenziano le intersezioni che mostrano quindi le velocità di equilibrio.

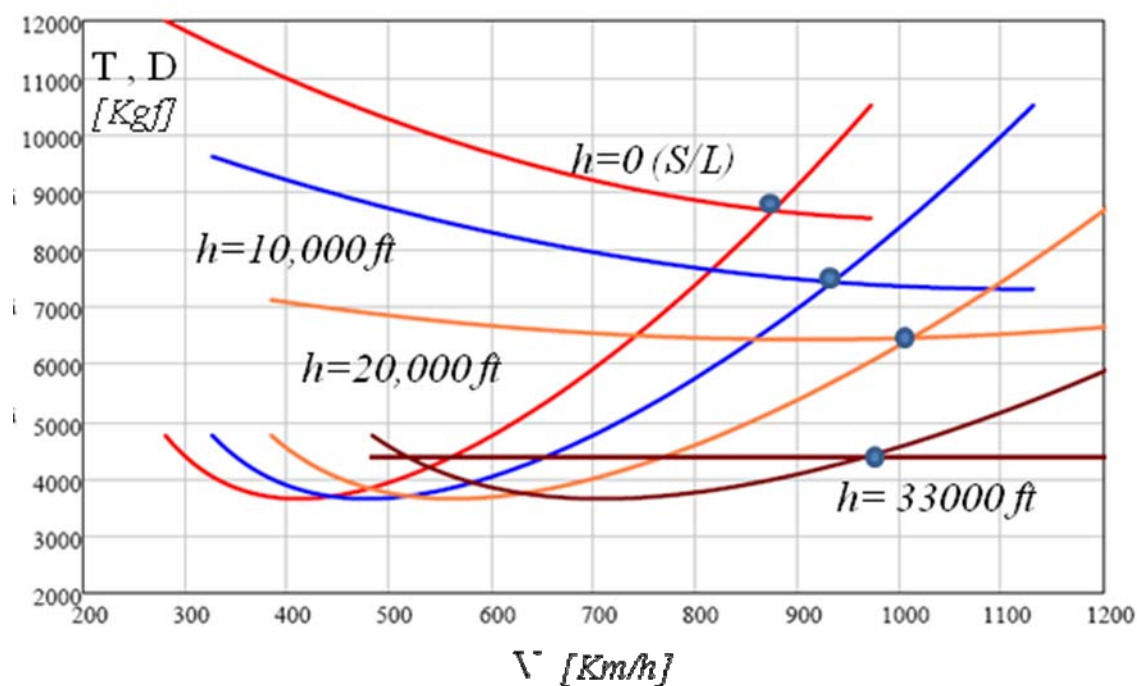


Fig. 7.5 – Curve di resistenza e spinta alle varie quote del velivolo MD-80

Oltre che rappresentare le curve in funzione della velocità (velocità vera, TAS) le curve possono essere riportate anche in funzione del numero di Mach, che per tale velivolo risulta più rappresentativo (si ricorda che il K_{MZ} era funzione del Mach ed inoltre come i fenomeni di comprimibilità sono dipendenti dal numero di Mach).

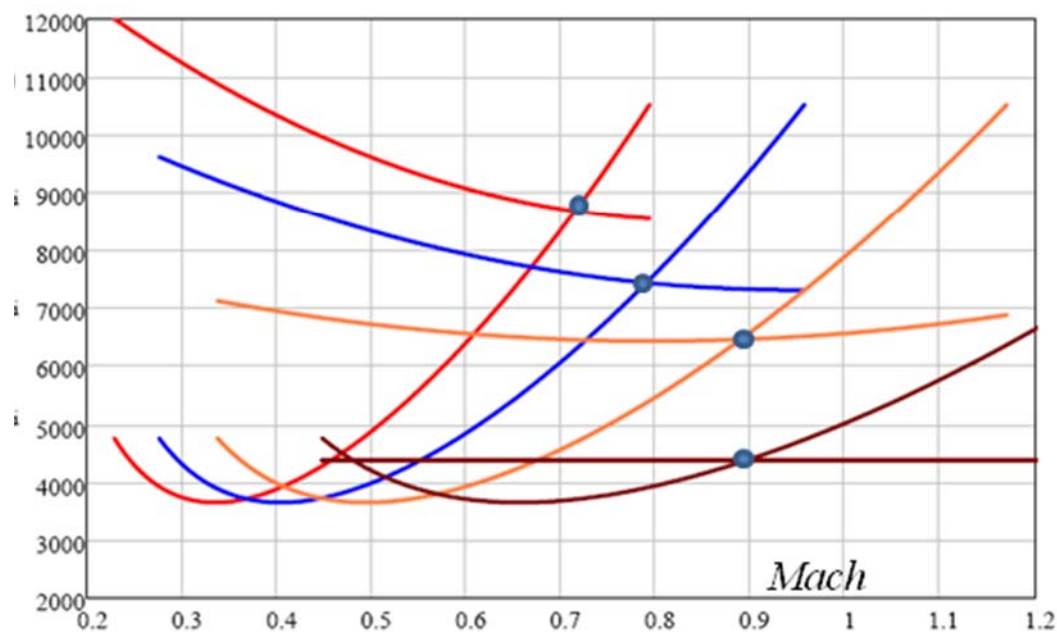


Fig. 7.6 – Curve di resistenza e spinta alle varie quote del velivolo MD-80 in funzione del Mach

Dall'analisi delle curve precedenti si possono quindi valutare le velocità massime in condizioni di crociera in volo livellato ottenibili alle varie quote :

S/L	V=875 Km/h	M=0.72
h=10,000 ft	V=933 Km/h	M=0.78
h=20,000 ft	V=1015 Km/h	M=0.89
h=33,000 ft	V=961 Km/h	M=0.89

Si vede come la spinta necessaria minima non varia al variare della quota e che la spinta disponibile è funzione della quota in dipendenza del rapporto delle densità.

Tutte le curve della spinta necessaria ad ogni quota partono dalla corrispondente velocità minima o velocità di stallo

$$V_s = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{C_{L_{MAX}}}} \quad [7.3]$$

Dalle curve notiamo anche che a quote elevate le intersezioni tra le curve diventano due. Infatti alla quota di 33,000 ft (quote di crociera di velivoli di questo tipo) la curva della spinta massima disponibile (retta orizzontale) interseca sia a sinistra che a destra la curva della spinta necessaria al volo livellato.

Questo significherebbe che ci possono essere due possibili velocità di volo, una alta ed una molto bassa. Questo aspetto è già stato introdotto nel cap.5 e si è chiarito che la velocità di equilibrio del ramo sinistro della curva è una velocità di equilibrio instabile.

In ogni caso noi saremo interessati principalmente alla velocità massima (intersezione ramo destro della curva). E' altresì evidente che l'intersezione sul ramo sinistro delimita la velocità minima di equilibrio, cioè la velocità minima possibile in volo livellato.

Questo a significare che alle quote basse (dove le curve sono distanti sul lato sinistro) la velocità minima è la velocità di stallo data dalla 7.3, ma alle alte la velocità minima di volo livellato corrisponde al secondo punto di equilibrio. Difatti in corrispondenza della velocità di stallo il volo livellato non sarebbe possibile in quanto la spinta richiesta (necessaria) è maggiore di quella disponibile.

Notiamo dalle figure precedenti che alla quota di 33,000 ft la velocità di equilibrio si ottiene ad assetti prossimi a quelli del punto caratteristico A, mentre alle quote più basse il punto di equilibrio corrisponde a velocità maggiori (assetti inferiori a quelli del punto A).

Ovviamente le condizioni di equilibrio si trovano in modo analogo anche sulle curve che esprimono le potenze (necessarie e disponibili) in funzione della velocità di volo alle varie quote (fig. 7.7).

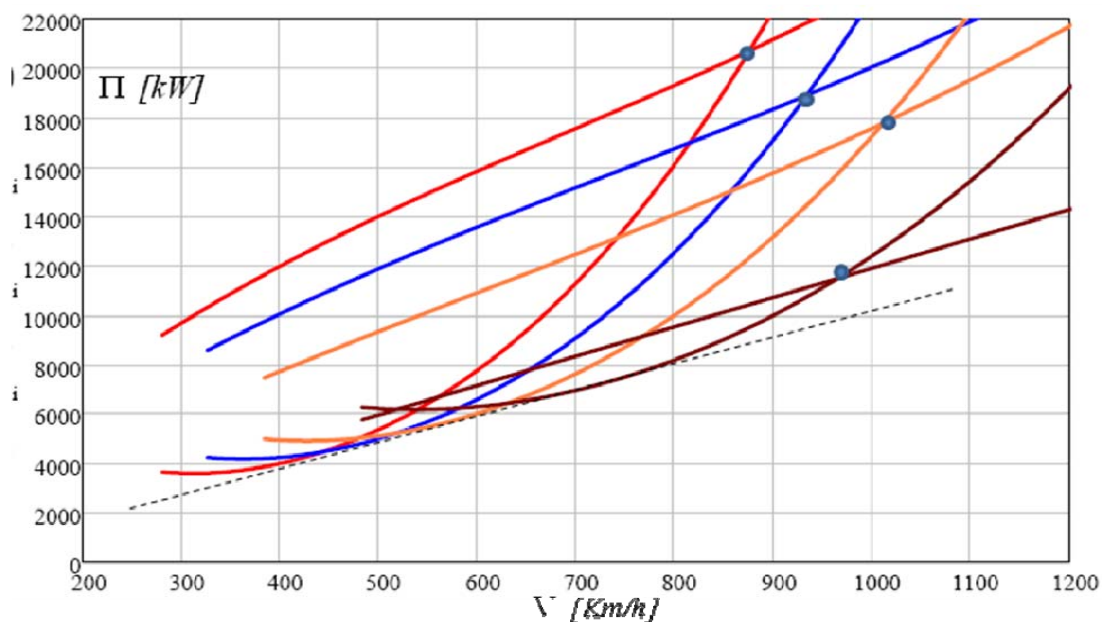


Fig. 7.7 – Curve di potenza necessaria e disponibile alle varie quote del velivolo MD-80 in funzione di V

Notiamo quindi che a quote elevate il numero di Mach di equilibrio risulta particolarmente elevato. Il velivolo MD-80, nella realtà non riesce a volare a tali velocità o tali numeri di Mach.

L'errore consiste nel fatto che la curva di resistenza usata è basata sull'uso della polare parabolica per tutte le velocità. Ben sappiamo invece che, all'aumentare del numero di Mach possono sopraggiungere problemi di resistenza dovuta alle onde d'urto (la resistenza d'onda, *wave drag*) chiarita nel capitolo 4.

E' evidente che se cambiamo il grado di ammissione, cioè consideriamo un volo livellato ma con una manetta inferiore, otterremo delle altre velocità di equilibrio. Infatti si può ad esempio riportare il diagramma corrispondente ad un grado di ammissione dell'80% (cioè $\phi=0.80$) in figura 7.8.

Si nota dalla figura che le velocità ottenute sono ovviamente minori e che addirittura alla quota di 33,000 ft la manetta al 80% non riesce a garantire il volo in quanto la spinta è inferiore alla resistenza minima richiesta. In particolare per la quota di 33,000 ft non ci può essere equilibrio con tale manetta, ciò significa che alla quota di crociera il velivolo potrà volare solo utilizzando una spinta almeno pari al 85-90% della spinta massima.

Alle quote inferiori si ottengono i seguenti punti di equilibrio:

Velocità crociera (80% grado ammissione), da fig. 7.8 :

S/L	V=790 Km/h	M=0.64
h=10,000 ft	V=825 Km/h	M=0.70
h=20,000 ft	V=880 Km/h	M=0.77

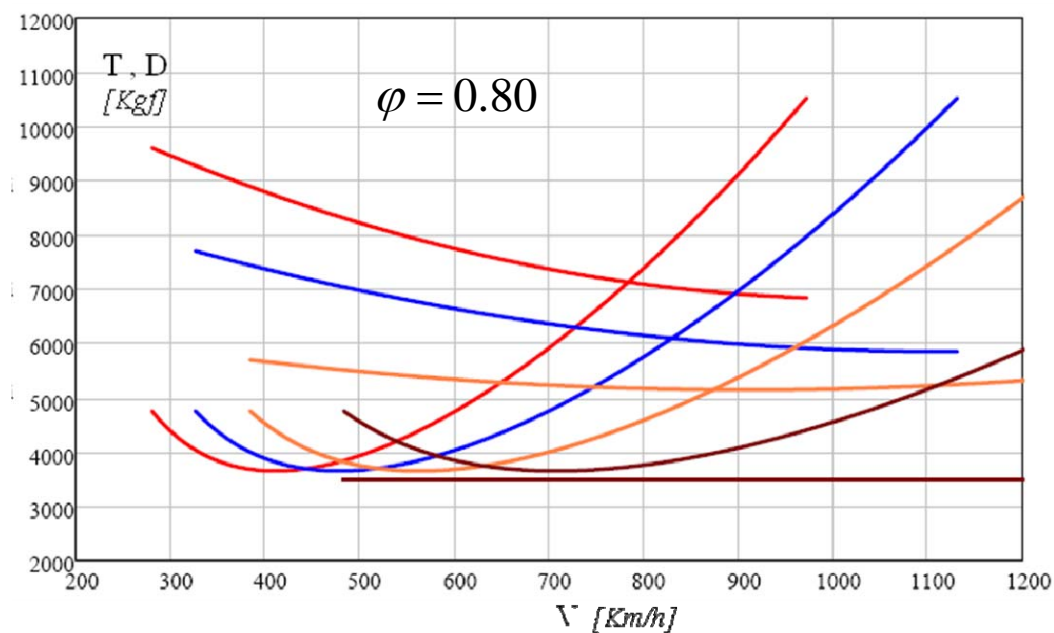


Fig. 7.8 – Curve di resistenza e spinta disponibile (80%) alle varie quote del velivolo MD-80 in funzione di V

Si deve anche osservare che in effetti non si è interessati alle velocità massime alle quote basse.

Un velivolo da trasporto a getto solitamente opera a quote elevate (massima autonomia e migliori velocità di volo) e dopo il decollo continua ad acquistare velocità e nello stesso tempo sale. In definitiva non si trova a transitare a quote basse a velocità elevate (dell'ordine di $M=0.70$). Quindi non si è assolutamente interessati alla valutazione delle prestazioni di velocità massima o di crociera a quota 0 o anche poche migliaia di piedi.

In relazione a quanto detto, assumere la relazione 7.2 (spinta costante) rappresenta una buona assunzione quando si è interessati al calcolo delle prestazioni di volo (velocità massima o di crociera) in crociera dei velivoli da trasporto.

Tornando al problema dei valori di velocità (e di Mach) estremamente elevati ottenuti nel caso di massimo grado di ammissione (fig. 7.6) che portano a valori di mach di volo prossimi ad 1 ad alte quote, dobbiamo quindi rilevare che si è commesso infatti un errore. L'errore consiste nel considerare la resistenza aerodinamica dalla polare parabolica valida anche a valori del numero di Mach di volo superiori a 0.75. Come abbiamo evidenziato nel capitolo 4, infatti per ogni velivolo il coefficiente di resistenza è abbastanza costante fino a valori del mach prossimi al mach critico. Per mach maggiore del mach critico invece bisogna aggiungere la resistenza di comprimibilità (*wave drag*) che porta ad un aumento della resistenza. Giunti a valori del mach apri al cosiddetto mach di divergenza della resistenza si arriva ad una crescita fortissima del coefficiente di resistenza ed a condizioni di “*buffeting*” cioè scuotimenti dell'ala dovuti alla separazione del flusso a valle dell'onda d'urto (o in generale alla interazione onda d'urto-strato limite) che portano a condizioni insostenibili da parte del pilota.

Tutto questo è descritto dal diagramma in figura 7.9:

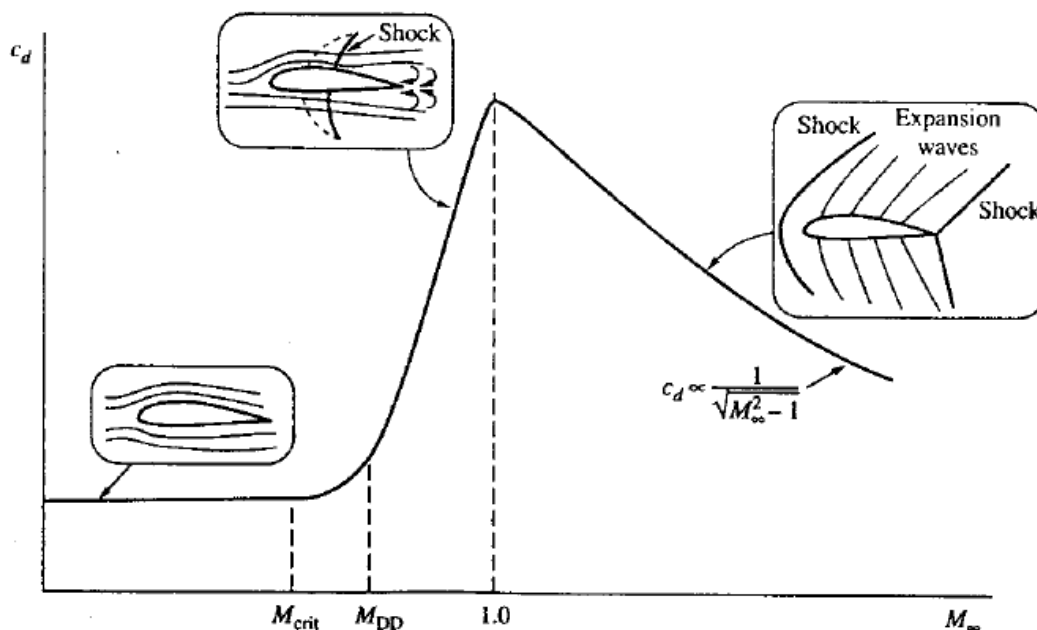


Fig. 7.9 – Coefficiente di resistenza in funzione del numero di Mach. Mach critico e Mach di divergenza della resistenza

In effetti a Mach=0.80 ed oltre siamo in regimi di numeri di Mach (prossimi al valore sonico di 1.0) per i quali le onde d'urto iniziano a diventare molto intense e la resistenza d'onda cresce.

In effetti per ogni velivolo da trasporto a getto esiste un valore del Mach di volo, detto Mach di divergenza della resistenza M_{DD} (compreso tra 0.76 e 0.88 circa e dipendente dal velivolo, dall'angolo di freccia e dal profilo alare) in corrispondenza del quale la resistenza inizia a crescere vertiginosamente, in relazione ad un incremento notevole della resistenza parassita associata alla resistenza d'onda.

E' quindi evidente che la velocità massima a 33,000 ft di 0.89 per il velivolo MD-80 non è accurata, in quanto è valutata dai grafici di pag. 6 considerando il CDo del velivolo costante e pari a 0.020.

Ciò non è corretto, in quanto per valori del Mach maggiori del M_{DD} (che per il velivolo MD-80 è di circa 0.82) il Cdo non è più 0.020 in quanto la resistenza d'onda risulta crescere sensibilmente.

E' quindi chiaro che la curva della spinta necessaria di fig. 7.5 e 7.6 sarà valida sino ad un Mach prossimo al Mach di divergenza.

In effetti è possibile dal diagramma di figura 7.10 stimare il valore del Mach critico sulla base della conoscenza del C_L , dello spessore percentuale del profilo alare (spessore medio tra radice ed estremità dell'ala) e dell'angolo di freccia dell'ala. Il diagramma vale per profili "Peaky". Nel caso di profili supercritici (cioè di forma adatta ad attenuare i problemi connessi con le onde d'urto) il valore va aumentato di 0.03-0.04 e per profili supercritici "aggressivi" molto moderni anche di 0.06. I velivoli da trasporto a getto tipo MD-80 o Boeing B737 sono caratterizzati da valori dello spessore percentuale medio del profilo alare variabili tra il 10 ed il 12% ed angoli di freccia tra i 20 ed i 28 gradi.

Ad esempio dal diagramma sotto, per un velivolo con spessore medio pari al 11% ed angolo di freccia pari a 25 gradi, ad un C_L in crociera pari a 0.40 si avrebbe:

$$(t/c)/\cos\Lambda = 0.121 \quad (C_L)/\cos^2\Lambda = 0.487 \quad \Rightarrow \quad (M_{cc}) \cdot \cos\Lambda = 0.69 \quad \Rightarrow \quad M_{cc} = 0.75$$

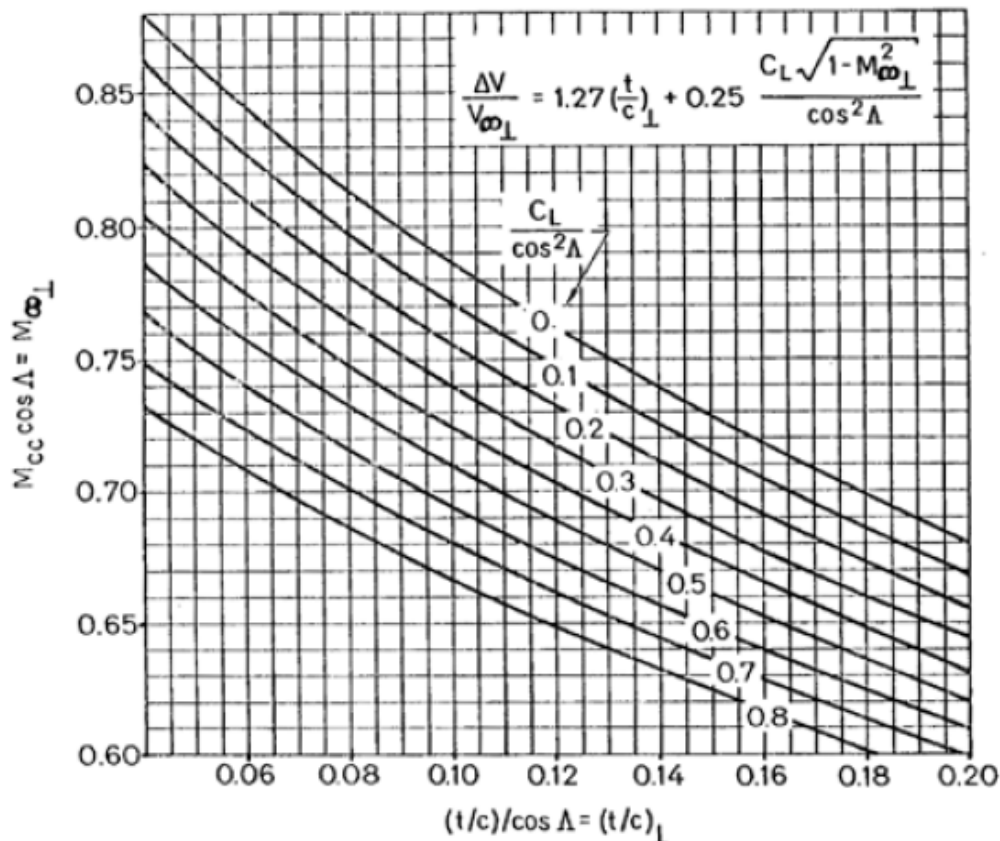


Fig. 7.10 – Determinazione del Mach critico

Se il profilo poi è supercritico il valore del Mach critico sarà maggiorato di 0.04, portandolo a 0.79. Il Mach di divergenza può essere ricavato dalla formula:

$$M_{DD} = M_{CC} \cdot [1.02 + 0.08 \cdot (1 - \cos \Lambda)] \quad [7.4]$$

Che fornisce mediamente un valore del mach di divergenza pari al 3% in più del mach critico, cioè all'incirca $M_{DD} = 1.03 \cdot M_{CC}$ (in tal caso pari a 0.81 circa).

Stimato il mach critico è possibile poi, per ogni punto della curva di resistenza, (assegnata quindi la V ed il corrispondente mach) calcolare l'incremento di resistenza dovuta alla comprimibilità attraverso la curva della figura 7.11. Si evidenzia così che ad una certa quota, per ogni valore della velocità (e quindi per il corrispondente valore del coefficiente di portanza C_L) è possibile stimare dalla 7.10 il Mach critico (sulla base di spessore % e freccia) ed inoltre, dopo aver corretto tale valore per effetto della forma del profilo (0.04 in più per profilo supercritico) si entra nel diagramma di fig. 7.11 e si stima l'incremento di resistenza da applicare.

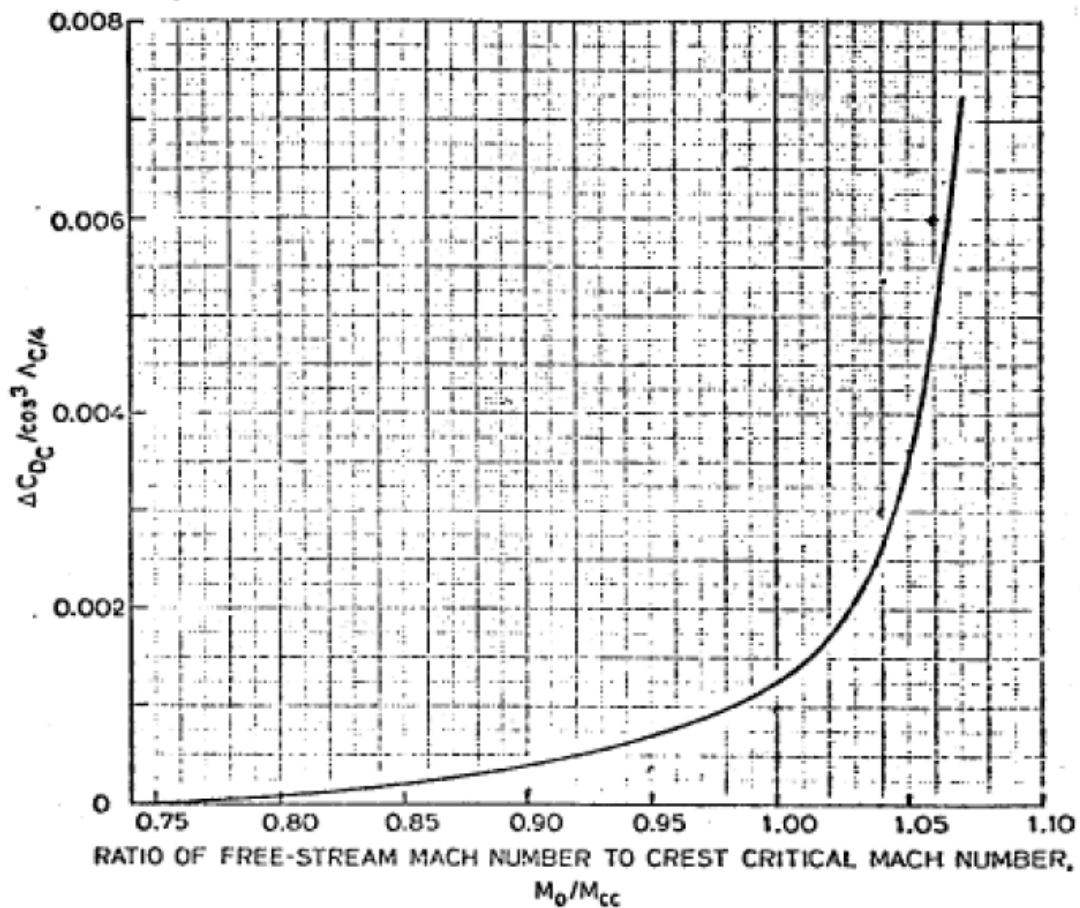


Fig. 7.11 – Determinazione dell'incremento di resistenza (resistenza d'onda) ad alti numeri di Mach

La procedura, permette in effetti di calcolare le polari di resistenza del velivolo per valori di Mach elevati, valutando gli effetti della comprimibilità. Ad esempio, applicando la procedura ad ogni valore del C_L , e per ogni Mach, sarebbe quindi possibile ottenere le curve di resistenza (le polari di resistenza) come in figura 7.12.

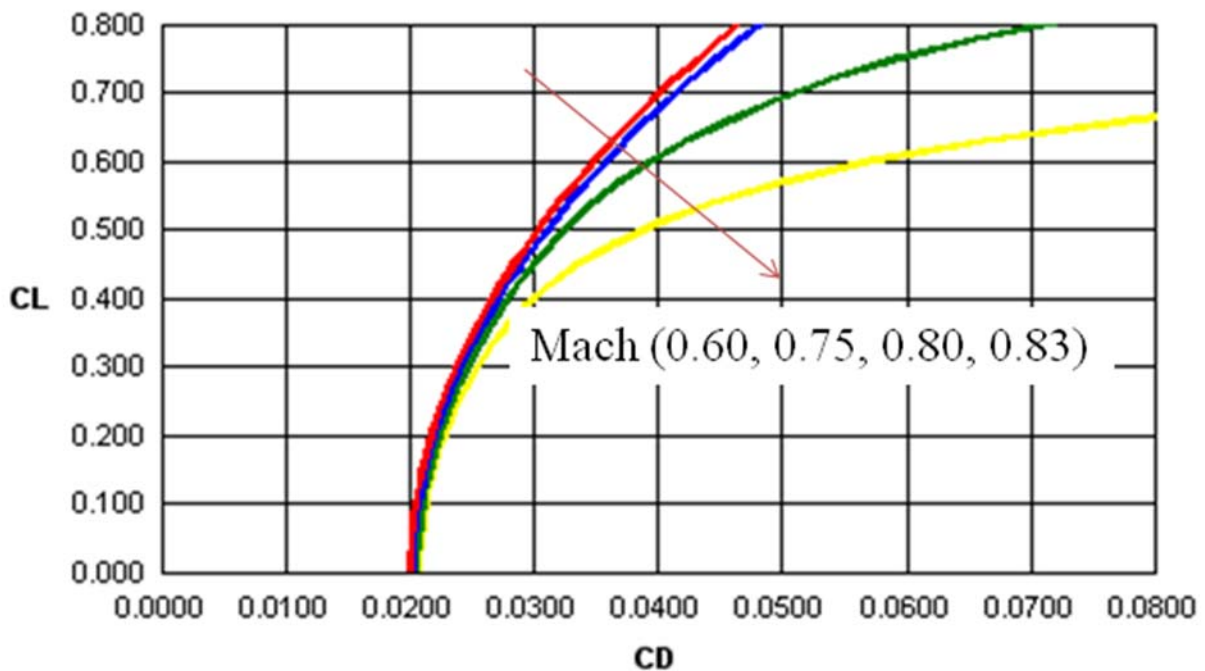


Fig. 7.12 – Polari di resistenza del velivolo MD-80 a Mach elevati

Applicando la procedura descritta prima (o equivalentemente la lettura del coefficiente di resistenza dalle curve polari ad ogni Mach), si ottengono delle curve di resistenza diverse da quelle di figura 7.6, che evidenziano la non validità dell'andamento relativo alla polare di resistenza parabolica per mach elevati. Nella figura sono riportati con linea tratteggiata gli andamenti della resistenza alle quote considerate con l'ipotesi inizialmente considerata di polare parabolica (assenza resistenza d'onda). Si vede come alla quota di 33,000 ft la velocità massima ottenibile con l'andamento reale è di poco superiore a 0.80 e non 0.89 come si evidenzia dalla intersezione della spinta disponibile con la curva di resistenza senza effetti di comprimibilità (risultato precedente).

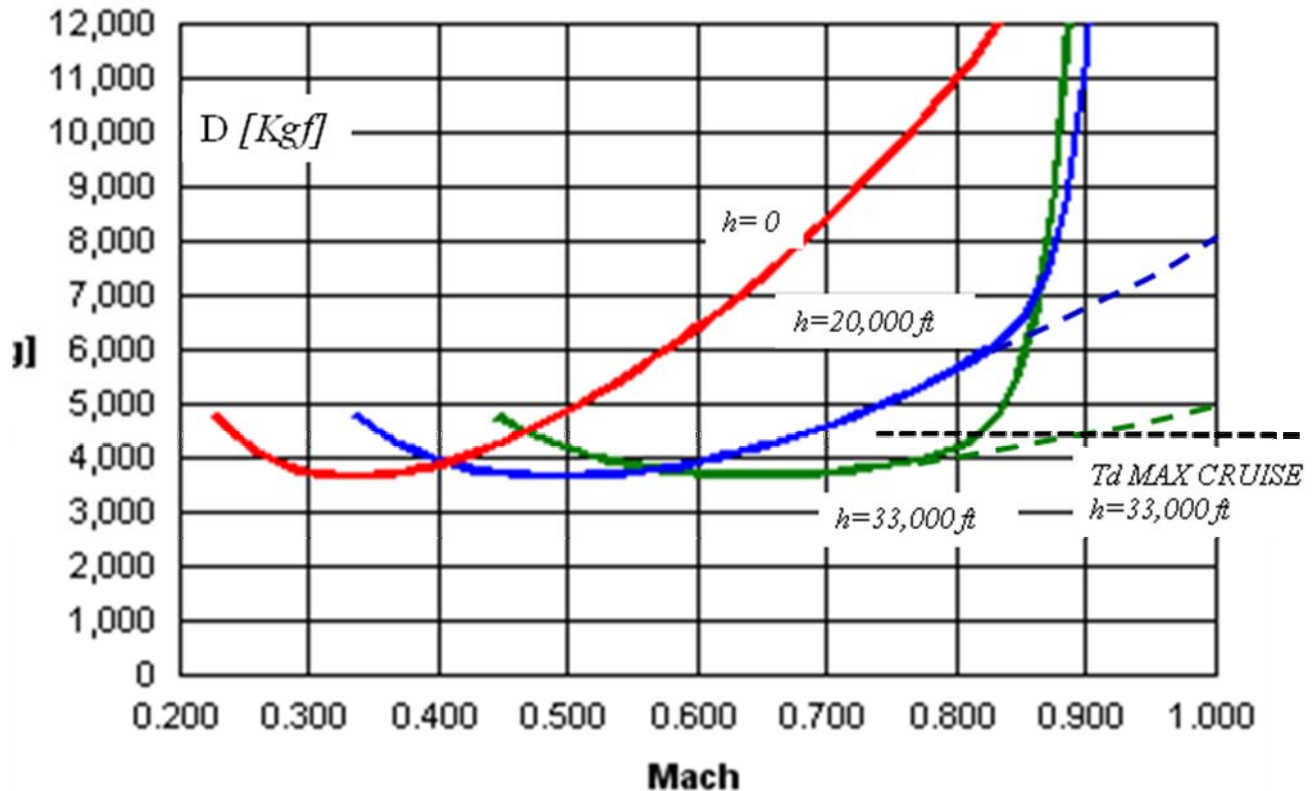


Fig. 7.13 – Curva di resistenza reale del velivolo MD-80 a Mach elevati (con effetti di comprimibilità)

Per avere un modo efficace e più rapido di stima della curva di resistenza reale si può adottare il seguente approccio approssimato.

Si può supporre che la curva di resistenza rimanga sostanzialmente invariata fino a Mach pari al mach di divergenza e successivamente si può adottare un andamento della resistenza che cresce linearmente con il numero di Mach (per $M > M_{DD}$) con andamento anche abbastanza ripido.

In particolare la relazione approssimata consiste nel considerare, per $M > M_{DD}$, un incremento della resistenza pari a 1.4 volte la resistenza a M_{DD} , chiamiamola D_{DD} , per ogni 0.1 di incremento di Mach da M_{DD} , cioè la relazione:

$$\boxed{T_{no} = D = D_{DD} + D_{DD} \cdot 14 \cdot (M - M_{DD})} \quad [7.5]$$

per $M > M_{DD}$

Avendo indicato con D_{DD} la resistenza (relativa alla polare parabolica) in corrispondenza del Mach di divergenza M_{DD} . Come si vede la relazione 7.4 fornisce un incremento di 1.4 volte di D_{DD} in corrispondenza di un incremento $(M - M_{DD}) = 0.10$.

Il tutto è descritto dal grafico di figura 7.14 alla pagina seguente.

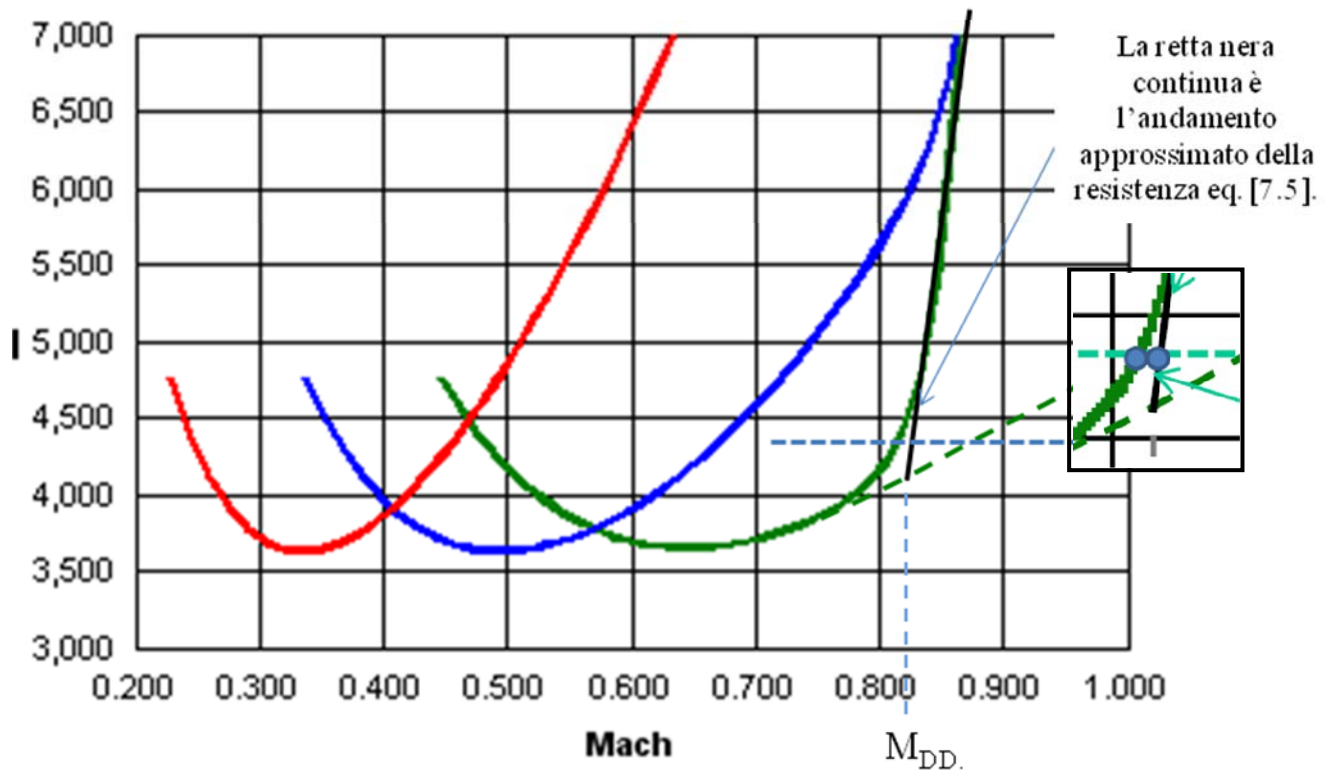


Fig. 7.14 – Curva di resistenza reale del velivolo, andamento approssimato lineare (eq. 7.5).

Si vede graficamente che la velocità massima con la relazione approssimata lineare risulterebbe pari a $M=0.817$, avendo assunto un valore di mach di divergenza pari a $M_{DD}=0.81$. Il valore di velocità ricavabile dall'analisi della curva reale risulta solo di poco inferiore (circa 0.81), come si vede proprio dalla figura 7.14 sopra. Nel caso quindi del velivolo MD-80, avendo assunto $M_{DD}=0.81$, a quota di 33,000 ft la velocità massima (100% ammissione) sarà pari a 0.817 e non 0.89 come risultava dalla considerazione della curva di resistenza senza effetti di comprimibilità (curva di resistenza a 33,000 ft tratteggiata in figura 7.14).

Negli esercizi che verranno svolti e saranno parte del corso, il Mach di divergenza M_{DD} del velivolo viene assegnato come dato di input (compreso generalmente tra 0.80 e 0.86 per velivoli da trasporto a getto e generalmente pari a 0.81-0.84).

Vedremo successivamente, con l'approccio analitico (calcolo effettuato tramite formule), che si arriverà allo stesso risultato trovato qui per via grafica.

7.3.2 VELIVOLO AD ELICA

L'approccio grafico può fornire la velocità di equilibrio anche per i velivoli ad elica.

In questo caso considereremo il diagramma delle potenze.

Anche qui assumiamo dei dati relativi ad un certo velivolo ad elica.

Consideriamo un velivolo bimotore ad elica (da 8-10 posti) (Beechcraft KingAir C90A) caratterizzato dai seguenti dati :

W=4380 Kg peso massimo al decollo
 S= 27.3 m² b=15.3 m AR=8.57
 CDo=0.026 e=0.78 CL_{MAX}=1.6

2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero , cioè

$$\Pi_o = 2 \cdot 550 = 1100 \text{ hp}$$

I motori sono turboelica.

Rendimento propulsivo delle eliche $\eta_p=0.80$

Svolgimento

Calcoliamo le curve delle potenze necessarie e disponibili alle varie quote.

Assumiamo per il calcolo le seguenti quote : S/L, 6000 ft e 12000 ft (crociera).

E' chiaro che la curva della potenza necessaria va calcolata con il procedimento esposto nel cap. 5, quindi :

Ad ogni quota :

per ogni velocità (a partire dalla velocità minima corrispondente con la velocità di stallo a quella quota, sempre data dalla equazione 7.3) :

- calcolo la pressione dinamica q
- calcolo il CL
- calcolo il CD
- calcolo $D=q S C_L$
- calcolo $\Pi_{no}=D \cdot V$

Per quanto riguarda la potenza disponibile, si assume elica a passo variabile, quindi rendimento costante con la velocità.

Faremo inizialmente l'approssimazione di considerare anche la potenza all'albero costante con la velocità (ricordiamo che per la turboelica non è così ma vale la relazione riportata nel cap.6 che fornisce una variazione parabolica della potenza all'albero per effetto RAM).

La potenza disponibile sarà quindi data dalla relazione assunta per i motori a pistoncini cioè :

$$\Pi_d = \Pi_o \cdot \phi \cdot \sigma \cdot \eta_p \quad (7.6)$$

Calcoliamo ora :

$$E_{MAX}=14.21$$

La minima resistenza del velivolo in volo livellato risulterà pari a

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} = 302.5 \text{ Kg}$$

La V_E a quota 0 sarà $V_E=210.3 \text{ Km/h}$

Si possono calcolare i valori di D e V per il punto E e P :

$$D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{W}{E_{MAX}} = 349.3 \text{ Kg}$$

$$V_P = V_E / \sqrt[4]{3} = V_E / 1.32 = 160 \text{ Km/h}$$

La minima potenza a quota 0 sarà :

$$\Pi_{MIN} = \Pi_P = D_P \cdot V_P = 349 \cdot 9.81 \cdot 160 / 3.6 = 152164 \text{ W} = 152 \text{ KW} = 204 \text{ hp}$$

Ovviamente il valore della potenza minima sarà diverso alle altre quote per l'effetto dell'aumento della V_P al crescere della quota.

Nella fig. 7.15 è riportata la curva della efficienza aerodinamica in funzione della velocità di volo alle 3 quote.

Nelle figure 7.16, 7.17 riporto le curve che rappresentano la spinta e la potenza necessaria e disponibile (massima disponibile, cioè $\phi=1$) alle 3 quote precedentemente citate.

Le velocità massime di volo livellato sono evidenziate dai punti neri nel diagramma delle potenze.

Si vede come le velocità massime di volo sono dell'ordine dei 400 Km/h.

Più precisamente troviamo le seguenti velocità massime :

S/L	$V_{MAX}=402 \text{ Km/h}$
6000 ft	$V_{MAX}=398 \text{ Km/h}$
12000 ft	$V_{MAX}=391 \text{ Km/h}$

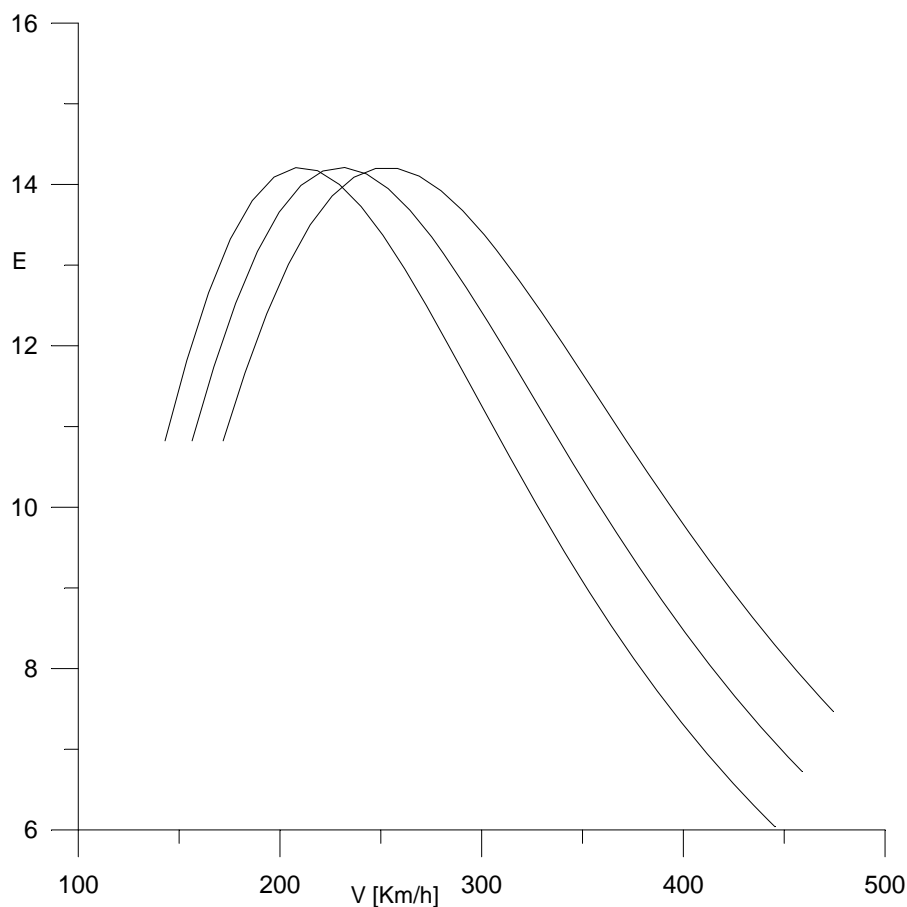
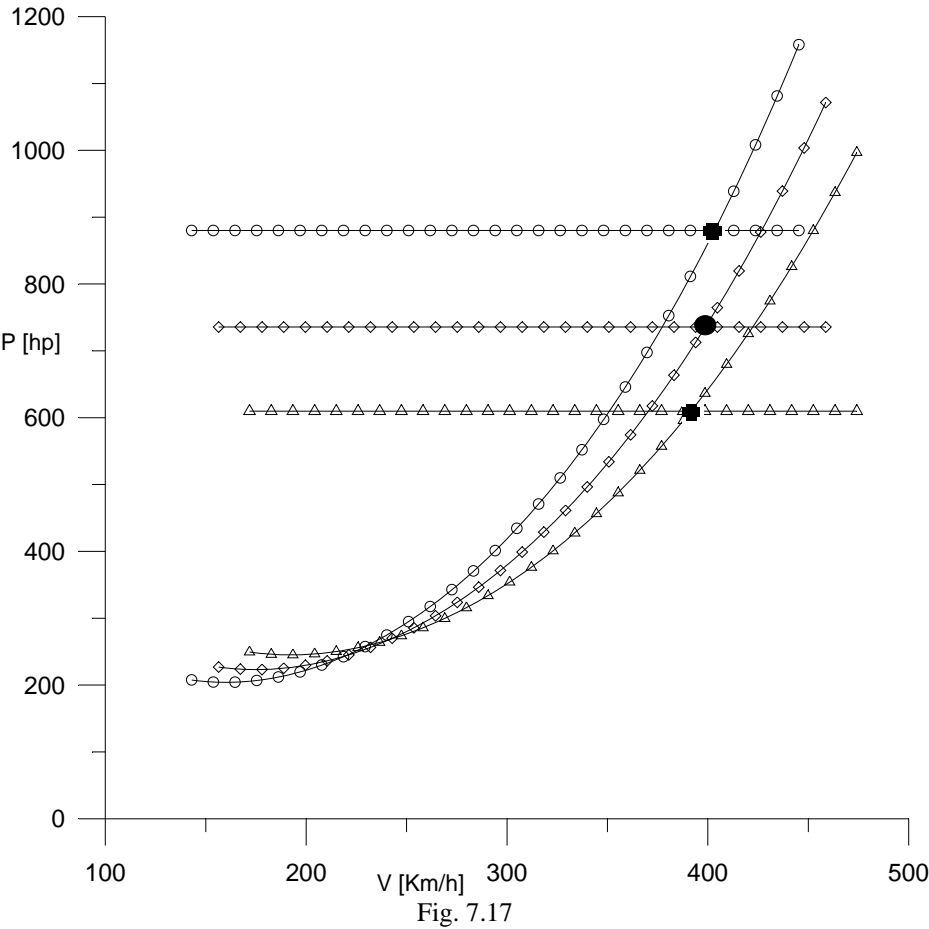
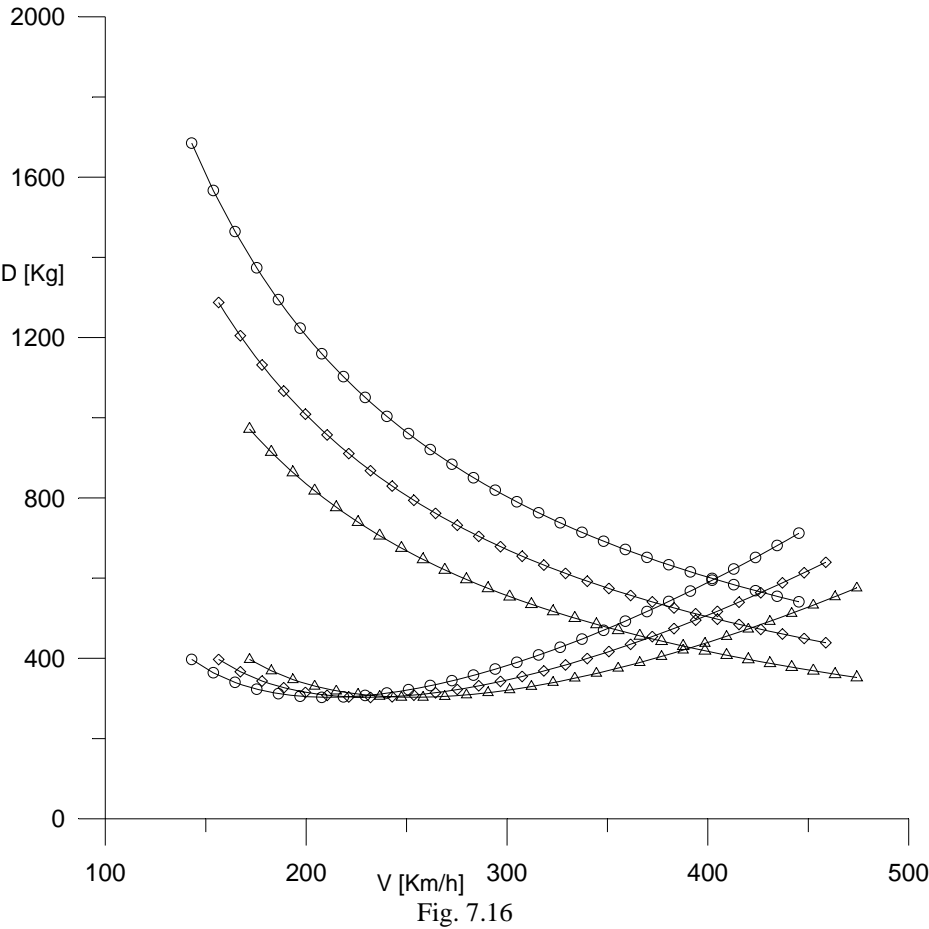


Fig. 7.15



I calcoli effettuati risentono della approssimazione di aver considerato la potenza all'albero costante con la velocità. In realtà, come sappiamo il motore turboelica fornisce una potenza variabile con V con legge parabolica (vedi cap.6).

Considerando la potenza disponibile corretta(cioè variabile), per il velivolo in esame si ottengono le curve di potenza della fig. 7.18.

Dall'analisi grafica delle nuove curve si ottengono le seguenti velocità massime :

VELOCITA' MASSIME IN VOLO LIVELLATO – Potenza disponibile variabile (turboelica)

S/L	$V_{MAX}=421$ Km/h
6000 ft	$V_{MAX}=413$ Km/h
12000 ft	$V_{MAX}=407$ Km/h

Come si vede, considerando la potenza all'albero di un turboelica e non di un equivalente motore a pistoni si ottiene una velocità massima circa 5% più elevata.

Vedremo come anche nell'analisi analitica può essere tenuto in conto il fatto che il motore è turboelica. Ovviamente, se consideriamo un grado di ammissione pari a 0.75, cioè $\phi=0.75$, possiamo trovare le velocità di crociera (al 75% della potenza) alle 3 quote.

Il diagramma di fig. 7.19 mostra le curve delle potenze disponibili al 75% della potenza, con le stesse curve per le potenze necessarie alle 3 quote.

Dal grafico possono quindi essere ricavate anche le velocità di equilibrio massime in corrispondenza del 75% del grado di ammissione per via grafica:

VELOCITA' DI CROCIERA (AL 75% DELLA POTENZA) IN VOLO LIVELLATO

S/L	$V_{MAX}=378$ Km/h
6000 ft	$V_{MAX}=372$ Km/h
12000 ft	$V_{MAX}=359$ Km/h

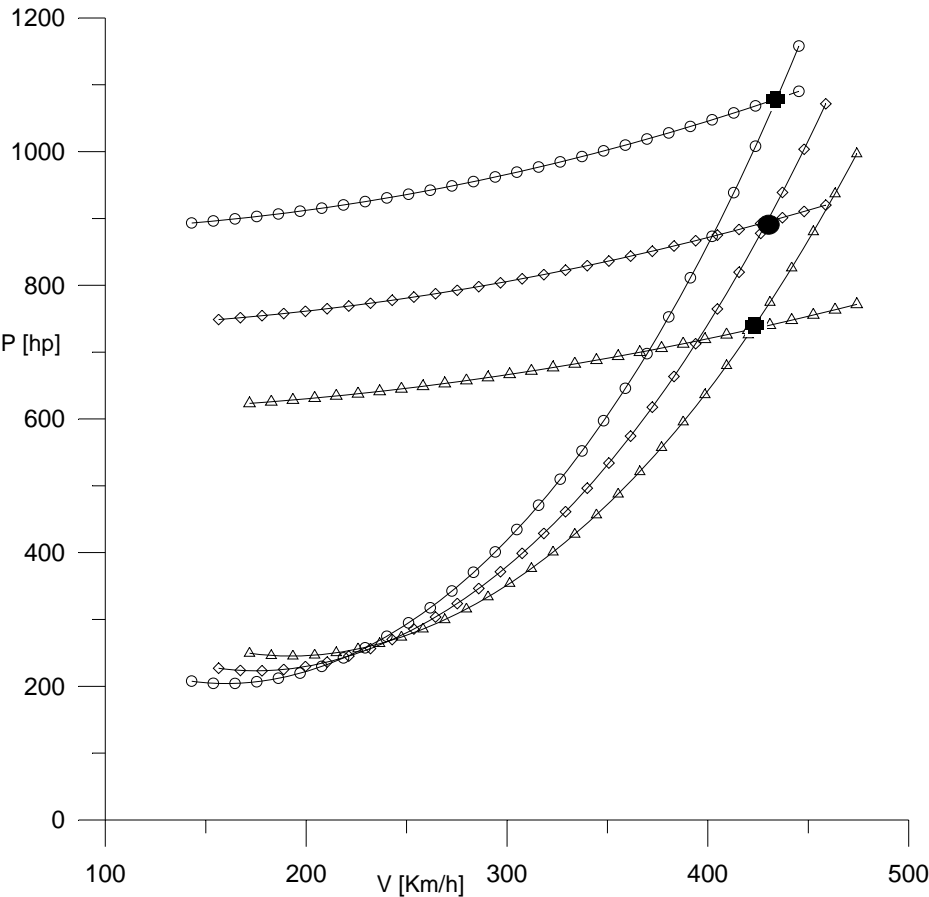


Fig. 7.18

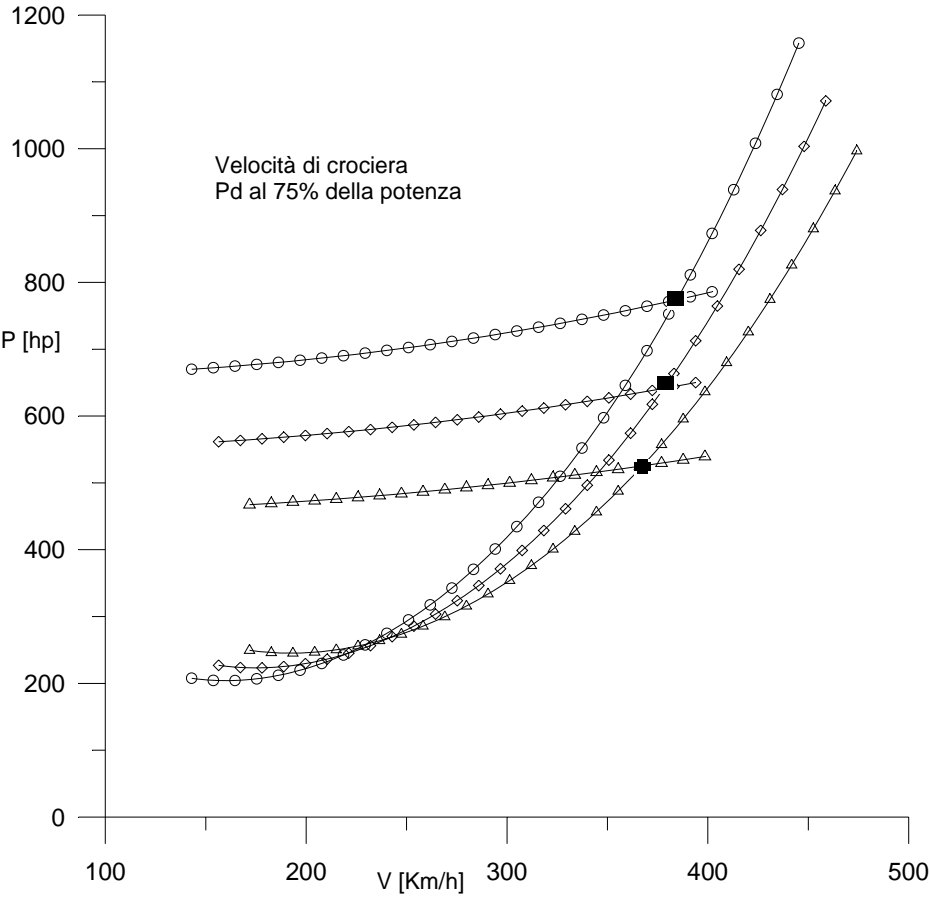


Fig. 7.19

7.4 VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO ANALITICO

7.4.1 VELIVOLI A GETTO

L'equazione $T=D$ che descrive l'equilibrio in volo livellato può essere sviluppata per fornire una soluzione analitica al problema che è stato risolto graficamente al par. 7.3.1.

Scrivendo l'equazione sopra in termini della pressione dinamica $q=1/2\rho V^2$ e notando che $D=T_d$, si ottiene:

$$T_d = qSC_{D_0} + \frac{KS}{q} \left(\frac{W}{S} \right)^2 \quad (7.7)$$

Moltiplicando l'Eq. 7.7 per q abbiamo:

$$q^2 SC_{D_0} - qT_d + KS \left(\frac{W}{S} \right)^2 = 0 \quad (7.8)$$

Si noti che essendo un'equazione di secondo grado in q , l'Eq. 7.8 porta a due soluzioni per q :

$$q = \frac{T_d \pm \sqrt{T_d^2 - 4SC_{D_0}K(W/S)^2}}{2SC_{D_0}} = \frac{T_d/S \pm \sqrt{(T_d/S)^2 - 4SC_{D_0}K(W/S)^2}}{2C_{D_0}} \quad (7.9)$$

Sostituendo q con $1/2\rho V^2$ si ottiene:

$$V^2 = \frac{T_d/S \pm \sqrt{(T_d/S)^2 - 4SC_{D_0}K(W/S)^2}}{\rho C_{D_0}} \quad (7.10)$$

Nell' Eq. 7.10 appare il parametro T/S ; analogamente al parametro carico alare W/S la quantità T/S è talvolta chiamata il carico di spinta. Comunque, nella gerarchia dei parametri importanti per la performance del velivolo, T/S non è così fondamentale come il carico alare W/S o il rapporto spinta-peso T/W . Infatti il rapporto T/S non è altro che una combinazione di queste ultime due quantità.

$$\frac{T_R}{S} = \frac{T_R}{W} \frac{W}{S} \quad (7.11)$$

Sostituendo l'Eq. 7.11 nella 7.10 e facendo la radice quadrata si ottiene l'espressione finale per la velocità:

$$V = \left[\frac{(T_d/W)(W/S) \pm (W/S)\sqrt{(T_d/W)^2 - 4C_{D_0}K}}{\rho C_{D_0}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.12)$$

La stessa relazione, osservando che :

$$4 \cdot K \cdot C_{D_0} = \frac{4}{\pi} \frac{C_{D_0}}{AR \cdot e} = \frac{1}{E_{MAX}^2}$$

può essere scritta come :

In effetti l'equazione 7.12 fornisce due soluzioni corrispondenti alle soluzioni graficamente rappresentate in fig. 7.20

$$V = \left[\frac{(T_d/W)(W/S) \pm (W/S) \sqrt{(T_d/W)^2 - 1/E_{MAX}^2}}{\rho C_{Do}} \right]^{1/2} \quad (7.13)$$

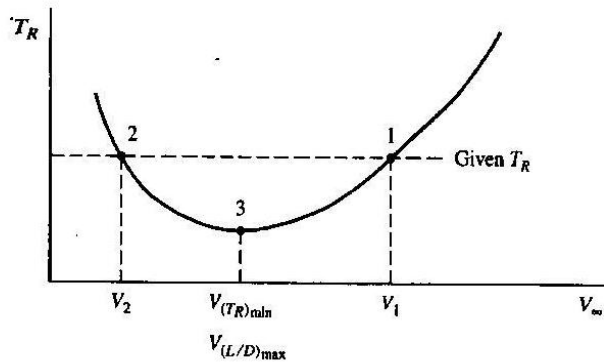


Fig. 7.20

L'equazione 7.12 fornisce le due velocità di volo associate con un dato valore di T_d . Per esempio, come mostrato in Fig. 7.20, per un dato T_d ci sono generalmente due valori di velocità di volo che corrispondono a questo valore di T_d , precisamente, il più alto valore di velocità V_1 si ottiene con il segno + nell' Eq. 7.12 ed il valore più basso V_2 con il segno -. È importante sottolineare le caratteristiche dell'aeroplano dalle quali dipendono queste velocità. Dall' Eq. 7.12, V per un dato T_d dipende da:

1. il rapporto spinta-peso T_d/W
2. il carico alare W/S
3. La polare (C_{Do}, K), cioè il C_{Do} ed il fattore di Oswald, oltre ad AR

Chiaramente V dipende anche dall'altitudine con ρ_∞ . La quota influisce come noto anche sulla spinta disponibile, ovviamente.

Quando il discriminante nell' Eq. 7.12 è uguale a zero, si otterrà una sola soluzione per V . Questa corrisponde al punto 3 in Fig. 7.20, vale a dire il punto di minimo per la spinta richiesta (resistenza) T_R . Discriminante nullo vuol dire:

$$\left(\frac{T_d}{W} \right)^2 - 4C_{Do} K = 0 \quad (7.14)$$

la 7.14 corrisponde anche con

$$\left(\frac{T_d}{W} \right)^2 = \frac{1}{E_{MAX}^2} \quad \text{o anche } T_d = \frac{W}{E_{MAX}}, \text{ quindi } T_d = D_{MIN}$$

in pratica ritroviamo analiticamente quanto visto graficamente nel cap.5.

Quindi affinché si possa avere equilibrio la spinta disponibile rapportata al peso deve essere maggiore o uguale a $1/E_{MAX}$

Quindi la condizione di equilibrio, che fisicamente è legata al fatto che la spinta disponibile sia almeno uguale a quella minima necessaria al volo, si traduce nella condizione matematica che il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado sia maggiore o uguale a zero.
Quindi l'equilibrio in volo livellato ad una certa quota è garantito se e solo se :

$$\boxed{\frac{T_d}{W} \geq \frac{1}{E_{MAX}}} \quad (7.15)$$

La velocità, in corrispondenza della situazione $\frac{T_d}{W} = \frac{1}{E_{MAX}}$, sarà data da (vedi eq. 7.13).

$V = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot CDo} \frac{T_d}{W} \frac{W}{S}}$, tale velocità corrisponderà, ovviamente alla velocità del punto E.

Sostituendo a T_d l'espressione $T_d = \frac{W}{E_{MAX}} = W \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{CDo}{AR \cdot e}}$

Si vede come la velocità di equilibrio (unica perché si ha una ed una sola soluzione) corrisponde proprio con la V_E , cioè la V in corrispondenza dell'assetto di massima efficienza, infatti :

$$V = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{CDo}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{CDo}{AR \cdot e}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_E}}$$

Quindi se ad una certa quota $\frac{T_d}{W} = \frac{1}{E_{MAX}}$, a quella quota si avrà solo una possibile velocità di equilibrio, corrispondente con la V di efficienza massima (punto E).

La (7.13) può essere anche scritta in un altro modo, che chiarisce in modo più facile la dipendenza dai parametri e ne facilita la memorizzazione :

$$\boxed{V = \left[\frac{(T_d / W) \cdot (W / S)}{\rho \cdot CDo} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{T_d}{W} \right)^2 \cdot E_{MAX}^2}} \right) \right]^{1/2}} \quad (7.16)$$

In particolare non si è considerata interessante la soluzione corrispondente al segno negativo della 7.12, ritenendo di interesse solo il calcolo della velocità massima (punto a destra), quindi si è considerato solo il segno positivo.

Ancora, la relazione 7.16 mette in evidenza come la dipendenza della velocità massima (o in generale della velocità di equilibrio) dipenda dai seguenti parametri :

- ❑ Rapporto spinta peso T_d/W
- ❑ Carico alare W/S
- ❑ Quota (tramite ρ) ed indirettamente tramite l'effetto (forte) che ha su T_d ($T_d=0.71 T_0 \sigma \varphi$)
- ❑ C_{Do} del velivolo
- ❑ Efficienza massima, o in particolare C_{Do} , AR ed e .

Tuttavia, si può vedere che da un punto di vista aerodinamico, l'influenza principale ce l'ha il C_{Do} e non il fattore di Oswald.

Infatti il ruolo di E_{MAX} nella 7.16 non è così determinante come quello di C_{Do} (compare direttamente).

Esempio applicativo

A) Metodo applicazione formula

Proviamo a calcolare la velocità massima in volo livellato a 35000 ft del velivolo a getto MD-80. Dai dati dei paragrafi precedenti, che riportiamo :

$$\begin{aligned} W &= W_{TO} = 63500 \text{ Kg} \quad \text{peso massimo al decollo} \\ S &= 112 \text{ m}^2 \quad b = 33 \text{ m} \quad AR = 9.72 \\ C_{Do} &= 0.020 \quad e = 0.80 \quad CL_{MAX} = 1.5 \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e} = 0.0409$$

Imp. propulsivo : 2 motori PW JT8D da 9072 Kg di spinta ciascuno, cioè $T_o = 9072 \cdot 2 = 18144 \text{ Kg}$

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho :

$$E_{MAX} = 17.50$$

La resistenza minima (è indipendente dalla quota) vale :

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633 \text{ Kgf}$$

Calcoliamo la spinta massima disponibile (MAX CRUISE setting) alla quota di 33,000 ft.

$$T_d = T_o \cdot 0.71 \cdot \sigma \cdot \varphi = 18144 \cdot 0.71 \cdot 0.337 \cdot 1 = 4341 \text{ Kg}$$

Il fatto che T_d sia maggiore della minima resistenza garantisce che ci possa essere equilibrio. Calcoliamo con la 7.16 la velocità massima di volo alla quota di 33,000 ft :

$$\text{Calcoliamo } \frac{T_d}{W}$$

$$\frac{T_d}{W} = \frac{4341}{63500} = 0.068$$

$$\frac{W}{S} = \frac{63500 \cdot 9.81}{112} = 5560 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$V = \left[\frac{(0.068) \cdot 5560}{(1.225 \cdot 0.337) \cdot 0.020} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{(0.068)^2 \cdot (17.5)^2}} \right) \right]^{1/2} = 266.9 \text{ m/s} = 961 \text{ Km/h}$$

che risulta ovviamente uguale alla velocità determinata graficamente nel grafico 7.5 e 7.6.

La velocità massima di equilibrio trovata comporta (sempre a 33,000 ft) un Mach di volo pari a :
 $M = 266.9/299.3 = 0.89 !!!$

B) Metodo tramite efficienza

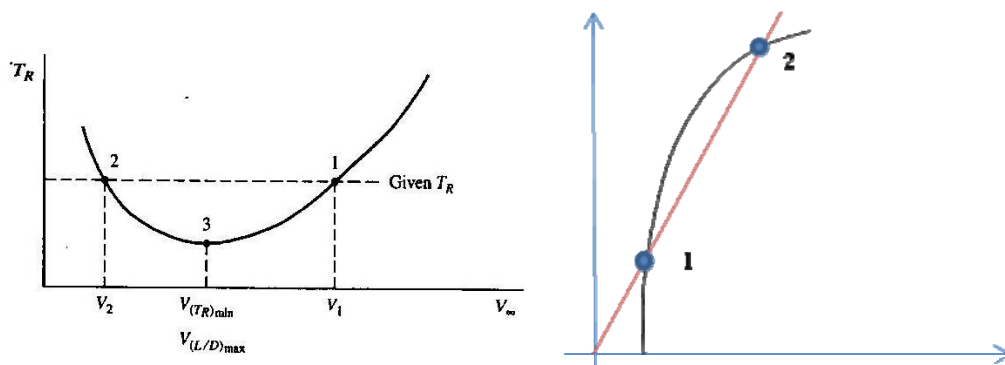
La procedura analitica che permette di ricavare la velocità di equilibrio tramite l'equazione (7.16) può essere sostituita anche da un'altra procedura, che si basa sempre sulla validità della polare parabolica, cioè assenza di fenomeni di comprimibilità.

L'applicazione della formula (7.16) in effetti è connessa al fatto di ricordare la formula (che in effetti può essere anche ricavata). Una procedura alternativa per trovare la soluzione (sempre ipotizzando valida la polare parabolica) è la seguente:

Si può poi ricavare l'efficienza aerodinamica se è noto il peso perché la spinta deve eguagliare la resistenza aerodinamica in volo livellato nella condizione di crociera:

$$E = \frac{C_{Lcr}}{C_{Dcr}} = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d} \quad (7.17)$$

Ovviamente ci sono 2 punti (1 e 2) corrispondenti a tale efficienza e, poiché quello che ci interessa è quello a velocità maggiori (punto 1) corrisponde alla soluzione a coefficiente di portanza più basso.



Assumendo valida la polare parabolica, l'efficienza può essere espressa da :

$$E = \frac{C_{Lcr}}{C_{Dcr}} = \frac{C_{Lcr}}{C_{Do} + K \cdot C_{Lcr}^2} \quad (7.18)$$

Essendo l'efficienza nota dalla eq. 7.17, si trova un'equazione di secondo grado nella incognita C_L di crociera. Ovviamente, delle due soluzioni prenderemo la soluzione con il segno negativo in quanto per data efficienza (cioè data resistenza) ci interessa la soluzione del punto 1 (a destra) che corrisponde a C_L più basso (vedi figura).

$$K \cdot E \cdot C_{Lcr}^2 + E \cdot C_{Do} - C_{Lcr} = 0$$

$$C_{Lcr} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot K \cdot E^2 \cdot C_{Do}}}{2 \cdot K \cdot E} \quad (7.19)$$

Naturalmente, trovato il C_L dalla eq. 7.19, si può calcolare la velocità alla quota di interesse che sarà la velocità di equilibrio (ovviamente coincidente con quella calcolabile con l'eq. 7.16).

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lcr}}}$$

Ad esempio, nel caso analizzato in precedenza del velivolo MD-80, alla quota di 33,000 ft :

$$T_d = T_o \cdot \sigma \cdot 0.71 \cdot \varphi = 4341 \quad \frac{T_d}{W} = 0.068$$

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d} = 14.63$$

Dall'analisi della massima efficienza aerodinamica,

$$E_{max} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{AR \cdot e}{CD_0}} = \frac{W}{T_d} = 17.5$$

e dal fatto che l'efficienza è inferiore di quella massima, si vede che l'equilibrio è possibile, cioè abbiamo la soluzione del problema (analogamente al discriminante dell'equazione di secondo grado 7.13).

$$\text{Con } AR=7.92 \text{ ed un fattore Oswald } e=0.80, \quad K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e} = 0.0409$$

$$C_{Lcr} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot K \cdot E^2 \cdot C_{D0}}}{2 \cdot K \cdot E} \quad C_{Lcr} = 0.378$$

Ed a 33,000 ft; $\sigma = 0.337$

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lcr}}} = 266.9 \text{ m/s} = 961 \text{ km/hr}$$

Ed abbiamo trovato lo stesso risultato di quello trovato con il metodo A e riportato alla pagina 23. Anche tale valore fornisce un Mach pari a 0.89 e quindi non verosimile per il velivolo in esame.

Correzione per comprimibilità

Anche analiticamente (come già visto per via grafica all'inizio del capitolo) bisogna considerare l'aspetto del Mach di divergenza della resistenza trattato nel discutere l'aspetto grafico. I calcoli precedenti mostrano un valore del Mach di equilibrio pari a 0.89, e questo valore di Mach non è sostenibile da parte del velivolo perché ci sono onde d'urto e la resistenza in effetti cresce molto a questi alti valori del Mach. Come già detto precedentemente la resistenza aerodinamica del velivolo per Mach maggiori del Mach critico (o meglio del Mach di divergenza) non segue più la polare parabolica, ma deve tener conto della resistenza di comprimibilità (resistenza d'onda, *wave drag*).

Se il Mach di divergenza della resistenza, nel caso del velivolo in esame è pari ad esempio a $M_{DD} = 0.81$ (come nell'esempio alla pagina 14, fig. 7.14), la resistenza per $M > M_{DD}$ verrà modellata con l'equazione (7.5) e potrà quindi portare analiticamente alla determinazione del punto di equilibrio reale a 33,000 ft, cioè considerando la resistenza comprensiva della resistenza d'onda (dovuta alla comprimibilità).

Vediamo la procedura applicata al caso del velivolo MD-80:

$$\text{Mach}=0.81 \quad \text{a } 33,000 \text{ ft} \quad \Rightarrow \quad V=0.81 \cdot a = 0.83 \cdot 299.3 = 242.5 \text{ m/s} = 873 \text{ Km/h}$$

La velocità ottenuta la chiameremo V_{DD} , per indicare che è la velocità relativa alla condizione di divergenza della resistenza alla quota considerata.

A questo punto si può stimare il coefficiente di portanza e poi quello di resistenza ipotizzando valida ancora la curva di resistenza parabolica (la assumiamo appunto parabolica fino a questo valore del Mach, vedi fig. 7.14).

Bisogna prima valutare il CL in corrispondenza di $V_{DD} = 242.5 \text{ m/s}$. La densità a 33,000 ft vale $\rho=0.413 \text{ Kg/m}^3$, corrispondente con un valore di densità relativa $\sigma=0.337$. Si ricorda che per il velivolo in esame $AR=9.72$ e, con un fattore di Oswald pari a 0.80 si ha :

$$K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e} = 0.0409$$

$$CL_{DD} = \frac{2 W}{\rho S V_{DD}^2} = \frac{2}{0.413} \frac{63500 \cdot 9.81}{112} \frac{1}{242.5^2} = 0.458$$

$$CD_{DD} = CD_o + K \cdot CL_{DD}^2 = 0.020 + 0.0409 \cdot (0.458)^2 = 0.0286$$

Si valuta la resistenza della polare parabolica (che vale fino a M_{DD}) in corrispondenza di M_{DD} :

$$D_{DD} = \frac{1}{2} \rho V_{DD}^2 \cdot S \cdot CD_{DD} = 38850 \text{ N} = 3962 \text{ Kgf} \quad \text{o anche} \quad D_{DD} = \frac{W}{E_{DD}} = W \cdot \frac{CD_{DD}}{CL_{DD}}$$

La resistenza per $M > M_{DD}$ sarà data dalla relazione (vedi anche eq. (7.5):

$$D = D_{DD} + 14 \cdot D_{DD} \cdot (M - M_{DD}) \quad (7.20)$$

Ovviamente, imponendo che la resistenza sia uguale alla spinta disponibile, possiamo trovare come soluzione all'equazione 7.20 la massima velocità di volo a 33,000 ft (il massimo Mach di volo).

Infatti, ponendo la resistenza pari alla spinta disponibile $D=T_d$

$$T_d = T_o \cdot \sigma \cdot 0.71 \cdot \varphi = 4341 \text{ Kgf}$$

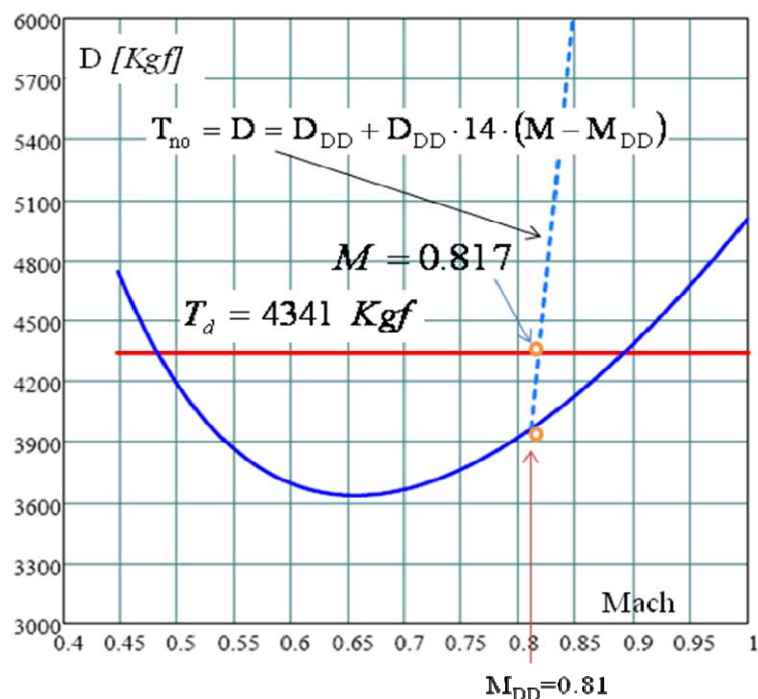
L'equazione precedente si può esprimere in funzione dell'incognita Mach di volo:

$$(M - M_{DD}) = \frac{(T_d - D_{DD})}{14 \cdot D_{DD}} \quad \boxed{M = M_{DD} + \frac{(T_d - D_{DD})}{14 \cdot D_{DD}}} \quad (7.21)$$

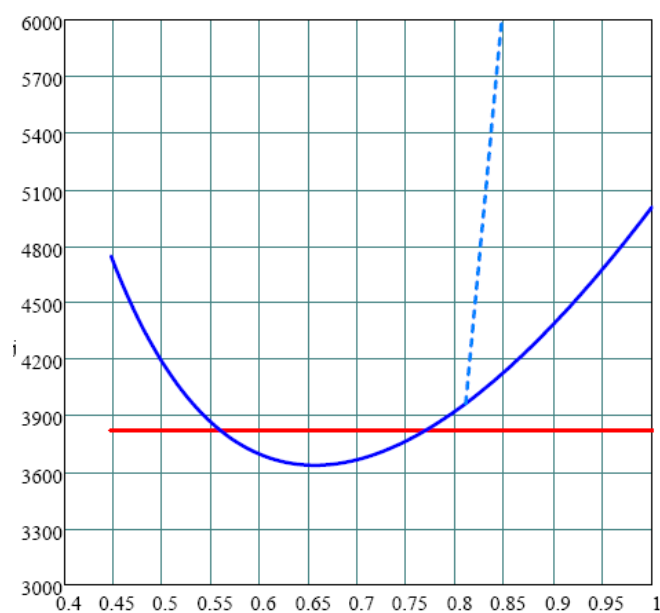
$$M = 0.81 + \frac{(4341 - 3962)}{14 \cdot 3962} = 0.81 + 0.007 = 0.817$$

Si può notare come nell'equazione precedente 7.21 usare forze in Kg o forze in N non fa cambiare il risultato, infatti il Mach così calcolato è adimensionale.

Il risultato ottenuto tramite procedura numerica è perfettamente in accordo con il risultato ottenuto per via grafica a pag. 10 e riproposto qui in figura sotto.



E' evidente che, nel caso in cui la procedura analitica (A o B indifferentemente) porta ad un risultato con $Mach < M_{DD}$, il valore calcolato risulta buono e non è necessario applicare nessun ulteriore calcolo per valutare la reale condizione di equilibrio di volo. Tale condizione corrisponde al caso di intersezione della spinta con la curva di resistenza ad un Mach minore o uguale al M_{DD} (vedi figura sotto).



7.4.2 VELIVOLI AD ELICA

Nel caso dei velivoli ad elica la spinta disponibile T_d risulta funzione della velocità di volo e quindi un approccio analitico che fornisca una relazione chiusa per il calcolo della massima velocità di un velivolo ad elica risulta più complesso.

Infatti se consideriamo l'equazione della potenza (nel caso del velivolo ad elica è la potenza disponibile ad essere costante) :

$$\Pi_d = \Pi_{no} = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}$$

svilupata in V fornisce l'equazione :

$$a \cdot V^4 - \Pi_d \cdot V + b = 0 \quad (7.22)$$

che risulta un'equazione di 4° grado. La risoluzione della equazione è complessa (al contrario della risoluzione dell'equazione quadratica in q trovata nel caso del velivolo a getto).

Per trovare la velocità massima (o la velocità di crociera al 75% della potenza, cioè $\phi=0.75$) per un velivolo ad elica, invece possiamo affrontare il problema per via ingegneristica, attraverso una procedura iterativa.

In pratica si tratta di trovare proprio la soluzione numerica di una espressione (la 7.17, appunto).

Per le potenze possiamo scrivere che :

$$\Pi_d = \Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot C_D \cdot V^3 \quad (7.23)$$

dove la potenza disponibile è

$$\Pi_d = \Pi_a \cdot \eta_p = \Pi_o \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_p \quad \text{nel caso di motore a pistoni e}$$

$$\Pi_d = \Pi_a \cdot \eta_p = \Pi_o \cdot K_v \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_p \quad \text{nel caso di motore turboelica}$$

La procedura che si può adottare è la seguente :

La relazione 7.23 può essere risolta in V :

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_d}{\rho \cdot S \cdot C_D}} \quad (7.24)$$

Ovviamente la 7.24 non è una formula chiusa in quanto anche il C_D , essendo funzione del C_L , è funzione della velocità di volo V , quindi la 7.24 non può essere risolta con un solo calcolo in quanto C_D non è noto.

La soluzione viene trovata per via iterativa :

Si assume inizialmente $C_D=1.1 C_{D0}$, il che è ragionevole in quanto in corrispondenza della velocità massima i valori di C_L e di C_D sono bassi e ci troviamo vicino al C_{D0} del velivolo.

Comunque partendo da un valore pari a $1.2 C_{D0}$ si raggiungerebbe lo stesso risultato, magari con una iterazione in più. Se ci si trova a calcolare una condizione di massima velocità (cioè grado di ammissione massimo, pari ad 1) appare conveniente usare un valore iniziale pari a $1.1 C_{D0}$, mentre se volessimo stimare la velocità in corrispondenza di grado di ammissione ϕ pari a 0.75 o 0.80 (velocità in condizioni di crociera non massima) appare più conveniente usare un valore iniziale pari a $C_D=1.2 C_{D0}$, dovendo arrivare a velocità inferiori.

Come già detto la soluzione è indipendente, perché si raggiungerà a convergenza. E' chiaro che partire da un valore più vicino alla soluzione ci consente di effettuare meno iterazioni.

Vediamo come si procede :

PROCEDURA PER VELIVOLI CON MOTORI A PISTONI

Per il calcolo della velocità massima ($\phi=1$) o di crociera ($\phi=0.75$, ad esempio) ad una certa quota (fissata densità ρ):

Si valuta la potenza massima disponibile alla quota considerata tramite la

$$\Pi_d = \Pi_a \cdot \eta_p = \Pi_o \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_p$$

Si assume inizialmente $C_D=1.1 C_{D0}$

1) Si calcola con tale valore di C_D il valore di V dalla 7.24 alla quota in esame ed in corrispondenza della potenza disponibile

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_d}{\rho \cdot S \cdot C_D}} \quad (7.24)$$

2) Dalla V ricavata si può ricavare il C_L :

$$C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

3) Dal C_L si ricava il C_D :

$$C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$$

Con il valore di C_D trovato si ritorna al punto 1 e si ricalcola un nuovo valore della velocità.

Si procede fino a che la velocità ricavata al ciclo corrente differisce di poco (ad esempio 1 Km/h, o ancora meglio meno del 1%) da quella relativa all'iterazione precedente.

Esempio

Rifacciamo il caso del velivolo Beechcraft King Air trattato per via grafica a pag. 12-13-14.

Riportiamo ancora i dati del velivolo :

$W=4380$ Kg peso massimo al decollo

$S=27.3$ m² $b=15.3$ m $AR=8.57$

$C_{D0}=0.026$ $e=0.78$ $C_{LMAX}=1.6$

2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero , cioè

$\Pi_o = 2 \cdot 550 = 1100$ hp

I motori sono turboelica.

Rendimento propulsivo delle eliche $\eta_P=0.80$

Inizialmente assumiamo di non considerare l'effetto ram della turboelica.

La potenza disponibile al livello del mare è :

$$\Pi_d = \Pi_o \cdot \eta_P = 1100 \cdot 0.80 = 880 \text{ hp} = 656480 \text{ W}$$

Nella relazione 7.19 dobbiamo ovviamente utilizzare la potenza in W e ρ ed S in unità standard.

Riportiamo i calcoli effettuati in tabella ai vari cicli di iterazione :

Iteraz.	C_D	V (calcolata dalla 7.24)	C_L	C_D
1	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	111.11 m/s = 400 Km/h	0.208	0.0281
2	0.0281	111.85 m/s = 402.6 Km/h	0.205	0.0280
3	0.0280	111.91 m/s = 402.9 Km/h	0.205	0.0280

Si vede come già alla seconda iterazione la velocità è praticamente pari a quella finale.

Dai calcoli effettuati risulta che la velocità massima in volo livellato al livello del mare risulta pari a 403 Km/h.

Si può vedere come si è ottenuto per via analitica il risultato ottenuto per via grafica a pag. 17 (si era ottenuto come velocità massima in volo livellato il valore di 402 Km/h).

Questa procedura vale praticamente per ogni velivolo ad elica con motore a pistoncini.

Per calcolare la velocità di crociera in volo livellato (cioè con grado di ammissione non massimo), basta utilizzare nella procedura, cioè nell'equazione 7.24, una potenza all'albero pari , ad esempio al 75% (cioè $\phi=0.75$).

La procedura è praticamente identica.

La procedura rimane invariata anche se vogliamo calcolare la velocità massima (o di crociera) a quote diverse, basterà cambiare la densità (e la potenza disponibile che dipende da essa).

Chiaramente basterà considerare la potenza all'albero giusta ed il valore giusto della densità nell'equazione 7.24 e nella relazione del punto 2 per il calcolo del C_L .

Infatti, sempre assumendo potenza all'albero costante con V (cioè motore a pistoncini), per il velivolo in esame si può ripetere il calcolo per valutare la velocità di crociera alla quota di crociera di 12000 ft.

La densità a 12000 ft è 0.85 Kg/m^3 ($\sigma=0.69$)

La potenza disponibile in condizioni di crociera al 75% (quindi $\phi=0.75$) a questa quota è :

$$\Pi_d = \Pi_o \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P = 1100 \cdot 0.69 \cdot 0.75 \cdot 0.80 = 457 \text{ hp} = 340922 \text{ W}$$

Iteraz.	C_D	V (calcolata dalla 7.24)	C_L	C_D
1	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	100.97 m/s = 363.5 Km/h	0.364	0.0323
2	0.0323	96.96 m/s = 349.07 Km/h	0.394	0.0334
3	0.0334	95.88 m/s = 345.17 Km/h	0.403	0.0337
4	0.0337	95.55 m/s = 344 Km/h	0.406	0.0337

Quindi la velocità di crociera (al 75% del grado di ammissione) alla quota di 12000 ft risulta pari a 344 Km/h.

Si vede come è stato necessario effettuare una iterazione in più.

Il motivo è che, quando si considerano condizioni di crociera (essendo le velocità meno elevate ed anche i C_L un po' più elevati) sarebbe più opportuno partire da valori pari a $1.2 C_{D0}$, come già detto. In effetti ciò non influisce minimamente sul risultato finale.

Qualsiasi sia il valore iniziale assunto per il C_D il procedimento porta a convergenza al risultato.

Quanto effettuato, analogamente a quanto visto alle pagine 16-17 rappresenta una approssimazione, in quanto il motore del velivolo è un motore turboelica e quindi la potenza all'albero aumenta con V per l'effetto ram presente.

La procedura per velivoli turboelica, rispetto a quella appena esposta, si modifica nel modo seguente (si tiene semplicemente in conto la presenza del K_v):

PROCEDURA PER VELIVOLI CON MOTORI TURBOELICA

Per il calcolo della velocità massima ($\phi=1$) o di crociera ($\phi=0.75$, ad esempio) ad una certa quota (fissata densità ρ):

Si valuta la potenza massima disponibile alla quota considerata tramite la (notare l'effetto RAM dovuto al K_v):

$$\Pi_d = \Pi_a \cdot \eta_P = \Pi_O \cdot K_v \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P \quad (7.25)$$

assumendo inizialmente un valore di $K_v=1.0$ (infatti, poiché non conosco la velocità di volo (che è proprio la mia incognita) non conosco K_v).

Indichiamo con Π_{d-1} la potenza disponibile con $K_v=1$

$$\Pi_{d-1} = \Pi_a \cdot \eta_P = \Pi_O \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P$$

Si assume inizialmente $C_D=1.1 C_{D0}$

- 1) Si calcola con tale valore di C_D il valore di V dalla 7.24 alla quota in esame ed in corrispondenza della potenza disponibile

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_{d-1}}{\rho \cdot S \cdot C_D}} \quad (7.26)$$

- 2) Dal valore di V ricavato si ricava il K_v (questa volta >1) dalla relazione del cap. 6 oppure dal grafico corrispondente (vedi sempre cap. 6)

- 3) Si ricava nuovamente la velocità dalla relazione sopra, questa volta considerando la potenza disponibile che è stata moltiplicata per il K_v (in genere significa potenza disponibile incrementata del 10-20%), cioè:

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_{d-1} \cdot K_v}{\rho \cdot S \cdot C_D}} \quad (7.27)$$

- 4) Dalla V ricavata si può ricavare il C_L :

$$C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

5) Dal C_L si ricava il C_D :

$$C_D = C_{D0} + K \cdot C_L^2$$

Con il valore di C_D trovato si ritorna al punto 3 e si ricalcola un nuovo valore della velocità.

Si procede fino a che la velocità ricavata al ciclo corrente differisce di poco (ad esempio 1 Km/h, o ancora 1%) da quella relativa all'iterazione precedente.

Si noti come non è necessario andare a modificare il K_v (viene calcolato solo all'inizio, cioè al primo ciclo) se il valore della velocità varia tra un ciclo e l'altro meno di 5 Km/h.

Infatti la figura 6.24 del cap. 6 mostra chiaramente come variazioni di velocità di volo così ridotte non comportano variazioni significative del fattore K_v .

Esempio applicativo

Sempre per il velivolo Beechcraft, calcoliamo la velocità massima in volo livellato al livello del mare, considerando questa volta la procedura (corretta) per motore turboelica.

Assumendo inizialmente $K_v=1$ la potenza disponibile risulta pari a $\Pi_{d-1} = 880$ hp

Iteraz.	C_D	V (calcolata dalla 7.26 o 7.27)	K_v	C_L	C_D
pre	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	111.14 m/s = 400.09 Km/h (7.26)	1.127		
1	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	115.60 m/s = 416.33 Km/h (7.27)	“	0.192	0.02771
2	0.0277	116.90 m/s = 420.70 Km/h (7.27)	“	0.188	0.02764
3	0.0334	116.97 m/s = 421.10 Km/h (7.27)	“	0.1878	0.02764

La velocità massima quindi risulta 420 Km/h (prima, considerando un equivalente motore a pistoncini era stata calcolata di 403 Km/h).

Vediamo anche come il risultato (421 Km/h) è in pieno accordo con il risultato ottenuto per via grafica a pag. 18-19.

Sempre assumendo motore turboelica (procedura pagina precedente), possiamo calcolare la velocità massima alla quota di 12000 ft.

La potenza disponibile da considerare (per l'effetto del σ), sempre assumendo inizialmente $K_v=1$ risulta pari a : $\Pi_{d-1} = 880 \cdot \sigma = 610$ hp
(il rapporto delle densità a 12000 ft è 0.69).

Iteraz.	C_D	V (calcolata dalla 7.26 o 7.27) ma con $\rho = \rho(12000 \text{ ft}) = 0.85 \text{ Kg/m}^3$	K_v	C_L	C_D
pre	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	111.14 m/s = 400.09 Km/h (7.26)	1.127		
1	$1.1 \cdot C_{D0} = 0.0286$	115.65 m/s = 416.33 Km/h (7.27)	“	0.2773	0.02957
2	0.02957	114.37 m/s = 411.74 Km/h (7.27)	“	0.2835	0.02973
3	0.02973	114.16 m/s = 411.00 Km/h (7.27)	“	0.2846	0.02976

Quindi la velocità massima alla quota di 12000 ft risulta pari a 411 Km/h.

7.5 INVILUPPO DI VOLO

Abbiamo visto che ad ogni quota è possibile valutare (sia per via grafica che per via analitica) la velocità minima e la velocità massima.

La velocità minima risulterà pari alla velocità di stallo se le curve non si intersecano sul lato sinistro (curve di spinta nel caso del jet e di potenza nel caso dell'elica) e pari alla velocità di intersezione nell'altro caso (segno negativo nella relazione 7.12 per il velivolo a getto). La figura 7.21 mostra le velocità minime e massime ottenibili nel caso di un velivolo a getto, a due quote di 20,000 e 33,000 ft. Si nota come generalmente, a quote medio-basse, la velocità minima è quella di stallo (non c'è intersezione a sinistra), mentre ad alte quote (dai 30,000 ai 37,000 ft) solitamente la velocità minima è delimitata dalla spinta disponibile.

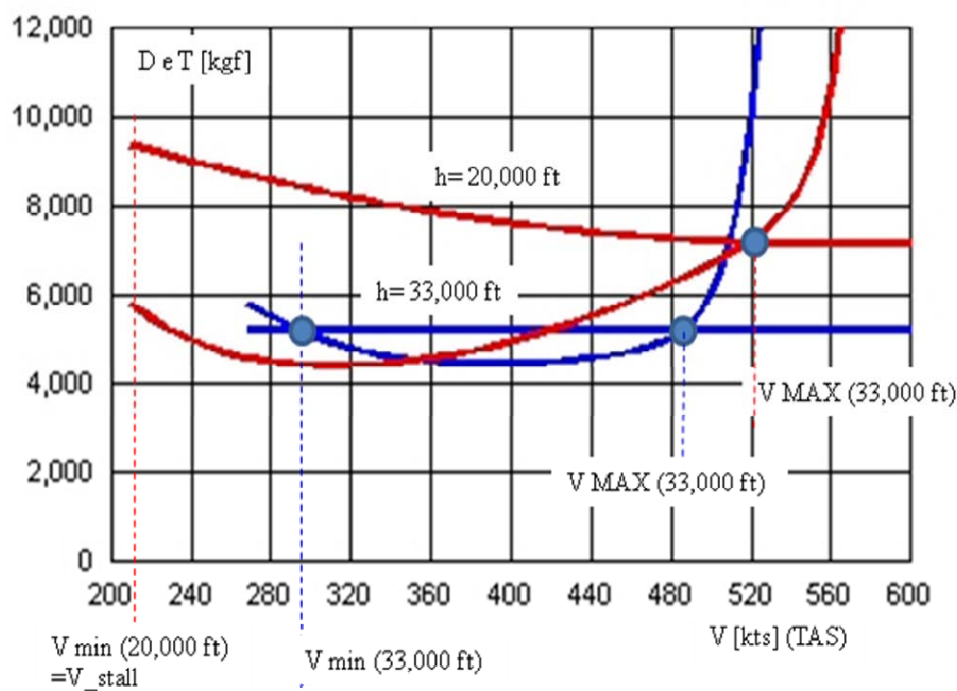


Fig. 7.21 : Velocità minime e massime a due quote.

Ad ogni quota è possibile valutare la velocità minima e la velocità massima e quindi si può ottenere quello che viene chiamato inviluppo di volo (*level flight envelope*), cioè l'area che racchiude tutte le possibili condizioni di volo (in termini di V e quota) livellato per il velivolo in esame.

Riportiamo ad esempio l'inviluppo di volo per il velivolo da trasporto Airbus A320:



Le curve di spinta necessaria (resistenza) e disponibile possono essere riportate sia in termini di velocità (velocità vera TAS) oppure di numero di Mach (ad ogni quota $M=V/a$ con a velocità del suono a quella quota). Nelle figure sono riportati i punti di velocità minima e massima ad ogni quota. Le quote considerate sono $h=0$ (livello del mare S/L), 10,000 ft, 20,000 ft, 25,000 ft e 30,000 ft.

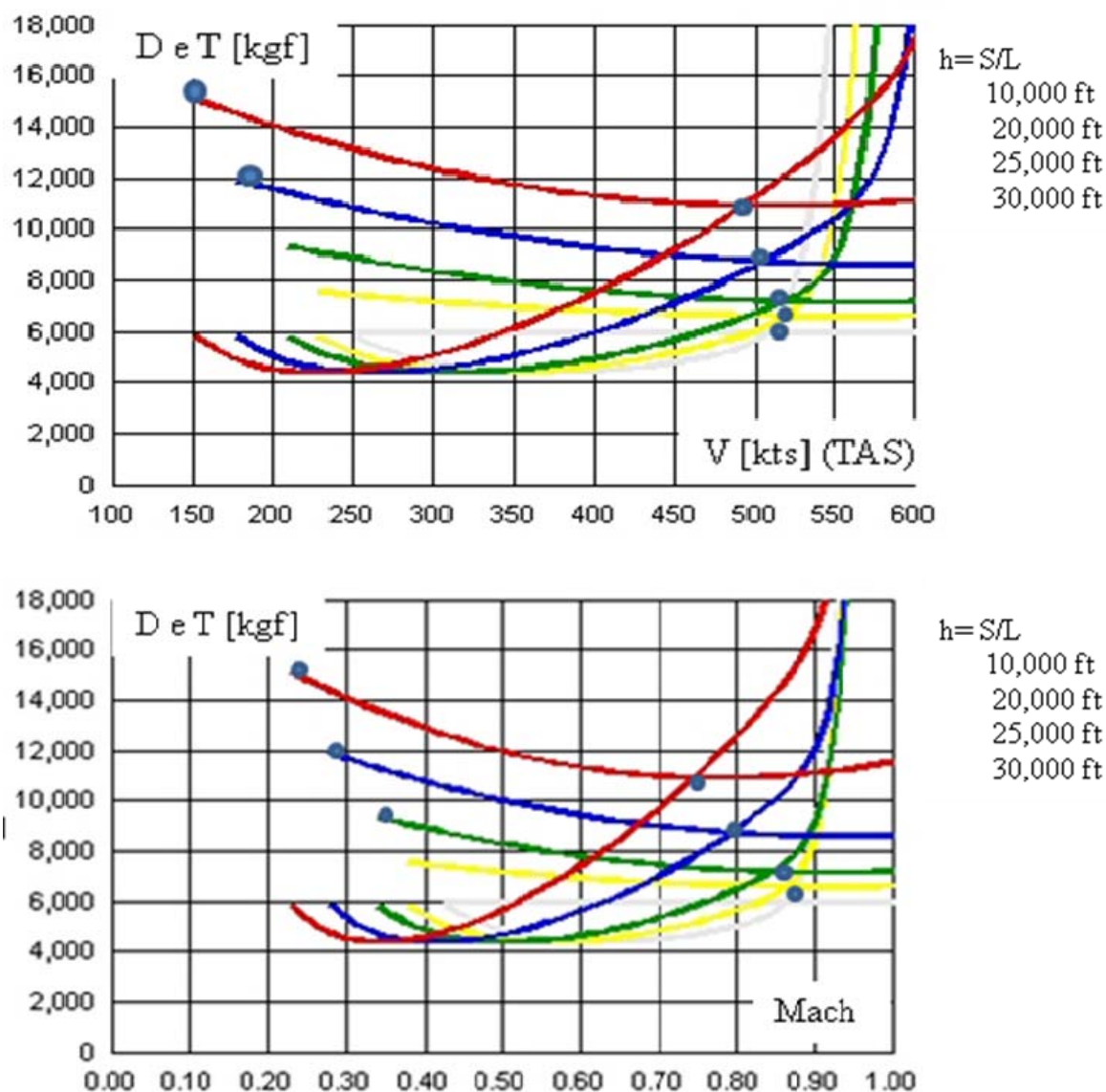


Fig. 7.22 : Diagrammi Airbus A320 a varie quote.

Chiaramente l'involuppo di volo si può riportare in velocità o in Mach.

Nelle curve sono riportate anche le curve della velocità di salita rapida (massimo rateo di salita) e di salita ripida (massimo angolo di salita) calcolabili alle varie quote. Le velocità verranno chiarite meglio nel capitolo successivo che tratterà le prestazioni di salita.

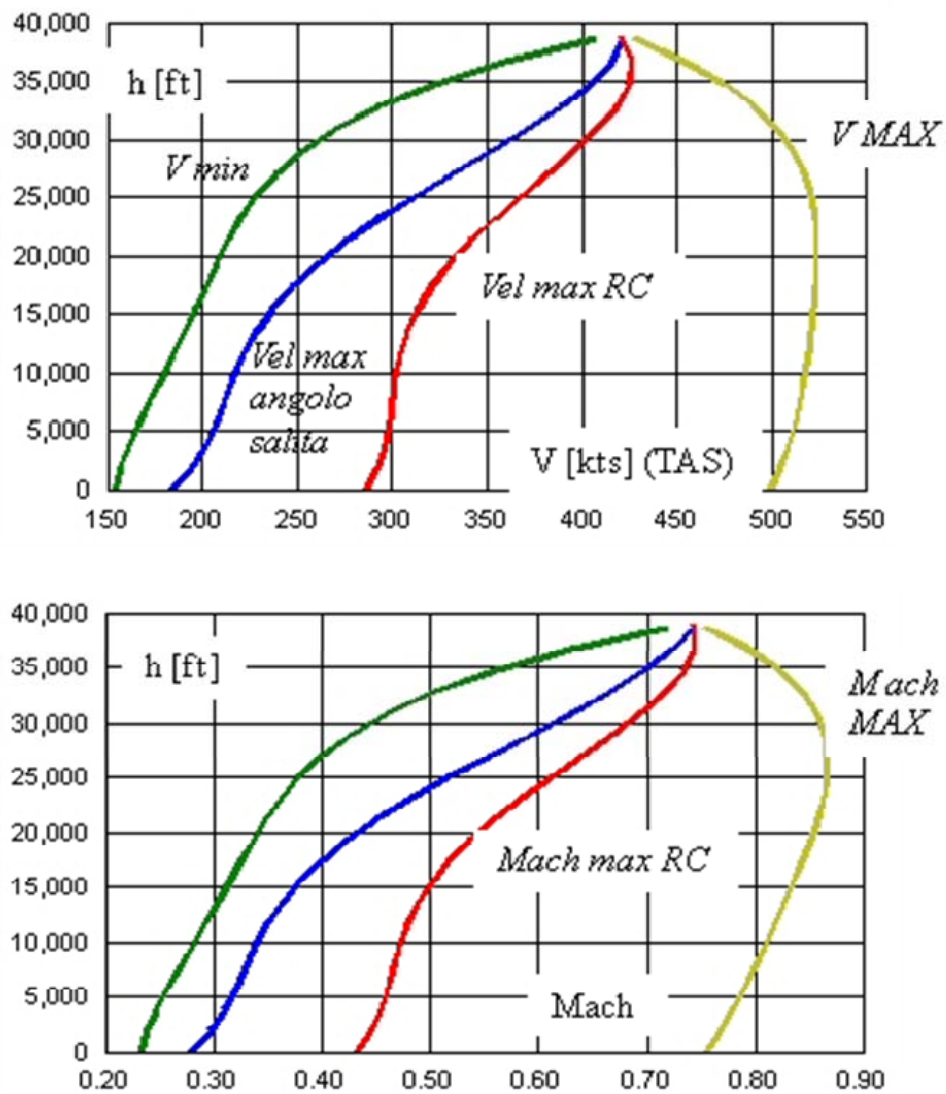
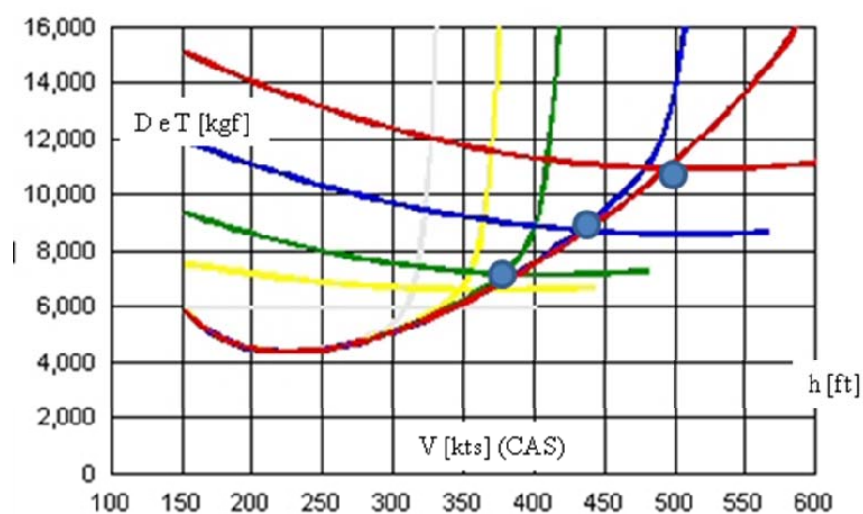


Fig. 7.23 : Inviluppo di volo livellato Airbus A320

Se riportassi i diagrammi in velocità equivalente (o calibrata) (le curve della spinta necessaria sono coincidenti alle varie quote) avrei:



E l'inviluppo verrebbe ad essere modificato come in figura 7.24

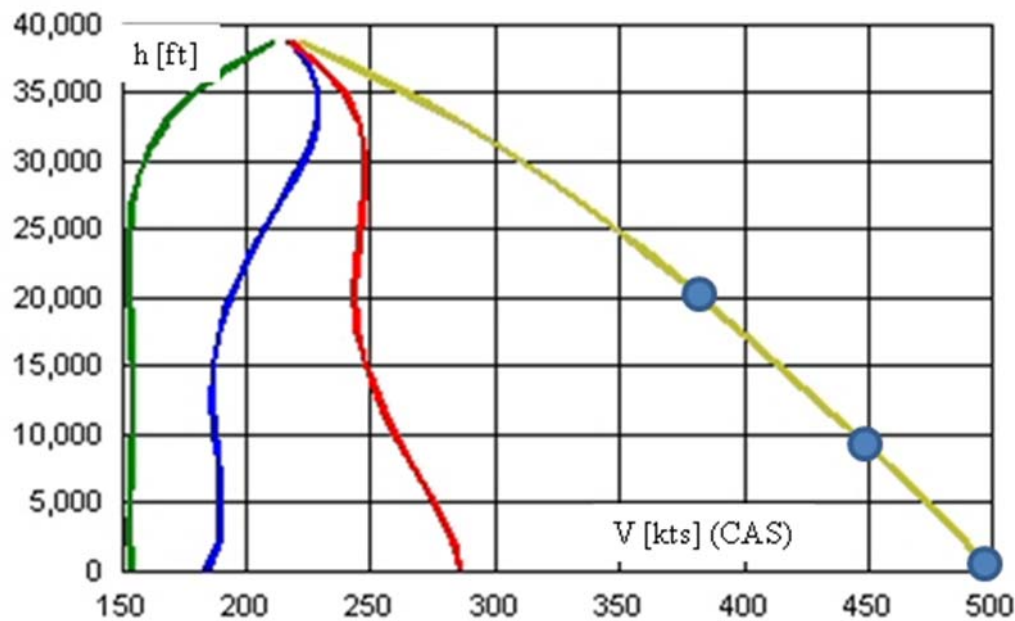


Fig. 7.24 : Involuppo di volo livellato Airbus A320 in termini di CAS

Nel calcolo precedente è stato tenuto in conto il Mach di divergenza (le curve di resistenza aumentavano come già visto a Mach alti rispetto all'approccio di polare parabolica).

Se invece facessimo il calcolo con curve senza effetti di comprimibilità (vedi fig. 7.25 sotto), il ramo destro della curva involucro (velocità massima) sarà spostato verso destra (le velocità massime risultano sensibilmente maggiori). Nella figura è rappresentato con la curva tratteggiata l'involuppo precedente (corretto) con effetti di comprimibilità e l'involuppo non corretto senza tali effetti.

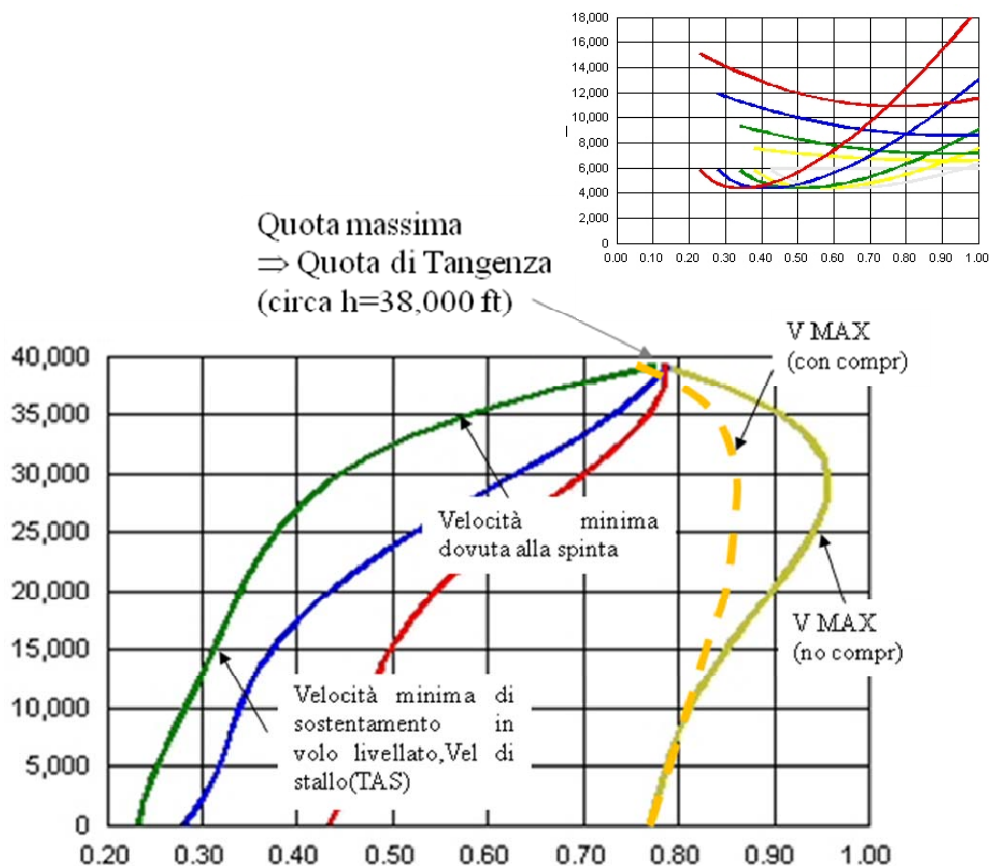


Fig. 7.25 : Involuppo di volo livellato Airbus A320 in Mach con e senza effetti di comprimibilità

Si può vedere come ad una certa quota (circa 38,000-39,000 ft) le curve confluiscono in un solo punto (le curve della spinta disponibile e necessaria sono tangenti), cioè $T_d = D_{MIN}$. Tale quota (alla quale vedremo che il velivolo non ha riserva di potenza e di spinta per salire) viene detta quota di tangenza teorica del velivolo.

Nel diagramma sotto di figura 7.26 è riportato un realistico inviluppo di volo, sempre del velivolo A320. Nel diagramma sono riportate anche delle curve limite aggiuntive come ad esempio la curva (2) che si riferisce al limite di pressione dinamica e la curva (4) che è il massimo Mach sostenibile anche in condizioni di affondata. Le limitazioni alla velocità riportate sono:

- (1) Vel. Minima (Stallo)
- (2) Vel. Massima pressione dinamica
- (3) Vel. Massima (limite spinta)
- (4) Massimo Mach Affondata (Dive)
- (5) Limite di Buffet (cioè onde d'urto)

La limitazione dovuta alla pressione dinamica (2) nasce dall'esigenza di evitare danni strutturali al velivolo.

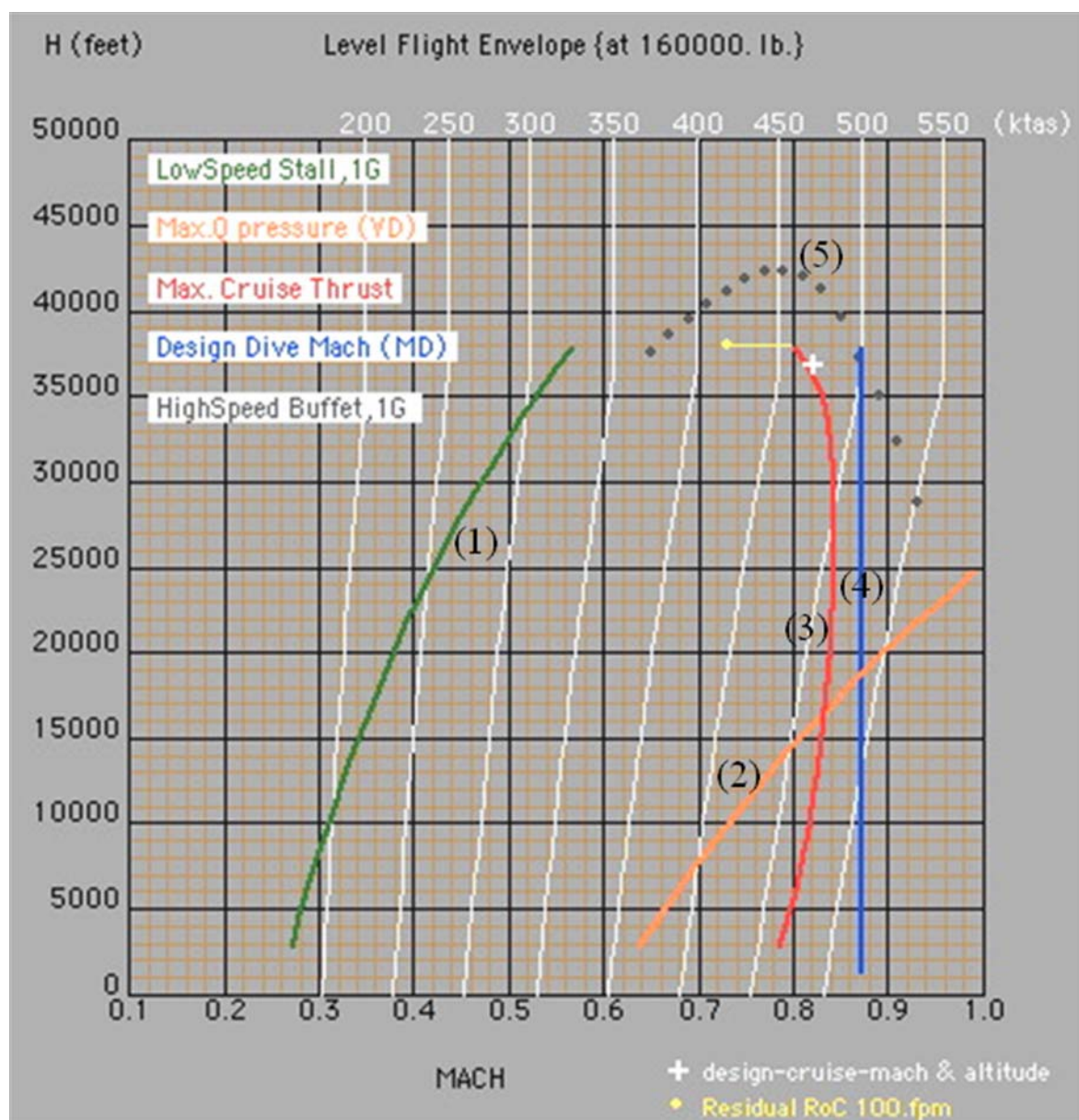


Fig. 7.26 : Realistico inviluppo di volo del velivolo Airbus A320

Inviluppo di volo Velivolo ad elica

Si può calcolare anche l'inviluppo di volo per il velivolo bimotore ad elica Beechcraft KingAir. Vengono riportate in tabella le velocità minime e massime per tale velivolo, così come ricavate dalla procedura della pagina 32 (cioè considerando il motore turboelica).

I risultati ricalcheranno quelle che sono le velocità massime trovate nei grafici di fig. 7.18 e 7.19.

Quota (ft)	V_{MIN} (Km/h)	V_{MAX} (Km/h)
0	144	421
6000	158	417
12000	173	410
16404	186	403
19685	197	395
23000	208	380
26246	220	364
29527	234	312
30200	265	265

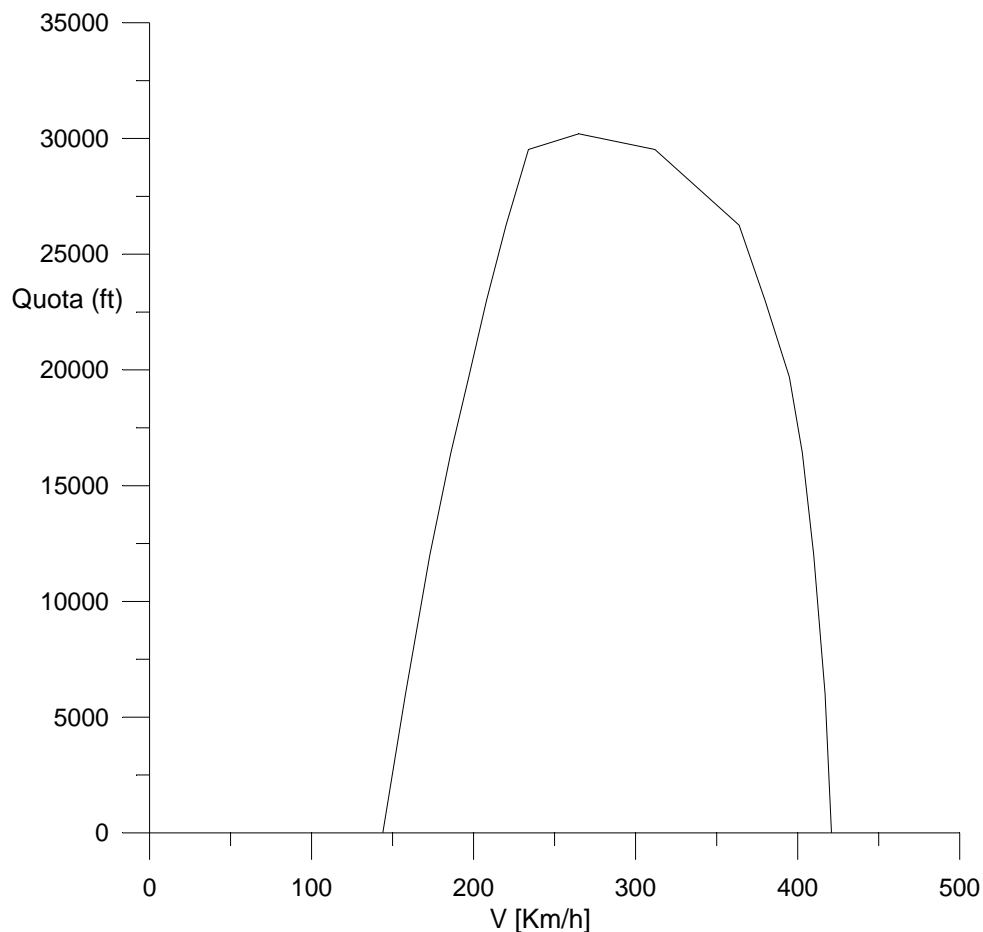


Fig. 7.27 : Inviluppo di volo del velivolo turboelica Beechcraft KingAir C90

Per tale velivolo la quota di tangenza teorica risulta pari a 30200 ft.

Esempio inviluppo di volo ATR72

Altro esempio può essere quello del velivolo da trasporto regionale ATR72.



Calcolo inviluppo di volo in TAS

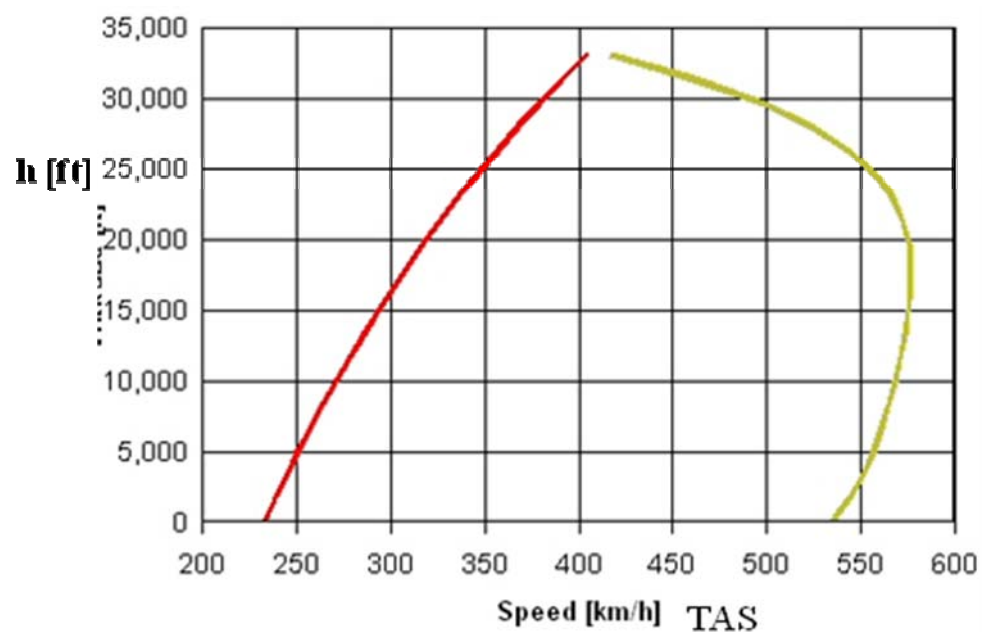


Fig. 7.28 : Inviluppo di volo del velivolo turboelica ATR72 (in TAS)

Inviluppo in CAS

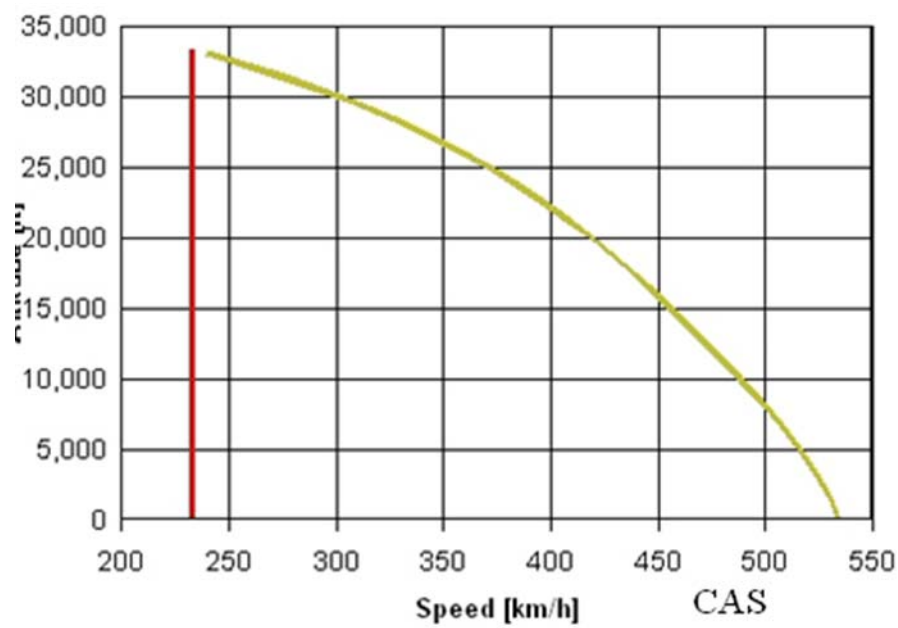


Fig. 7.29 : Inviluppo di volo del velivolo turboelica ATR72 (in CAS)

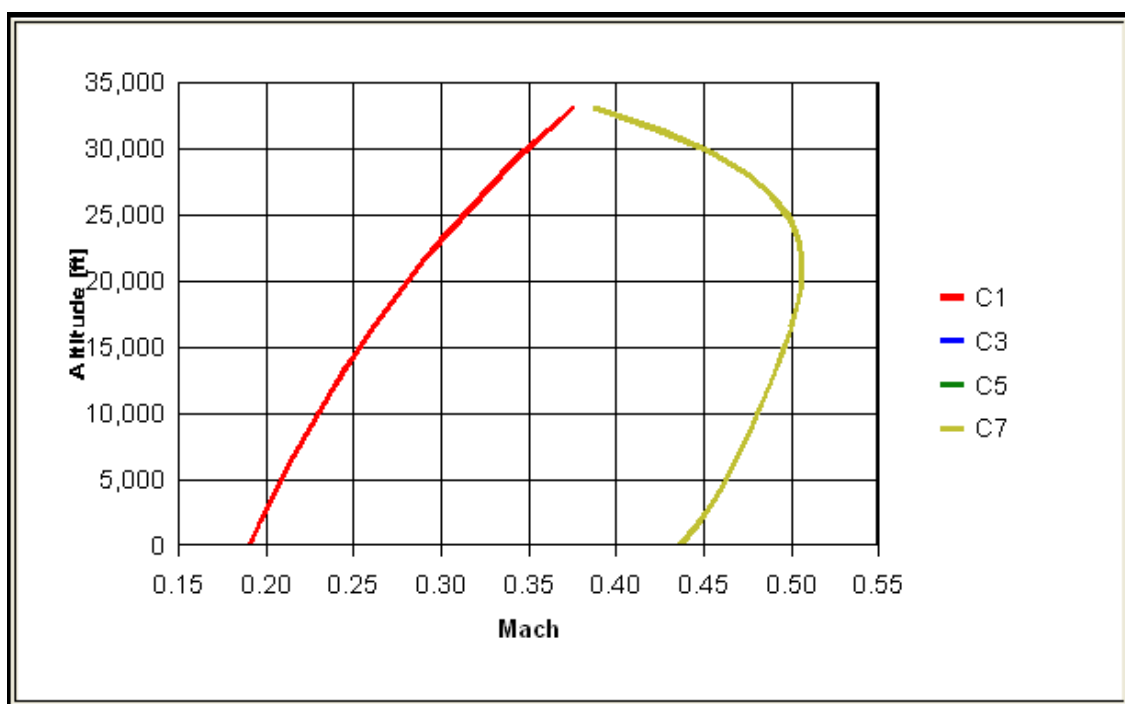


Fig. 7.30 : Inviluppo di volo del velivolo turboelica ATR72 (in Mach)