RIEPILOGO DI MECCANICA DEL VOLO

Ing. F. Nicolosi

RESISTENZA-POLARE

La resistenza di un velivolo può essere espressa da $D = C_D\, S\, q$

Con $$C_D = C_{Do} + \frac{C_L^2}{\pi\, AR}(1+\delta) + k_v C_L^2$$

Con il secondo termine che rappresenta la resistenza indotta e δ che è un fattore che tiene conto che la distribuzione di carico non è ellittica (ala ellittica, minima resistenza indotta, δ=0).

$k_v C_L^2$ è un fattore che tiene conto di un incremento della resistenza di tipo viscoso con il C_L

In definitiva si può esprimere con :

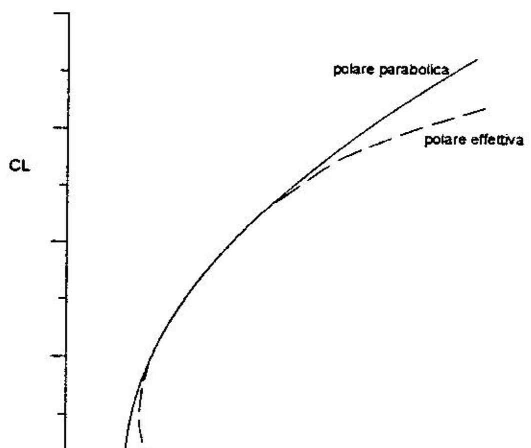
$$C_D = C_{Do} + \frac{C_L^2}{\pi\, AR_e}$$

con "e" definito come fattore di effcienza di Oswald ed AR_e = allungamento effettivo $= AR \cdot e$ (analogamente $b_e = b\sqrt{e}$; apertura alare effettiva)

Quindi la polare di un velivolo si può approssimare con una espressione parabolica, cioè :

$$C_D = C_{Do} + K\, C_L^2$$

Dalla polare teorica di questo tipo, che si può leggermente discostare dalla polare effettiva di un velivolo ai bassi ed agli alti assetti (vedi figura)



48

Si può ricavare l'espressione della spinta necessaria al volo orizzontale :

Spinta necessaria al volo orizzontale ad una certa quota z :

$T_{no}=D=q\ S\ C_D = ½\ \rho_o\varepsilon\ V^2 S\ C_{Do} + ½\ \rho_o\varepsilon\ V^2 S\ K\ C_L^2$

Dove $\varepsilon = \rho / \rho_o$ = densità relativa alla quota z,
e ρ_o=1.225 Kg/m^3, densità al livello del mare (Aria tipo internazionale)

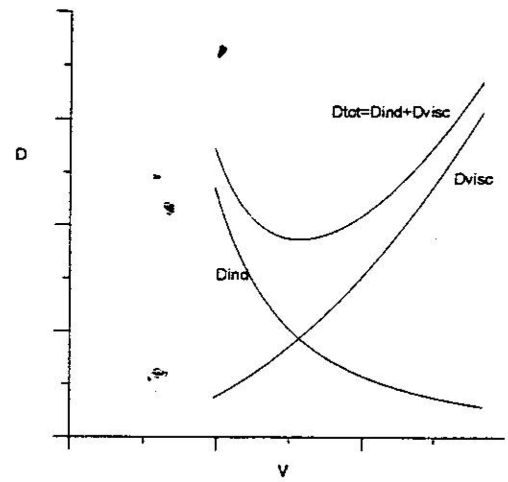
Ma il peso $W=L= ½\ \rho_o\varepsilon\ V^2 S\ C_L$ $\Rightarrow C_L = \dfrac{2}{\rho_o\varepsilon}\dfrac{W}{S}\dfrac{1}{V^2}$

Se indichiamo con $f=C_{Do}\ S$ = area parassita, posso scrivere

$$T_{no} = \frac{1}{2}\rho_o\varepsilon\, f\, V^2 + \frac{2}{\rho_o\varepsilon}\frac{W^2}{S}\frac{1}{\pi A Re}\frac{1}{V^2} = aV^2 + b\frac{1}{V^2}$$

Il minimo di tale funzione si ottiene se $d(T_{no})/dV=0$, cioè => $2aV-2b\ (1/V^3)=0$ quindi,

$aV^2 = b/(V^2)$ cioè quando i due contributi di res. indotta e resist. parassita sono uguali.



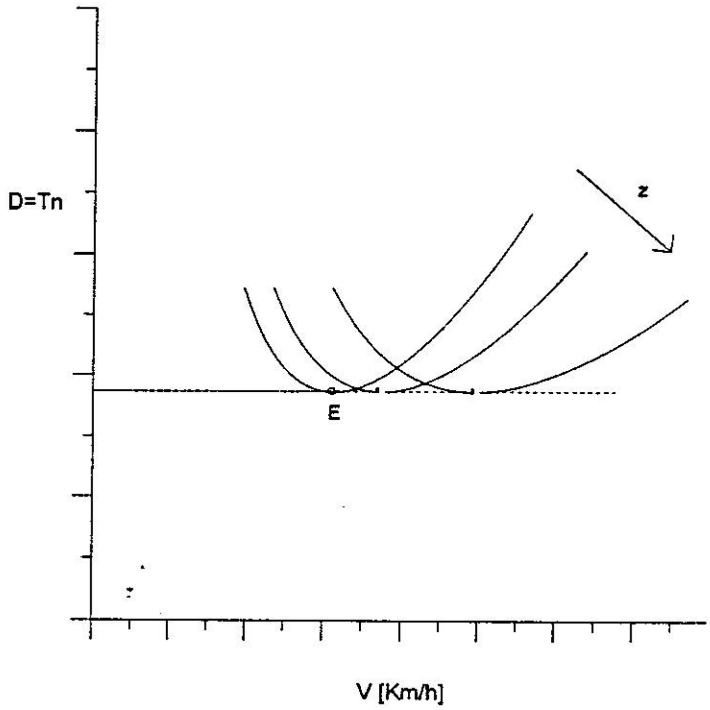
Si ricavano tutte le grandezze in corrispondenza della velocità (e quindi dell'assetto) di minima spinta necessaria al volo orizzontale (e quindi di minima resistenza):

$$V_{Dmin} = \sqrt{\left(\frac{2}{\rho_o\varepsilon}\frac{1}{\pi^{1/2}\, f^{1/2}}\frac{W}{b_e}\right)} \qquad (1)$$

$$D_{min} = \frac{2}{\pi^{1/2}}\frac{W}{b_e}\, f^{1/2}$$

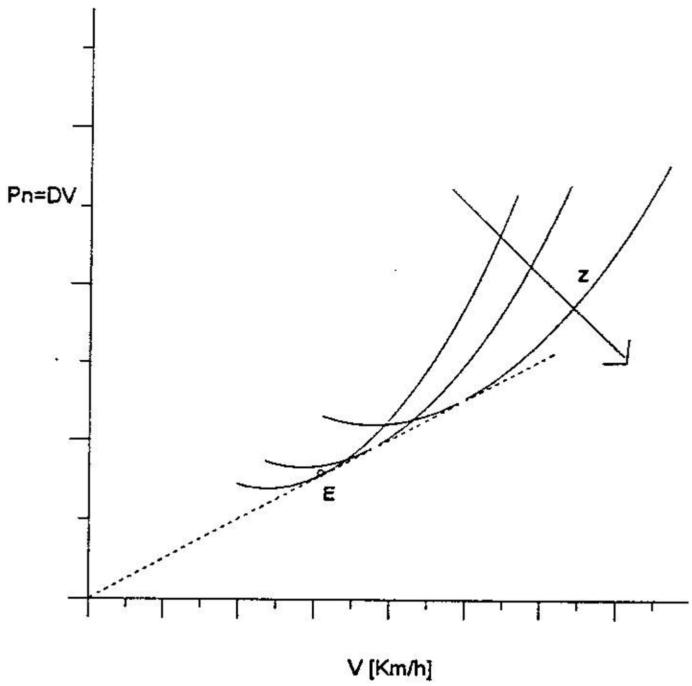
$$E_{max} = \frac{W}{D_{min}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{b_e}{\sqrt{f}} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{CD_o}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{b_e^{\,2}}{f}} \qquad (2)$$

Il punto di massima efficienza sulla polare sarà indicato come punto "E" ed il pedice E si riferisce a grandezze valutate in corrispondenza di tale assetto.



Potenza necessaria al volo orizzontale

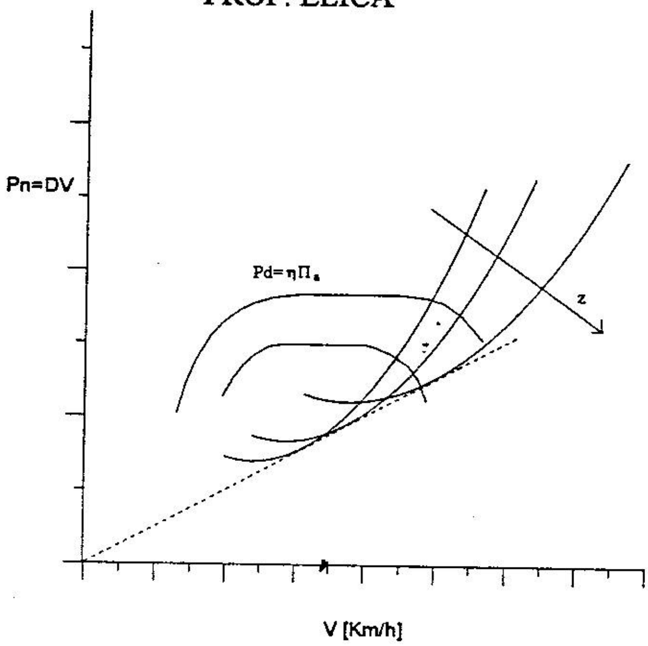
$$\Pi_{no}=V\,T_{no}=D\,V=\tfrac{1}{2}\,\rho_o\,\varepsilon\,f\,V^3+\frac{2}{\rho_o}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\pi}\left(\frac{W}{b_e}\right)^2\frac{1}{V} \qquad (3)$$



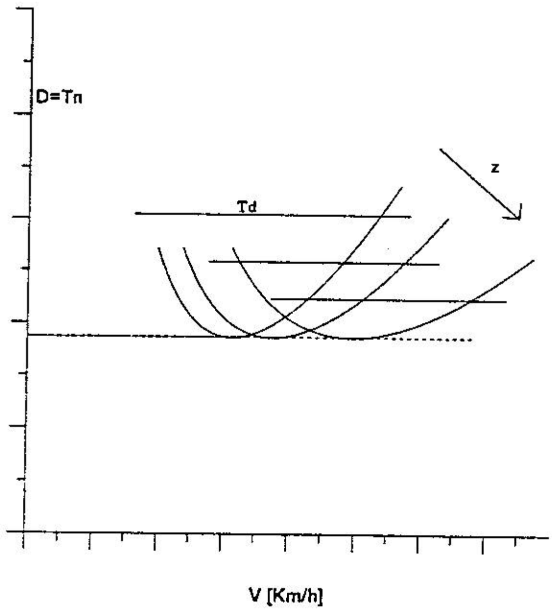
Pot. Necessaria / Pot. Disponibile

Corrispondenza punti della polare con punti sui grafici delle prestazioni (P(V) per elica T(V) per getto).

PROP. ELICA



GETTO

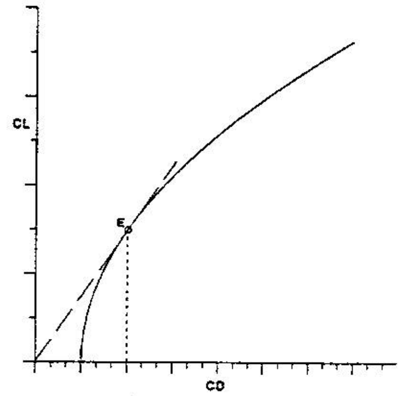


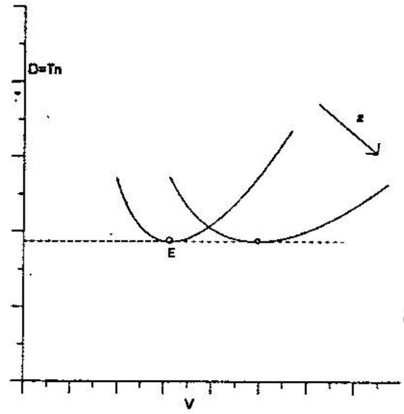
ASSETTI CARATTERISTICI

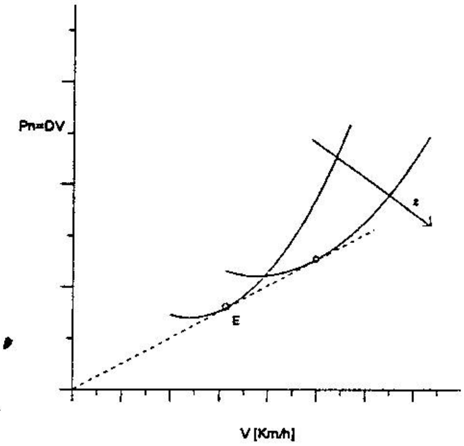
Massima efficienza

$D_{min} \Rightarrow E_{max}$ $\qquad$ $C_{Di}=C_{Do} \Rightarrow C_D=2\,C_{Do}$

$$C_{L\,E} = \sqrt{\pi\, AR_e\, C_{Do}} \qquad E_{max} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\frac{b_e^2}{f}\right)} \qquad V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho}\frac{W}{S}\frac{1}{C_{L\,E}}}$$

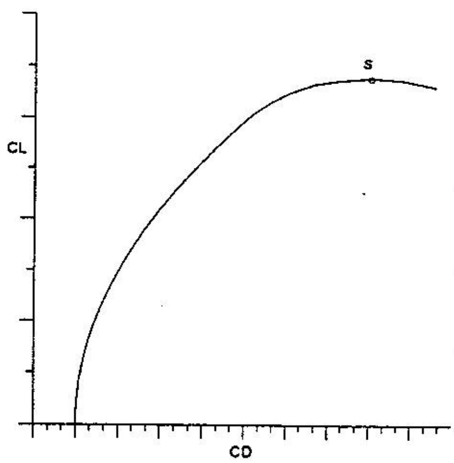


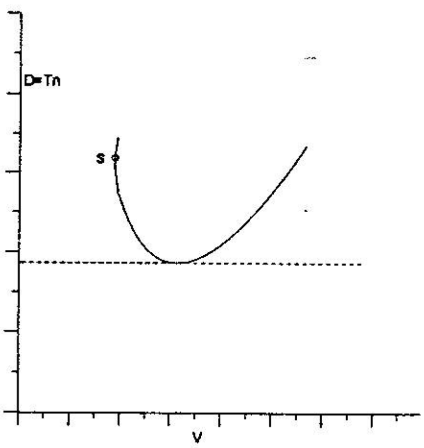


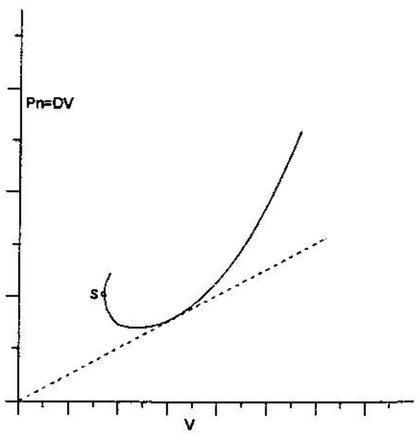


Stallo

Corrisponde a $C_L=C_{L\,max} \Rightarrow V=V_S=V_{min}$







Punto P – Minima potenza necessaria al volo orizzontale

$$\Pi_{min}=(T_{no}\,V)_{min} \Rightarrow (C_D\,V^3)_{min} \Rightarrow \left(\frac{C_D}{C_L}\frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} \Rightarrow \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

Difatti :

$$\Pi=\Pi_{no} = D\,V= ½\,\rho\,S\,C_D\,V^3 \qquad \text{e poichè} \qquad V=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W}{S}}\sqrt{\frac{1}{C_L}}$$

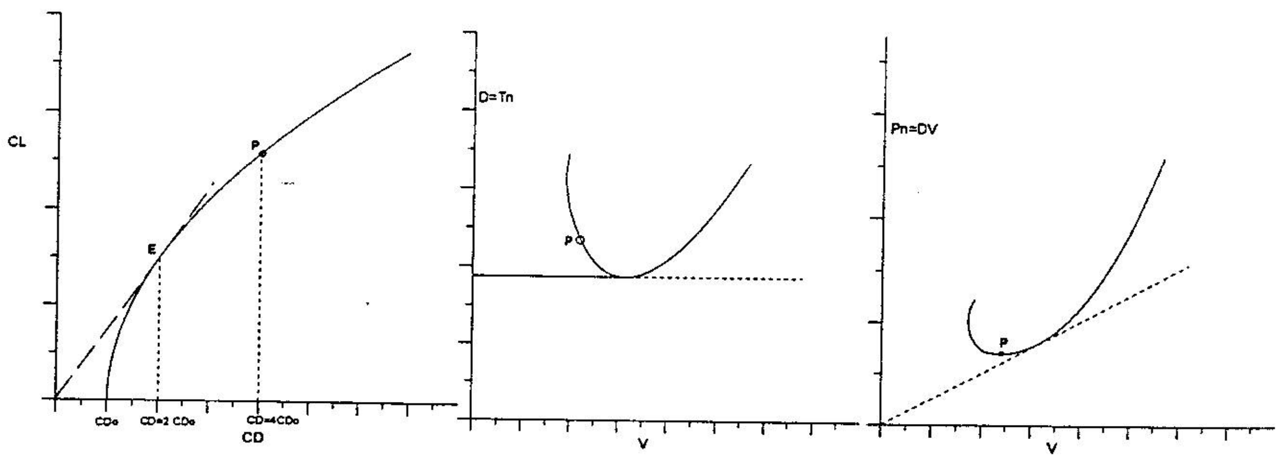
si ha : $\Pi=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{\frac{W^3}{S}}\frac{C_D}{C_L^{3/2}}$

$$\Pi_{min} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)_{max} \Rightarrow \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$$

$\Pi = a\,V^3 + b/V \quad \Pi_{min} \Rightarrow \left(\frac{\partial \Pi}{\partial V}\right) = 0 \Rightarrow 3a\,V^2 - \frac{b}{V^2} = 0$ quindi :

$Di = 3\,D_o$ cioè $C_{Di} = 3\,C_{Do}$ $\qquad C_D = 4\,C_{Do}$

$$\text{Da } C_{Di} = \frac{C_L^{\,2}}{\pi\,AR_e} = 3\,C_{Do} \Rightarrow C_{L\,P} = \sqrt{3\,\pi\,AR_e\,C_{Do}} = \sqrt{3}\,C_{L\,E} = 1.732\,C_{L\,E}$$



Punto A => $(T/V)_{min}$ (massima autonomia kilometrica velivoli a getto)

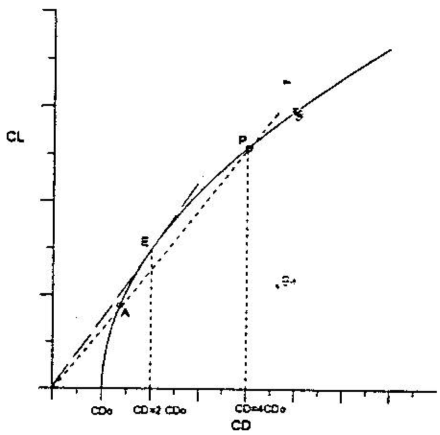
$$\left(\frac{T}{V}\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D V\right)_{min} \Rightarrow \left(C_D \frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{min} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{max}$$

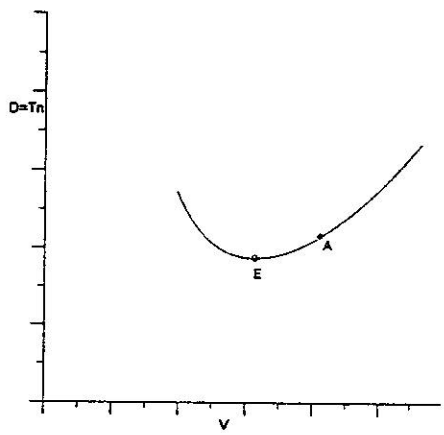
$$\frac{T}{V} = aV + \frac{b}{V^3} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T}{V}\right) = 0 \Rightarrow a - 3\frac{b}{V^4} = 0 \ ; \qquad a = \frac{3b}{V^4}$$

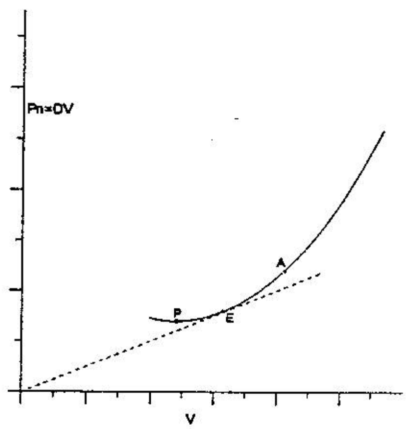
$$D = aV^2 + \left(\frac{aV^4}{3}\right)\frac{1}{V^2} = aV^2 + \frac{a}{3}V^2$$

$$D_i = \frac{D_o}{3} \qquad C_{Di} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{DA} = C_{Do} + \frac{C_{Do}}{3} = \frac{4}{3}C_{Do}$$

$$C_{Di} = \frac{{C_L}^2}{\pi AR_e} = \frac{C_{Do}}{3} \qquad C_{LA} = \sqrt{\frac{\pi}{3}C_{Do}\ AR_e} = \frac{C_{LE}}{\sqrt{3}} = 0.577\ C_{LE}$$







PRESTAZIONI

Velocità massima in volo orizzontale

Si ottiene ad assetti a CL molto basso, quindi è lecito porre CD=1.05÷1.10 CDo

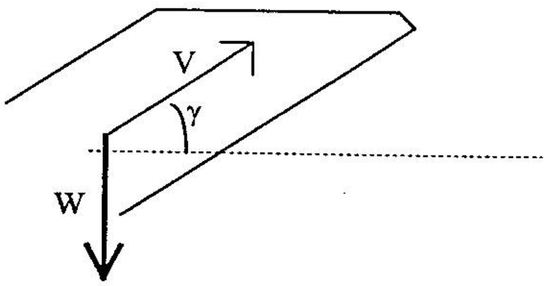
Dall'equilibrio tra la potenza necessaria e quella disponibile :

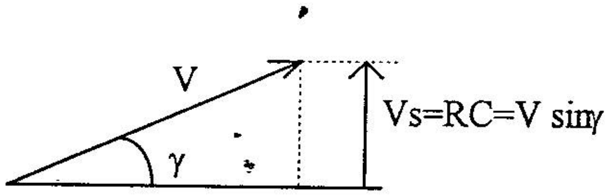
$1.1\ C_{Do}\ S\ \frac{1}{2}\ \rho_o \varepsilon\ V^3 = \eta_p\ \Pi_a(z)$

Dove $\Pi_a(z)$ è la potenza massima del motore all'albero alla quota z e η_p è il rendimento propulsivo.

Si può così ricavare la velocità massima una volta note le caratteristiche geometriche, aerod. (C_{Do}) e propulsive del velivolo.

Salita





Equilibrio

Asse x $\quad T-D-W\sin\gamma=0$
Asse z $\quad L-W\cos\gamma=0$

La velocità di salita (detta anche rateo di salita, in ingl. Rate of Climb (RC)):

$$V_z=RC=V\sin\gamma$$

$\sin\gamma=\dfrac{T-D}{W}$ $\qquad\qquad$ $RC=\dfrac{\Pi_d-\Pi_{no}}{W}$

vediamo ora le differenze per velivoli propulsi ad elica e velivoli a getto.

Velivoli propulsi ad elica

$\Pi_d = \eta_p\, \Pi_a = T\, V$ da ora in poi indicheremo per semplicità con

$$RC = \eta_p\left(\frac{\Pi_a}{W}\right) - \frac{1}{2}\frac{\rho V^3 C_{Do}}{(W/S)} - \frac{2}{\pi\, AR_e}\frac{1}{\rho V}(W/S) \qquad (4)$$

E' chiaro che il massimo rateo di salita ad una certa quota si avrà alla velocità (e quindi all'assetto) di minima potenza necessaria al volo orizzontale, cioè :

$$\Pi_{no\,min} = \tfrac{1}{2}\,\rho\, S\,(4\,C_{Do})\, V_P^{\,3} = \sqrt{\frac{2}{\rho}}\, W^{3/2}\, \frac{1}{S^{1/2}}\, \frac{4C_{Do}}{3^{3/4}\,\pi^{3/4}\, AR_e^{\,3/4}\, C_{Do}^{\,3/4}}$$

$$= \frac{4}{3^{3/4}}\sqrt{\frac{2}{\rho}}\,\frac{1}{\pi^{3/4}}\,\frac{W^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\frac{C_{Do}^{\,1/4}}{AR_e^{\,3/4}\, S^{1/2}} = 2.97\,\frac{W^{3/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\frac{C_{Do}^{\,1/4}}{AR_e^{\,3/4}\, S^{1/2}} \qquad (5)$$

(nelle unità del S.I., $\rho o = 1.225\ Kg/m^3$)

da cui
$$RC_{max} = \eta_p\,\frac{\Pi_a}{W} - 2.97\sqrt{\frac{W}{\varepsilon}}\,\frac{C_{Do}^{\,1/4}}{AR_e^{\,3/4}\, S^{1/2}} \qquad (6)$$

ma
$$\frac{C_{Do}^{\,1/4}}{\left(\dfrac{b_e^{\,2}}{S}\right)^{3/4} S^{1/2}} = \frac{\left(C_{Do}\, S\right)^{1/4}}{b_e^{\,3/2}\, S^{-3/4}\, S^{1/2}\, S^{1/4}} = \frac{f^{1/4}}{b_e^{\,3/2}}$$

da cui
$$RC_{max} = 76\,\eta_p\,\frac{\Pi_a}{W} - 2.97\sqrt{\frac{W}{\varepsilon}}\,\frac{f^{1/4}}{b_e^{\,3/2}} \qquad \text{con } \Pi_a\ [hp],\ W\ [kg] \qquad (7)$$

Quindi essenzialmente si può dire che il rateo massimo di salita dipende dall'apertura effettiva e dall'area parassita. Se faccio le derivate di RC_{max} rispetto a b_e e ad f, e le eguaglio , trovo che :

$$\frac{d\,b_e}{b_e} = \frac{1}{6}\,\frac{d\,f}{f}$$

cioè per ottenere uno stesso incremento di RC_{max} la variazione percentuale di b_e è 6 volte piu' piccola di quella di f . Ciò significa, ovviamente che se, per aumentare il rateo di salita fosse necessaria una riduzione percentuale del 6% di area parassita, per ottenere lo stesso scopo basterebbe aumentare di appena 1% l'apertura alare efficace.

In definitiva il rateo massimo di salita (ad una certa quota) dipende dalle seguenti grandezze e con i riportati ordini di importanza :

W	Πa	b_e	f
-3/2	1	3/2	-1/4

La formula può essere così riscritta :

$$RC_{max} = \eta_p \frac{\Pi_a}{W} - 2.97 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{W}{f}\right)^{-1/4} \left(\frac{W}{b_e^{\,2}}\right)^{3/4} \qquad (8)$$

Quindi la dipendenza può essere espressa con i seguenti rapporti (sotto sempre gli ordini di imp.) :

$\frac{W}{\Pi_a}$	$\frac{W}{b_e^{\,2}}$	$\frac{W}{f}$
-1	-3/4	1/4

<u>Assetto di salita ripida</u>

γmax si ottiene ad assetti maggiori, quindi a velocità minori.

$\sin\gamma = RC/V$

E' difficile ricavare un'espressione analitica, si deve calcolare $\gamma(V)$ e trovare il massimo.

<u>Esempi numerici :</u>

Nel sistema anglosassone, se la potenza viene espressa in [hp] (cavalli), per far sì che le grandezze siano coerenti nell'equazione, è necessario un k nella potenza disponibile, cioè :

$\Pi = T\,V = k\,\eta_p\,\Pi_a$

con k= 550 se V è in [fps] (feet per second)
375 se V è in [mph] (miglia terrestri per ora)

con W in [lb], S in [ft^2], ρ_o=0.002377 slugs=$\left[\frac{lb\ s^2}{ft^4}\right]$

Per esempio se si vuole valutare il rateo di salita di un velivolo ad elica caratterizzato dai seguenti dati :

$\frac{W}{S}$ =34 psf =34 $\frac{lb}{ft^2}$ (=166 Kg/m) $\qquad \frac{\Pi_a}{W} = 0.1 \left[\frac{hp}{lb}\right]$

AR=7.34 e=0.85 η_p=0.85 C_{Do}=0.025 => $E_{max} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{AR_e}{C_{Do}}}$ =14 ,

al livello del mare e ad una velocità di V=140 mph =(205.3 fps)

=> RC=32.1 fps = 1925 fpm

=> $\sin\gamma$ = (RC/V)=0.15 $\qquad \gamma = 9°$

Mentre i valori corrispondenti al massimo rateo di salita (sempre al livello del mare) si ottengono in corrispondenza dell'assetto di minima potenza nec. al volo orizz. (punto P):

$$C_{LP} = C_{LP} = \sqrt{3\pi\, AR_e\, C_{Do}} = \sqrt{3}\, C_{LE} = \sqrt{3}\, 0.70 = 1.212$$

$V_P = 153.6$ fps = 104.7 mph (167 Km/h)

$RC_{max} = 34.08$ fps = 2045 fpm (10.38 m/s = 623 m min)

A quota z=20000 ft , dove $\varepsilon = 0.533$, invece :

$$V_P = \frac{V_P}{\sqrt{\varepsilon}} = 210 \text{ fps} \quad (236 \text{ Km/h})$$

$RC_{max} = 7.56$ fps = 453 fpm

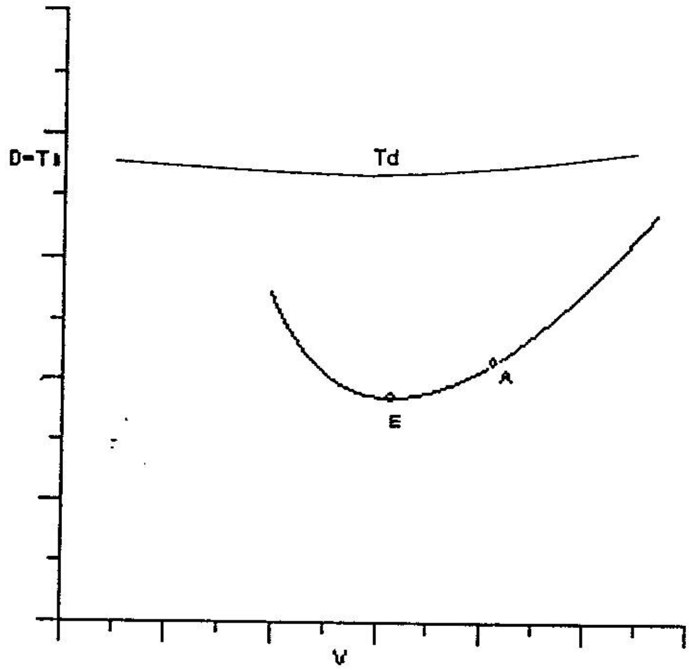
Tempo necessario a salire ad una certa quota :

$$RC = \frac{dz}{dt} \qquad dt = \frac{dz}{RC}$$

$$t^*(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} \frac{1}{RC_{max}(z)} dz$$ tempo minimo per salire ad una certa quota $\bar{z}$

Velivoli propulsi a getto

Indichiamo con T la spinta disponibile dal sistema propulsivo (Indicata nel grafico con Td).



$$\frac{D}{W} = \frac{\rho_o \varepsilon\, C_{Do}}{2\,(W/S)}\, V^2 + \frac{2}{\rho_o \varepsilon}\,\frac{1}{\pi\, AR_e}(W/S)\frac{1}{V^2} = \frac{T}{W}$$

Viene un'equazione di 4° grado in V , quindi sostituendo a V la press. Dinamica $q= \frac{1}{2} \rho\, V^2$

$$q^2 - \frac{T/S}{2\, C_{Do}}\, q + \frac{k\,(W/S)^2}{C_{Do}} = 0$$

$$q = \frac{(T/S)}{2\, C_{Do}}\left\{1 \pm \left[1 - \frac{4\,k\, C_{Do}}{(T/W)^2}\right]\right\}$$

Ci sono soluzioni solo se :

$$\frac{T}{W} > 2\sqrt{k\, C_{Do}} \quad => \quad \frac{T}{W} > \sqrt{\frac{4\, C_{Do}}{\pi\, AR_e}} \quad => \quad \frac{T}{W} > \frac{1}{E_{max}}$$

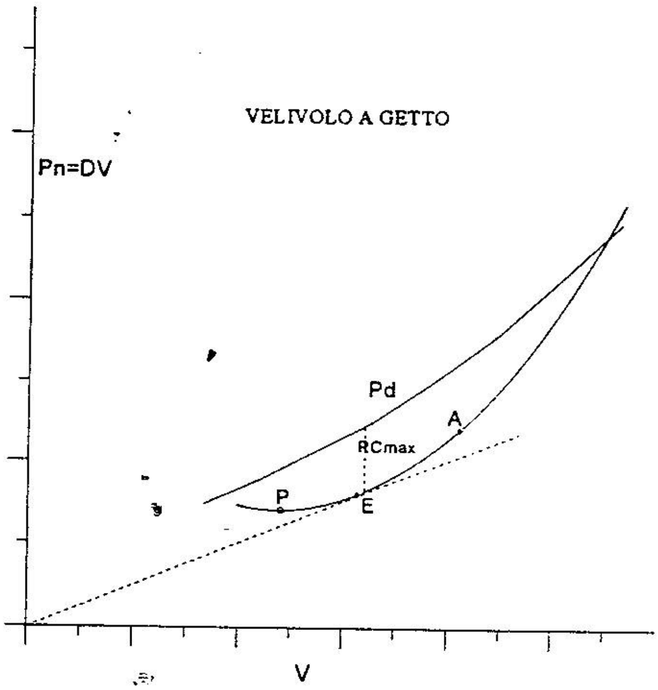
$$V = \left[\frac{(T/S)}{\rho_o \varepsilon\, C_{Do}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\left[E_{max}(T/W)\right]^2}}\right)\right] \qquad (9)$$

Volo in salita

$$RC = V\sin\gamma = \frac{T}{W} - \frac{DV}{W}$$

Salita rapida (fastest climb , fc)

Si vede già graficamente che l'assetto che garantisce il massimo rateo di salita si ottiene ad assetti prossimi a quelli di massima efficienza.



$$D(RC)/dV=0 \quad => \quad T - D - V - \frac{dD}{dV} = 0$$

$$\frac{T}{W} - \frac{\rho_0 \varepsilon f}{2W} V^2 - \frac{2}{\pi \rho_0 \varepsilon}\left(\frac{W}{b_e^2}\right)\frac{1}{V^2} - \frac{\rho_0 \varepsilon f}{W} V^2 + \frac{4}{\pi \rho_0 \varepsilon}\left(\frac{W}{b_e^2}\right)\frac{1}{V^2} = 0$$

$$6 f q^2 - 2 T q - \frac{2}{\pi}\left(\frac{W}{b_e}\right)^2 = 0$$

da cui, risolvendo $\quad q_{fc} = q_{fc} = \frac{T}{6 f}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{E_{max}^2 \left(\frac{T}{W}\right)^2}}\right] = \frac{T}{6 f}\,\Gamma \qquad (10)$

Il fattore Γ è pari a circa 2, in quanto il denominatore è solitamente >>3 e quindi la radice è circa 1.

In corrispondenza della quota di tangenza $\frac{T}{W} = \frac{1}{E_{max}}$ e Γ=3 (e si ha la velocità di salita rapida limite (di fatto con RC=0).

L' espressione della velocità di salita rapida è :

$$V_{fc} = \left[\frac{T + \sqrt{T^2 + \frac{12}{\pi} f \left(\frac{W}{b_e} \right)^2}}{3\rho_o \, \varepsilon \, f} \right]^{1/2} \qquad (11)$$

Trascurando il termine che dipende da $\left(\frac{W}{b_e}\right)$, solitamente trascurabile rispetto a T^2, si ottengono le relazioni approssimate :

$$RC_{max} = 1.54 \left(\frac{T}{W} \right) \left(\frac{T}{f} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2} \right)}{\left(\frac{T}{f} \right)^{1/2} \sqrt{\varepsilon}} \qquad (12)$$

Assumendo una variazione di spinta con la quota del tipo $T(z)=T_o \, \varepsilon^{0.827}$ con T_o =potenza mass al livello del mare.

$$RC_{max} = 1.54 \left(\frac{T_o}{W} \right) \left(\frac{T_o}{f} \right)^{1/2} \varepsilon^{0.74} - 2.2 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2} \right)}{\left(\frac{T_o}{f} \right)^{1/2} \varepsilon^{0.91}} \qquad (13)$$

Ovviamente con $T(z)=T_o \, \varepsilon$ si otterrebbe una espressione analoga. (La variazione di T lineare con ε è un po' approssimata, ma va comunque bene).

In definitiva il rateo massimo di salita di un velivolo a getto dipende dai seguenti parametri :

$\frac{T_o}{W}$	$\frac{T_o}{f}$	$\frac{W}{b_e^2}$
1	>1/2	1

Quota di tangenza teorica :

$$(RC_{max})=0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_T = \left[1.428 \frac{\left(\frac{W}{b_e^2}\right)}{\left(\frac{T_o}{f}\right)\left(\frac{T_o}{W}\right)} \right]^{0.606} \tag{14}$$

Il termine dipendente da W/b_e^2 è trascurabile a quote basse, ma non a quote alte.
Teniamo presente che la velocità di salita aumenta con la quota e che si possono avere problemi di comprimibilità.

L'assetto di massimo rateo di salita si ottiene ad assetti quasi prossimi al punto E (max efficienza) e quindi più alti degli usuali assetti di crociera dei velivoli a getto che sono intorno al punto A (per ottenere una massima autonomia kilometrica).

<u>Esempio numerico</u> :

$\frac{T}{W} = 0.25 \qquad \frac{W}{S} = 100 \text{ psf} \left[\frac{lb}{ft^2}\right] = 488 \text{ Kg/m}^2$

$C_{Do}=0.015 \qquad \frac{T}{S} = 25 \text{ psf} = 122 \text{ Kg/m}^2$

Da cui => $\frac{T}{f} = 1666 \text{ psf} = 8134 \text{ Kg/m}^2$

$E_{max}=16.67 \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{b_e^2} = \left(\frac{W}{S}\right)\frac{1}{C_{Do}}\frac{\pi}{4}\frac{1}{E_{max}^2} = 91.9 \ \frac{kp}{m^2}$

Al livello del mare z=0 :

$RC_{max} = 34.72 - 2.24 = 32.48$ m/s = 6400 fpm

Notare che il secondo termine della (13) è pressocchè trascurabile.

A z=30000 ft (circa 9100 m), invece :

$RC_{max} = 16.66 - 5.50 = 11.2$ m/s

E si vede come il secondo termine non è più così trascurabile.

AUTONOMIE (Formule di Breguet)

Velivoli propulsi ad elica

Si definisce consumo specifico la quantità di combustibile consumata per unità di potenza erogata e per unità di tempo, cioè :

$$dt = \frac{-dW}{c_s \dfrac{\Pi}{\eta_p}} \qquad dS = V\,dt = -\frac{V}{\Pi}\frac{\eta_p}{c_s}dW$$

Π è la potenza propulsiva , $\Pi = T\,V$ e poiché $T = D = W / E$ si ha :

$$dS = -\frac{\eta_p}{c_s}E\frac{dW}{W}$$ supponendo η_p , c_s , E = cost, si integra e si ha :

RANGE

$$S = \frac{\eta_p}{c_s}E\,\ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right) \qquad (15)$$

$$R = 603.5\,\frac{\eta_p E}{c_s}\,\ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

[km] [lb/hp h]

La max autonomia chilometrica si ha quindi all'assetto di max Efficienza (punto E).

$$\frac{dS}{dW} = \frac{1}{W}\frac{\eta_p E}{c_s} \qquad (16)$$

La (16) esprime il consumo specifico di combustibile. Il prodotto $\frac{1}{W}\frac{\eta_p E}{c_s}$ viene definito
Come **fattore di autonomia** per i velivoli ad elica.
La max autonomia chilometrica è :

$$S_{max} = \frac{\eta_p}{c_s}E_{max}\,\ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

La max autonomia oraria :

$$dt = \frac{dS}{V} = -\frac{\eta_p}{c_s}\frac{E}{V}\frac{dW}{W} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\eta_p}{c_s}\left(\frac{E}{V}\right)\ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

$$T_{max} \Rightarrow \left(\frac{E}{V}\right)_{max} \Rightarrow \left(E\sqrt{C_L}\right)_{max} \Rightarrow \text{punto P}$$

queste sono considerazioni che non tengono conto che c_s ed η_p non sono costanti con la quota e con la velocità. Difatti, considerando il rendimento propulsivo, l'assetto di max autonomia si ha per velocità leggermente superiori a quelle di max efficienza.

Velivoli propulsi a getto

Il consumo specifico è così definito (T è la spinta) :

$$c_{sj} = -\frac{dW}{T\,dt} \quad [kp/(kp\,h)] \quad \text{oppure } [lb/(lb\,h)]$$

$$dt = -\frac{dW}{c_{sj}\,T}$$

ma T=W/E dS=V dt e quindi :

$$S = \frac{V\,E}{c_{sj}} \ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

Il consumo specifico : - dS/dW= $\frac{V\,E}{c_{sj}\,W}$

Il prodotto $\frac{V\,E}{c_{sj}\,W}$ viene definito **fattore di autonomia** per velivoli a getto.

La max autonomia chilometrica è :

$$S_{max} = \frac{(V\,E)_{max}}{c_{sj}} \ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

Questo sempre assumendo c_{sj} costante.
Il punto $(V\ E)_{max}$ si ottiene in corrispondenza del punto A della polare, cioè il punto di $\left(E/\sqrt{C_L}\right)_{max}$.
Sostituendo l'espressione di (V E) nel punto A si ottiene :

$$S_{max} = \frac{3^{3/4}\,\pi^{1/4}}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho_o \varepsilon}}\sqrt{\frac{W}{S}}\,\frac{AR_e^{\,1/4}}{c_{sj}\,C_{Do}^{\,3/4}} \ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

La max autonomia oraria :

$$dt = dS/V \quad \Rightarrow \quad T = \frac{E}{c_{sj}} \ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

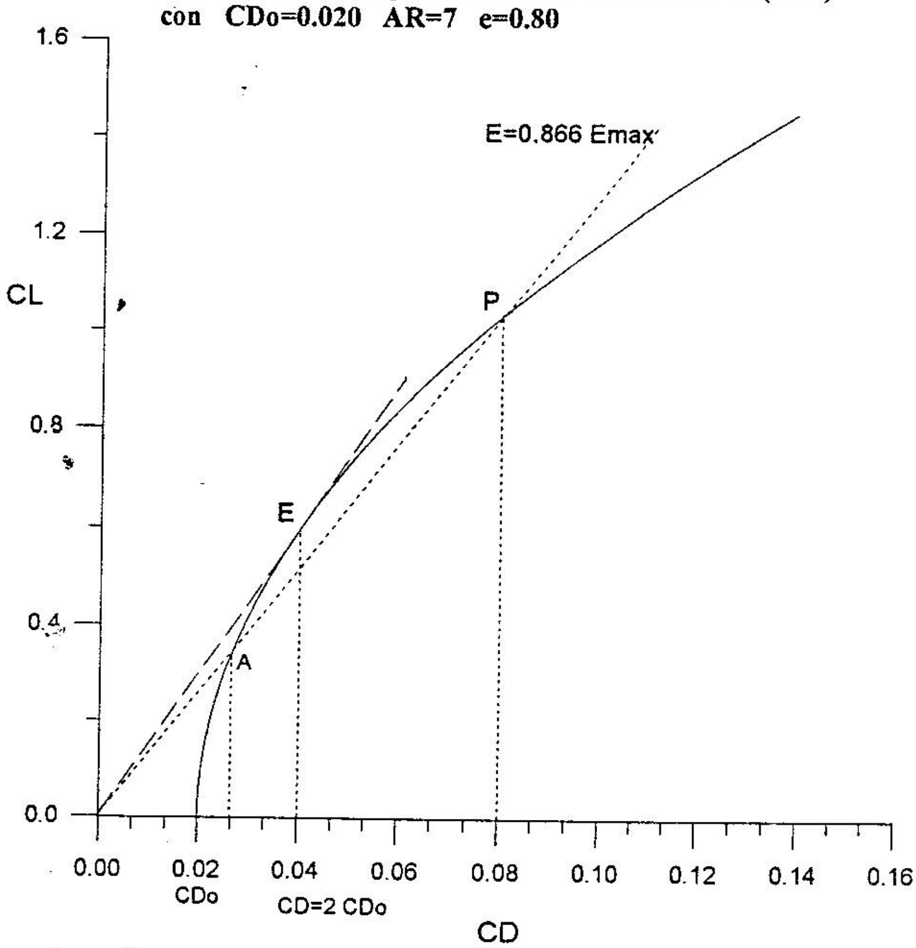
$$T_{max} = \frac{E_{max}}{c_{sj}} \ln\left(\frac{W_{in}}{W_{fin}}\right)$$

Quindi, nell'ipotesi di consumo spec costante con V, la max autonomia oraria si ottiene nel punto E della polare.

RIEPILOGO PUNTI CARATTERISTICI DELLA POLARE

PUNTO	Effic.	C_L	C_D
A	$E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$	$C_{L_A} = \frac{C_{L_E}}{\sqrt{3}} = 0.577\,C_{L_E}$	$C_{D_A} = C_{Do} + \frac{1}{3}C_{Do} = \frac{4}{3}C_{Do}$
E	$E=E_{max}=\sqrt{\frac{\pi\,AR_e}{4\,C_{Do}}}$	$C_{L_E} = \sqrt{\pi\,AR_e\,C_{Do}}$	$C_{D_E} = C_{Do} + C_{Do} = 2\,C_{Do}$
P	$E=\sqrt{\frac{3}{4}}\,E_{max} = 0.866\,E_{max}$	$C_{L_P} = \sqrt{3}\,C_{L_E} = 1.732\,C_{L_E}$	$C_{D_E} = C_{Do} + 3\,C_{Do} = 4\,C_{Do}$

Esempio di polare parabolica CD=CDo + CL^2 /(ARe)
con CDo=0.020 AR=7 e=0.80

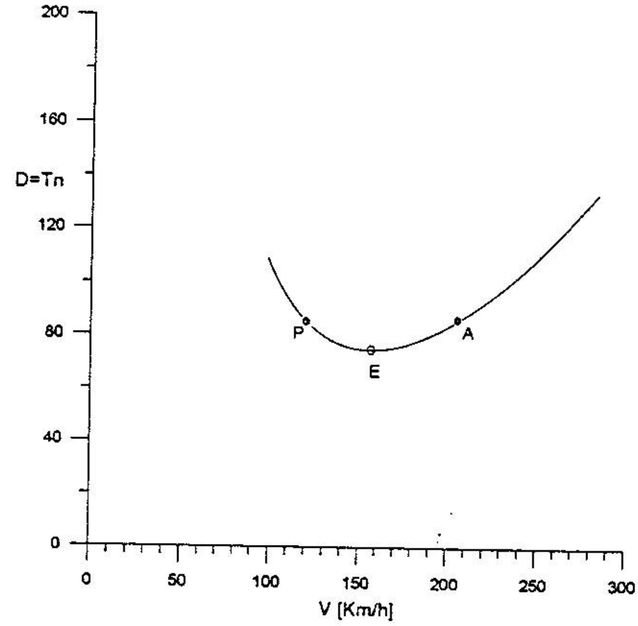


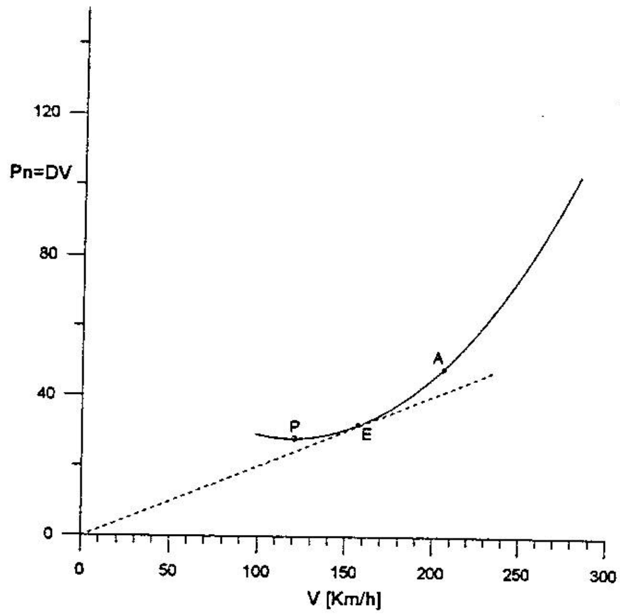
Importanza dei vari punti :

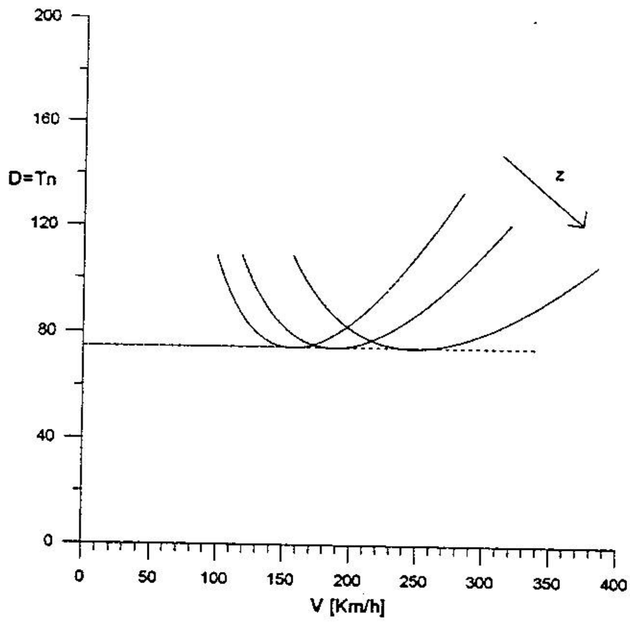
PUNTO E = Max autonomia di distanza velivolo ad elica
(max Efficienza) Max autonomia oraria velivolo a getto

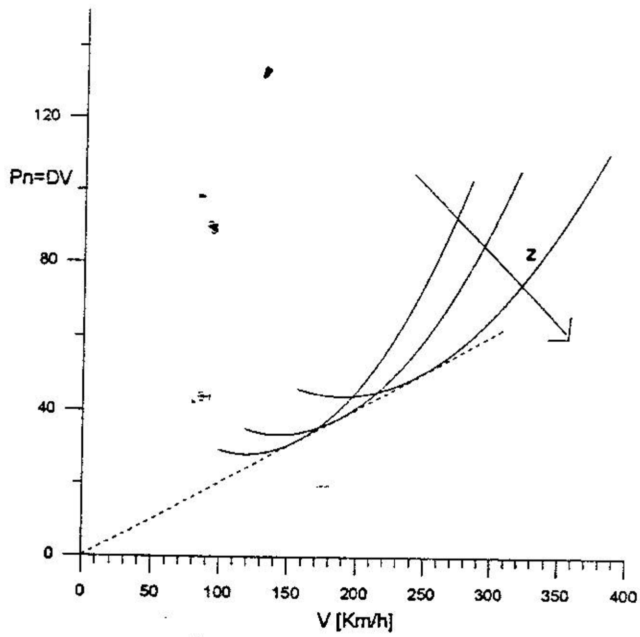
PUNTO A = Max autonomia di distanza velivolo a getto
(E V)=max
$(E/\sqrt{C_L})$=max

PUNTO P = Max autonomia oraria velivolo ad elica
Min. pot. nec al volo orizz
$(E\,\sqrt{C_L})$=max


200
160
D=Tn
120
80
40
0
P
E
A
0
50
100
150
200
250
300
V [Km/h]


120
Pn=DV
80
40
0
P
E
A
0
50
100
150
200
250
300
V [Km/h]


200
160
D=Tn
120
80
40
0
z
0
50
100
150
200
250
300
350
400
V [Km/h]


120
Pn=DV
80
40
0
Z
0
50
100
150
200
250
300
350
400
V [Km/h]

66