



Corso di laurea triennale in **DESIGN PER LA COMUNITA'**

Programma preventivo del corso di

## **Matematiche e leggi geometriche della forma**

a.a.2023/24

prof. Alberto Fiorenza

Il corso svilupperà una selezione dei seguenti argomenti:

- 1. Cenni di teoria degli insiemi. I numeri reali e il piano cartesiano.** Insiemi e operazioni sugli insiemi, simboli di insieme vuoto, appartenente, contenuto, contenente, unione, intersezione. Coppie, terne ordinate. Numeri naturali, interi relativi, razionali, reali. Rette, piani. Rappresentazione geometrica dei numeri reali su una retta, delle coppie ordinate di numeri reali sul piano, delle terne ordinate di numeri reali nello spazio, ascissa, ordinata, quota.
- 2. Le forme elementari dell'Analisi Matematica 1.** Rette in forma cartesiana, esplicita, parametrica. Segmenti, semirette. Funzioni. Grafico della funzione potenza con esponente naturale, del polinomio di secondo grado, della radice quadrata, del valore assoluto, della funzione esponenziale e del logaritmo, della funzione seno, coseno, tangente, arcoseno, arcocoseno, arcotangente.
- 3. Vettori.** Vettori e scalari, segmenti orientati. Operazioni sui vettori: somma, differenza, moltiplicazione per uno scalare. Componenti cartesiane, versori, prodotto scalare, prodotto vettoriale. Applicazione: gli spazi dei colori. Applicazione: equazione della retta nel piano e del piano nello spazio.
- 4. Matrici.** Matrici, elementi, righe e colonne di una matrice, matrice nulla, matrice riga, matrice colonna, matrice quadrata, matrice identica, matrice simmetrica, matrice diagonale, matrice trasposta. Operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione per uno scalare, moltiplicazione righe per colonne, determinante, inversa. Applicazione: matrici associate alle trasformazioni (traslazione, scalatura isotropica/anisotropa, rotazione, simmetria speculare, affini) di punti e vettori in coordinate omogenee. Matrici associate a sequenze di trasformazioni.
- 5. Cenni di teoria dei nodi.** Nodi, link e componenti, nodo banale, sciolto. Anelli borsemei, nodo trifoglio, link di Hopf. Nodi equivalenti. Diagramma di un nodo, punti di incrocio propri e impropri. Nodi semplici e non semplici. Ponti e archi. Invarianti topologici, proiezioni minime e movimenti di Reidemeister. Crossing number. Matrice associata al diagramma di un nodo. Classificazione dei nodi: lista dei nodi con al più otto incroci.
- 6. Poligoni.** Poligoni, vertici, lati, angoli interni, angoli esterni. Triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ettagoni, ottagoni, ennagoni, decagoni. Perimetro. Poligoni convessi, concavi, equilateri, equiangoli, regolari. Diagonali di un poligono. Triangoli e loro proprietà. Triangoli equilateri, isosceli, scaleni, acutangoli, ottusangoli, rettangoli. Altezze, mediane, bisettrici e assi; ortocentro, baricentro, incentro, circocentro. Applicazione: teoria di Inigo Jones su Stonehenge. Applicazione: monumenti ottagonali nel bacino mediterraneo. Sezione aurea, numero aureo, costruzione geometrica, lato del decagono regolare, pentagramma, triangolo aureo. Applicazione: la sezione aurea nell'Architettura. Fibonacci, successione di

Fibonacci e proprietà di Keplero. Applicazione: dimensione dei formati rettangolari della carta A0, A1, A2, A3, A4.

**7. Circonferenze, ellissi, ovali, curve di ampiezza costante.** Circonferenze, cerchi, centro, raggi, diametri, archi, corde, area del cerchio, lunghezza della circonferenza. Punti interni, esterni. Semicirconferenze, semicerchi, quadranti circolari, settori circolari. Angoli alla circonferenza. Applicazione: angolo di massima visibilità. Posizioni reciproche di rette e circonferenze nel piano. Poligoni inscritti e circoscritti. Problema della ciclotomia. Cenni sulla costruzione dei poligoni regolari con riga e compasso, numeri primi di Fermat. Cenni sulla costruzione dell'ettagono regolare. Applicazione: i meridiani del Pantheon e i numeri perfetti. Circonferenze in Geometria Analitica: equazioni ottenute tramite matrici di traslazione e scaling isotropico. Circonferenze in Analisi Matematica come unione di grafici di funzioni. Circonferenze immerse nello spazio. Disuguaglianza isoperimetrica. Ellissi: ellissi in Architettura, ellisse come luogo geometrico, equazione canonica, area dell'ellisse. Ellissi in Geometria Analitica: equazioni ottenute tramite matrici di scaling anisotropo. Eccentricità, rette tangenti, proprietà acustica. Applicazione: forme ellittiche a Les Halles, Paris; galleria dei sussurri, Statuary Hall, Washington. Compasso ellittico. Ovali: ovali in architettura, ovale di Sebastiano Serlio, ovale di Cartesio, ovale di Cassini. Curve di ampiezza costante: triangolo di Reuleaux. Applicazione: trapano per realizzare fori quadrati.

**8. Iperbole, parabola e generalità sulle coniche.** Iperboli. Iperboli in Architettura. Iperboli in Geometria Analitica: centro, fuochi, vertici, asse, asintoti, equazione canonica, eccentricità. Iperbole equilatera. Iperboli in Analisi Matematica come grafici di funzioni razionali. Parabole. Parabole in natura. Parabole in Geometria Analitica: fuoco, direttrice. Costruzione mediante cerchi concentrici. Parabole in Analisi Matematica come grafici di funzioni polinomiali di secondo grado. Concavità e apertura della parabola. Equazioni parametriche di una parabola. Applicazioni: parabola per calcolo del prodotto tra numeri. Applicazioni della proprietà di riflessione della parabola: torcia olimpica, specchi parabolici, fari, torce e proiettori; illuminazione solare ibrida; parabola solare termica; telescopi astronomici; microfoni; parabole satellitari; radiotelescopi. Applicazioni nell'Arte: i miraggi. Costruzione delle tangenti di una parabola tramite origami. Coniche come sezioni di un cono circolare retto, come curve algebriche del secondo ordine, matrice dei coefficienti di una conica. Cenni di storia dello studio delle coniche.

**9. Origami.** Postulati della Geometria euclidea. Costruzioni con riga e compasso. I tre problemi classici dell'antichità. Origami come arte di piegare la carta e come teoria geometrica. Gli assiomi di Scimemi-Huzita-Hatori.

**10. Circonferenze non rotonde.** Proposizione ventesima del primo libro di Euclide: la disuguaglianza triangolare. Il concetto di distanza in Matematica. Gli spazi metrici. Cenni sul disco di Poincaré: nozione di punto e retta. Applicazione: opere di Escher ispirate al disco di Poincaré. La metrica urbanistica. Applicazione: superellissi di Piet Hein.

**11. Quadriche.** Quadriche in Geometria Analitica, come superfici algebriche del secondo ordine. Ellissoidi, iperboloidi, paraboloidi. Applicazioni in Architettura: il padiglione Philips di Le Corbusier (Expo 1958), la Sagrada Familia. Le coniche come sezioni di un iperboloide. Applicazioni in Design industriale: fruttiere, lampadari, sgabelli.

**12. La catenaria.** La catenaria nella Storia. Le funzioni iperboliche: definizione analitica e geometrica. Applicazione: la catenaria nelle opere di Gaudì. La catenoide. Applicazione: la stabilità degli archi in muratura; la Cupola di Santa Maria del Fiore e il Ponte di Santa Trinita a Firenze; gli hangar, il Gateway Arch di St. Louis. La catenaria in natura.

**13. I poliedri.** I poliedri: vertici, facce, spigoli. Diedri e angoloidi. Poliedri convessi. Prismi, parallelepipedi, cubi, piramidi. Applicazione: le piramidi in Architettura. Formulario. I poliedri regolari convessi: i solidi platonici. Dualità dei poliedri regolari. Formula di Eulero. I poliedri regolari non-convessi: i poliedri di Keplero-Poinsot. I solidi archimedei.

**14. I fregi.** I gruppi. Le simmetrie. La simmetria in Architettura. Le isometrie. Classificazione delle isometrie del piano: l'identità, la traslazione, la rotazione, la riflessione, la glissosimmetria. Isometrie pari e dispari. Il gruppo delle simmetrie. I fregi. Classificazione del gruppo dei fregi.

**15. I mosaici e le tassellazioni, cenni su sezionamenti geometrici e rosoni.** Tassellazioni del piano e dello spazio. Mosaici. Applicazioni in Architettura, Design, in natura. Tassellazioni del piano con poligoni regolari. Tassellazioni con poligoni non regolari. Classificazione dei poligoni convessi che tassellano il piano. Polimini: il monomino, il duomino, i trimini, i tetramini, i pentomini. Applicazione al Design: le pavimentazioni. Mosaici semiregolari (o Archimedei). I gruppi delle carte da parati e loro classificazione. Tassellazioni periodiche e tassellazioni aperiodiche. Applicazioni nel Design: le tassellazioni nelle opere di Escher, le decorazioni di ceramiche fiorentine. La tassellazione di Penrose, dart e kite. La mattonella di Einstein. Applicazione in Architettura: Storey Hall a Melbourne, Australia. Sezionamenti geometrici: il Tangram. Il paradosso di Banach-Tarski. Le dissezioni dei poligoni. I rosoni e il dominio fondamentale. I gruppi dei rosoni. Applicazione: i rosoni in Architettura. Cenni sulle tassellazioni dello spazio.

**16. Labirinti e grafi.** Origine mitologica dei labirinti. Labirinti effimeri. Applicazione: alcuni noti labirinti effimeri in Italia e all'estero. Labirinti unicursali. Cenni di teoria dei grafi. Facce, spigoli, vertici e formula di Eulero. Grafi planari e nonplanari. Suddivisione di un grafo, supergrafo e teorema di Kuratowski. Percorsi euleriani. Labirinto di Creta. Applicazione della teoria dei grafi per la soluzione di labirinti: l'algoritmo di Tremaux. Cenni sull'algoritmo di Ore.

**17. Curve, spirali, eliche.** Rappresentazione cartesiana di una curva nel piano e nello spazio. Esempi di curve in forma parametrica. Coordinate polari. Spirali di Archimede. Spirali di Fermat. Spirale logaritmica. Spirale aurea. Variazioni sul tema: le anti-spirali. La spirale iperbolica. Eliche. Applicazioni: le scale elicoidali in Architettura, le scale a chiocciola, scale a chiocciola doppia. Elicoidi. Eliche ellittiche, iperboliche, coniche. Applicazioni al Design.

**18. La sfera e i solidi rotondi.** I solidi a superficie curva. Il cilindro, area delle superfici del cilindro, volume del cilindro. Il cono, area delle superfici del cono, volume del cilindro. La sfera. Posizioni reciproche di un piano e una sfera. Area della superficie sferica e volume della sfera. La sfera come particolare ellissoide. Il principio di Cavalieri e il volume della sfera dal punto di vista sintetico degli antichi Greci. Il volume della sfera ottenuto per approssimazione di unioni di tetraedri. Volume della sfera al variare della dimensione. La sfera in forma parametrica. Il cilindro retto a base circolare in forma parametrica. La superficie conica. Applicazione: studio della forma della cappella di Sogn Benedetg, Svizzera.



**19. Il nastro di Möbius.** Costruzione del nastro di Möbius. Il nastro di Möbius nell'opera di Escher. Esperimenti sul nastro di Möbius: video. Il nastro di Möbius nell'arte, in Architettura, nelle cinghie di distribuzione, nel Design. Il nastro di Möbius in forma parametrica.

**20. Rappresentazione poligonale di superfici.** Approssimazione di curve mediante poligonali per la definizione di lunghezza. Mesh poligonali: triangolari, quadrilateri, poligoni generici. La risoluzione delle mesh. Il problema delle triangolazioni. Applicazioni nell'arte e nell'Architettura: costruzioni e disegni di mesh.

**21. Curve di Bézier e cenni sulle spline.** Richiami su equazioni parametriche di curve ed esempi. Teorema del binomio di Newton e coefficienti binomiali. Insiemi convessi. Combinazioni convesse. Curve per il CAD: differenza tra curve approssimanti e curve interpolanti. Curve di Bézier. Polinomi di base di Bernstein, poligoni di Bézier. Spline.

**22. I frattali.** Richiami di Analisi Matematica I su estremo superiore e inferiore. Diametro di un insieme. La dimensione di un insieme del piano o dello spazio secondo Hausdorff. La dimensione di un punto. Insiemi autosimilari. Formulazione geometrica della nozione di dimensione per insiemi autosimilari. I frattali. Curva di von Koch: costruzione e deduzione della sua dimensione. L'insieme di Mandelbrot: costruzione. Il frattale più antico: la funzione di Weierstrass. I frattali in natura e in informatica.