POTENZE CON ESPONENTE REALE

Si «possono calcolare» $7^{\frac{5}{4}}, (-1)^{\frac{1}{3}}, (-4)^{-3}, (-5)^{-\frac{1}{4}}$?
In termini più rigorosi ci chiediamo: dato $\alpha \in \mathbb{R}$, per quali x si definisce x^α? E *come* si definisce x^α?
La risposta è purtroppo molto articolata: per certi α il simbolo x^α si definisce per ogni $x \in \mathbb{R}$, per altri α il simbolo x^α si definisce per ogni $x \in [0, +\infty[$, per altri α si considerano solo le $x \in]0, +\infty[$, per altri α ancora si considerano le $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Il dominio e la definizione della legge di corrispondenza dipendono da α.

DEF. (caso $\boldsymbol{\alpha = 0}$): $x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

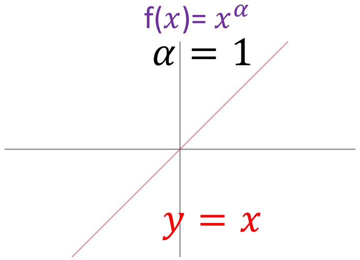
Se $\alpha > 0$,

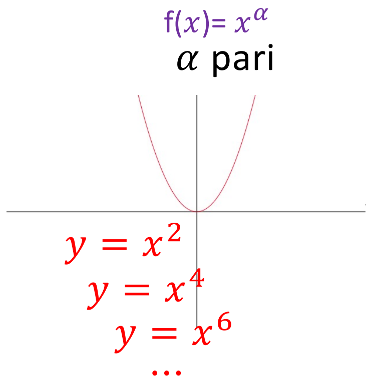
primo caso: $\alpha \in \mathbb{N}$

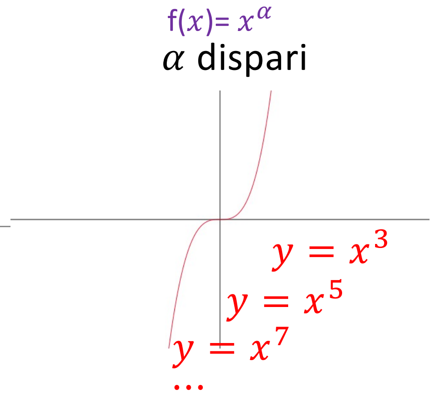
Dominio: $\mathbb{R}$

DEF. $x^{\alpha} = x \cdot x \cdot x \cdots \cdot x$

$(\alpha \textit{ volte})$



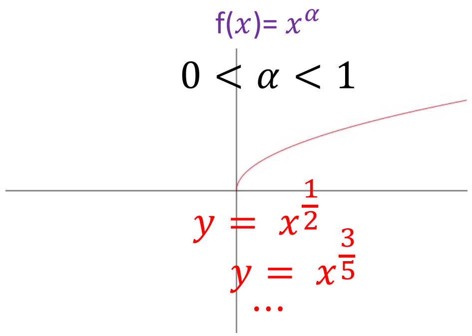


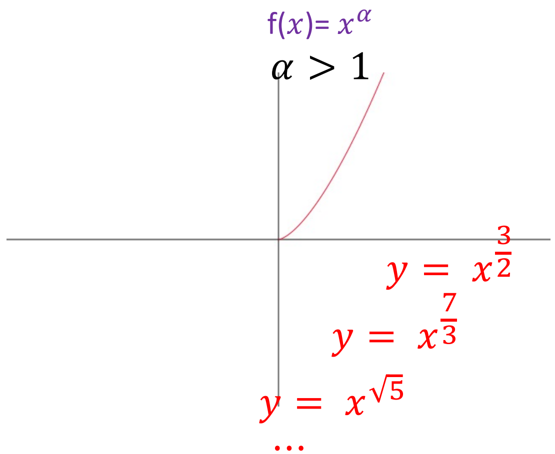


secondo caso: α non intero

Dominio: $[0, +\infty[$

DEF. $(\textit{vedi pagina seguente}!)$





DEF. (caso $\boldsymbol{\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}}$):

Se $\alpha > 0$ e $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, allora $\alpha = \frac{m}{n}$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Per ogni $x \geq 0$ il simbolo x^{α} $\left(= x^{\frac{m}{n}}\right)$ denota l'unico (si **dimostra** che esiste ed è unico) numero reale non negativo tale che

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = x^{m}.$$

Se $\alpha > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, si pone

$$x^{\alpha} = \sup\{x^{q} : q \in \mathbb{Q}, 0 < q < \alpha\} \text{ se } x \geq 1,$$

$$x^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} \text{ se } 0 < x < 1$$

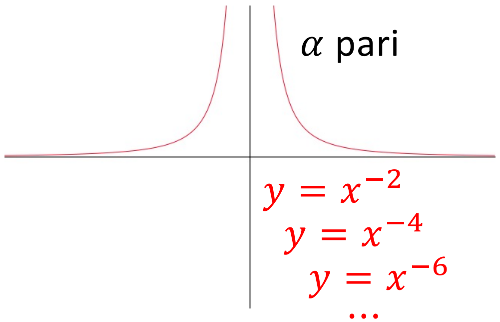
$$0^{\alpha} = 0$$

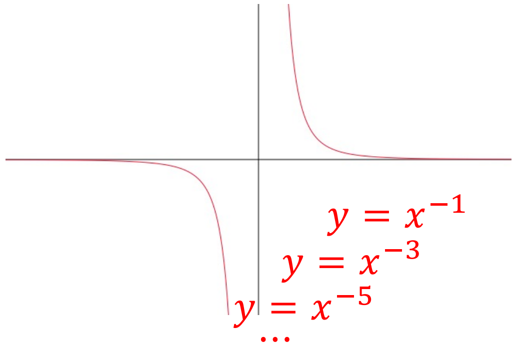
DEF. (caso $\alpha < 0$): $x^{\alpha} = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$

Se $\alpha < 0$,

primo caso: $\alpha \in \mathbb{Z}$

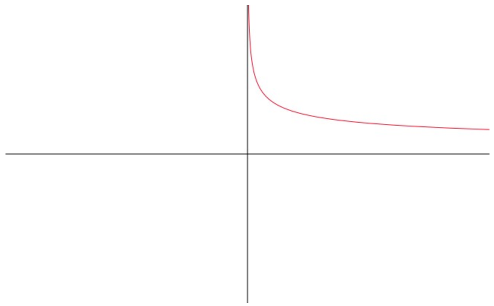
Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$





secondo caso: α non intero

Dominio: $]0, +\infty[$



Perché si preferisce sviluppare una teoria con tante definizioni diverse per uno stesso simbolo?

Si dimostra che, con le definizioni appena esposte, valgono «sempre» le

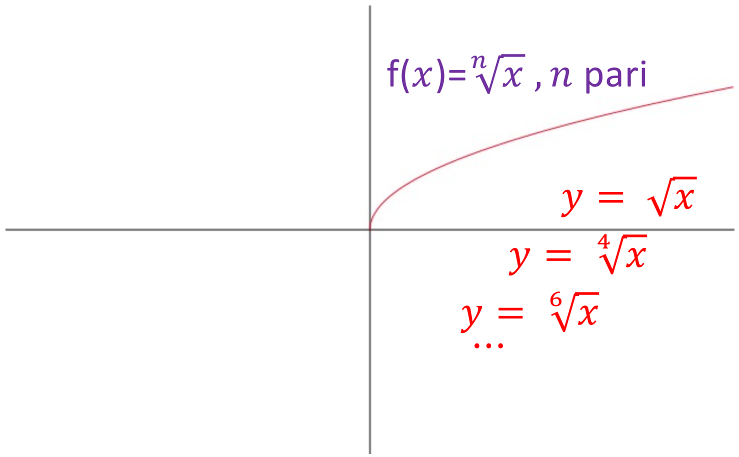
PROPRIETA' DELLE POTENZE: $\begin{cases} x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 + \alpha_2} \\ (x^{\alpha_1})^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 \cdot \alpha_2} \end{cases}$

«sempre» vuol dire: se ambo i membri di queste uguaglianze hanno senso (cioè rientrano nelle definizioni che abbiamo dato), allora coincidono. Si dimostra anche che le definizioni date sono le uniche possibili per rendere vere queste due proprietà.

RADICI ENNESIME, CASO n PARI

Se $n \in \mathbb{N}$ è pari, la funzione $x \in [0, +\infty[\longrightarrow x^n \in [0, +\infty[$ (si **dimostra** che) è invertibile e la sua inversa è <u>per definizione</u> la funzione radice ennesima. Equivalentemente: per ogni $x \geq 0$ il simbolo $\sqrt[n]{x}$ ($\sqrt{x}$ nel caso $n = 2$) denota l'unico numero reale non negativo tale che

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$

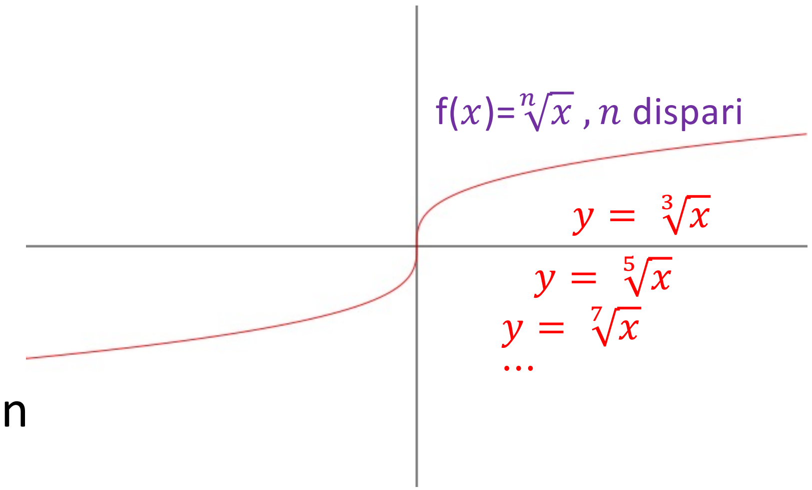


Commento: questa definizione coincide con la definizione di $x^{\frac{1}{n}}$. Quindi **se n** $\in \mathbb{N}$ **è pari**, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ e i due simboli hanno significato per gli stessi valori di x (cioè $x \geq 0$).

RADICI ENNESIME, CASO n DISPARI > 1

Se $n \in \mathbb{N}$ è dispari e > 1, la funzione $x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^n \in \mathbb{R}$ (si **dimostra** che) è invertibile e la sua inversa è <u>per definizione</u> la funzione radice ennesima. Equivalentemente: per ogni $x \in \mathbb{R}$ il simbolo $\sqrt[n]{x}$ denota l'unico numero reale tale che

$$(\sqrt[n]{x})^n = x$$



Commento: questa definizione coincide con la definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ solo se $x \geq 0$. Quindi **se $n \in \mathbb{N}$ è dispari e > 1**, per le $x < 0$ si può «calcolare» $\sqrt[n]{x}$ ma non $x^{\frac{1}{n}}$. I due simboli non significato per gli stessi valori di x.

OSSERVAZIONE

Il simbolo $(-1)^{\frac{1}{3}}$ è privo di significato. Scegliendo di definire

«DEF.» $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ (equivalentemente: $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$)

si avrebbe una potenza non verificante una delle due proprietà delle potenze. Infatti, ammettendo di avere contemporaneamente la «DEF.» e le proprietà delle potenze, si potrebbe dimostrare che -1=1 come segue:

-1 = $(-1)^{\frac{1}{3}}$ = $(-1)^{\frac{2}{6}}$ = $[(-1)^2]^{\frac{1}{6}}$ = $1^{\frac{1}{6}}$ = 1

Da notare, invece, che $\sqrt[3]{-1} = -1$ perché $(-1)^3 = -1$.
E' anche da notare che la catena di uguaglianze non si può ripetere con le radici, perché $\sqrt[3]{-1} \neq \sqrt[6]{(-1)^2}$ (mentre $(-1)^{\frac{1}{3}}$ = $(-1)^{\frac{2}{6}}$ perché 1/3 = 2/6).