APPUNTI SUL RANGO (O CARATTERISTICA) DI UNA MATRICE

Immaginiamo che sia stata assegnata una matrice A di 9 righe e 7 colonne:

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \text{(in ogni puntino immaginiamo un numeretto...)}$$

e che la matrice A abbia la seguente proprietà:

Tutte le sottomatrici quadrate di A, di ordine 4, hanno determinante uguale a zero

Sia B una sottomatrice quadrata di A di ordine CINQUE (presa “a caso”). Domanda: $\det B = ?$

Ricordando che *Il determinante di una matrice quadrata è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga (o di una qualunque colonna) per i rispettivi complementi algebrici,* e ricordando che i complementi algebrici sono, a meno di un segno, determinanti di sottomatrici quadrate aventi un ordine in meno, risulta (con le notazioni introdotte nelle lezioni scorse)

$$\det B = b_{11} \det B_{11} - b_{12} \det B_{12} + b_{13} \det B_{13} \ \textit{ecc.} \ = 0$$

in quanto le matrici B_{11}, B_{12}, B_{13}, ecc. sono quadrate di ordine 4 e $\det B_{11}$, $\det B_{12}$, $\det B_{13}$, ecc. sono tutti nulli per la proprietà scritta in rosso.

Se ora consideriamo una (qualunque) sottomatrice quadrata di ordine SEI, a quanto sarà uguale il suo determinante? Con le stesse considerazioni, il determinante sarà uguale a zero.

...e il determinante di una (qualunque) sottomatrice quadrata di ordine SETTE? zero!

...di ordine OTTO? [*non ci sono sottomatrici di ordine* 8 *in una matrice* 9×7 *!*]

Conseguenza della proprietà scritta in rosso:
Tutte le sottomatrici quadrate di ordine maggiore di 4 hanno determinante nullo.

Ora proviamo ad andare "a ritroso" :

Consideriamo tutte le sottomatrici quadrate di A di ordine TRE. Le possibilità sono due:
PRIMA POSSIBILITA': hanno tutte il determinante nullo;
SECONDA POSSIBILITA': esiste una sottomatrice quadrata di A di ordine TRE con determinante diverso da zero.

Nella seconda possibilità il numero TRE è il più grande *ordine di una sottomatrice quadrata di A avente determinante diverso da zero.* Il numero TRE è ciò che chiamiamo RANGO della matrice A. Il numero TRE gode, nel caso preso in esame, di due proprietà:
* esiste una sottomatrice quadrata di ordine 3 avente determinante diverso da zero
* ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di 3 ha determinante uguale a zero

Dopo aver compreso quanto sopra, la definizione di rango scritta nel testo che stiamo adottando dovrebbe risultare comprensibile. Eccola qui di seguito (Def. 7.84 pag. 447):

> *Una matrice $A \in \mathcal{M}_{nm}$ ha rango $R(A) = k \geq 1$ se e solo se esiste una sua sottomatrice quadrata di ordine k con determinante diverso da zero e tutte le (eventuali) sottomatrici quadrate di ordine $k+1$ hanno determinante uguale a zero. Si definisce $R(A) = 0$ se e solo se tutti gli elementi di A sono nulli.*

Commenti finali:

1) ... e nella prima possibilità? il più grande ordine di una sottomatrice quadrata di A avente determinante diverso da zero non può essere tre, visto che tutte le sottomatrici quadrate di ordine 3 hanno determinante nullo. A questo punto consideriamo le sottomatrici quadrate di ordine 2. Se ne trovo anche una soltanto con determinante non nullo, il rango sarà 2. Se invece hanno tutte determinante nullo, consideriamo le sottomatrici quadrate di ordine 1, cioè gli elementi della matrice. Come prima: se

esiste anche un solo elemento non nullo, il rango è 1; se la matrice di partenza aveva tutti gli elementi nulli, allora il rango è 0.

2) se una matrice di 9 righe e 7 colonne ha una sottomatrice quadrata di ordine 7 con determinante diverso da zero, il rango è 7: 7 è comunque il più grande ordine di una sottomatrice quadrata di A avente determinante diverso da zero (ogni numero più grande di 7 non è proprio ordine di alcuna sottomatrice quadrata).

3) nella definizione di rango, invece di "di ordine $k+1$" si può anche dire "di ordine maggiore" (è una conseguenza di tutto il ragionamento iniziale: se sono nulli tutti i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine $k+1$, sono nulli anche quelli delle sottomatrici quadrate di ordine $k+2$, ecc., ovvero tutti i determinanti delle sottomatrici quadrate di ordine maggiore di k).

4) il rango è minore o uguale al minimo tra il numero di righe e il numero di colonne: infatti è, in particolare, l'ordine di una sottomatrice quadrata della matrice di partenza (ogni sottomatrice non può avere più righe o più colonne della matrice di partenza).

5) Troppe volte abbiamo dovuto considerare il "determinante di una sottomatrice quadrata di A" : per semplificare il linguaggio, spesso si usa il termine "minore di A" . Dunque si dice "minore di A" il determinante di ogni sottomatrice quadrata di A. L'ordine di un minore è, per definizione, l'ordine della sottomatrice di cui si calcola il determinante. Per esempio: la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ possiede tre minori di ordine 2 (precisamente, i minori sono -5, 4, 8) e cinque minori di ordine 1 (precisamente, i minori sono 0,1,2,3,4).

6) Una matrice quadrata A di ordine n ha rango n se e solo se il suo determinante è diverso da zero. *Infatti, se $detA \neq 0$, allora $detA$ è un minore di ordine n non nullo e, non esistendo minori di ordine più grande, il rango è n. Viceversa, se il rango di A è n, allora deve esistere un minore di ordine n non nullo. Poiché $detA$ è l'unico minore di ordine n, deve essere necessariamente $detA \neq 0$.*

7) Immediata conseguenza di 6): una matrice quadrata A di ordine n ha rango minore di n se e solo se il suo determinante è uguale a zero.

8) Il rango di una matrice coincide con quello della sua trasposta. *Infatti basta osservare che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi minori. I minori di*

una matrice e della sua trasposta coincidono perché le sottomatrici quadrate della trasposta di una matrice A sono proprio le trasposte delle sottomatrici quadrate di A, e l'operazione di trasposizione non altera il determinante (ricordiamo che questa è una delle proprietà dei determinanti).

9) Scambiando due o più righe (oppure due o più colonne) di una matrice, il rango non cambia. *Infatti l'effetto di uno scambio di due righe (oppure due colonne) si riflette su alcune sottomatrici quadrate, i cui determinanti cambiano di segno. I minori che erano nulli rimangono tali, quelli non nulli possono al più cambiare di segno (e quindi anche quelli non nulli rimangono tali). Ne segue che il massimo ordine dei minori non nulli non cambia.*