DEFINIZIONE DI potenza con esponente $1/m$ $(m \in \mathbb{N}^+, m>1)$

$f : x \in \underset{A}{[0,+\infty[} \longrightarrow f(x) = x^m \in \underset{B}{[0,+\infty[}$ è invertibile, quindi

$\forall y \in \underset{B}{[0,+\infty[}\ \exists!\, x \in \underset{A}{[0,+\infty[} : \underset{f(x)}{x^m} = y$

DEF $f^{-1}(y) = y^{1/m} = x$, cioè per ogni $y \in \underset{B}{[0,+\infty[}$

$\underset{f^{-1}(y)}{y^{1/m}}$ è l'unico elemento di $\underset{A}{[0,+\infty[}$ tale che $\underset{f(f^{-1}(y))}{(y^{1/m})^m} = y \quad \forall y \in \underset{B}{[0,+\infty[}$

Osservazione: fissato $x \in \underset{A}{[0,+\infty[}$, posto $y = \underset{f(x)}{x^m}$,

poiché $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underset{f^{-1}(f(x))}{(x^m)^{1/m}} = x \quad \forall x \in \underset{A}{[0,+\infty[}$

schema per definizioni di alcune funzioni elementari

DEFINIZIONE DI radice ennesima ($n \in \mathbb{N}^+$, n pari)

$f : x \in \underbrace{[0,+\infty[}_{A} \longrightarrow f(x) = x^n \in \underbrace{[0,+\infty[}_{B}$ e' invertibile, quindi

$\forall y \in \underbrace{[0,+\infty[}_{B} \ \exists!\, x \in \underbrace{[0,+\infty[}_{A} : \underbrace{x^n}_{f(x)} = y$

<u>**DEF.**</u> $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = x$, cioe' per ogni $y \in \underbrace{[0,+\infty[}_{B}$

$\underbrace{\sqrt[n]{y}}_{f^{-1}(y)}$ e' l'unico elemento di $\underbrace{[0,+\infty[}_{A}$ tale che $\underbrace{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n}_{f(f^{-1}(y))} = y \ \ \forall y \in \underbrace{[0,+\infty[}_{B}$

Osservazione: fissato $x \in \underbrace{[0,+\infty[}_{A}$, posto $y = \underbrace{x^n}_{f(x)}$,

Se n e' pari

$\sqrt[n]{y} = y^{1/n} \ \forall y \geq 0$

poiche' $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underbrace{\sqrt[n]{x^n}}_{f^{-1}(f(x))} = x \ \ \forall x \in \underbrace{[0,+\infty[}_{A}$

DEFINIZIONE DI radice ennesima ($n \in \mathbb{N}^+$, $\underline{n \text{ dispari}}$)

$f : \underset{A}{x \in \mathbb{R}} \longrightarrow f(x) = x^n \in \underset{B}{\mathbb{R}}$ è invertibile, quindi

$\forall \underset{B}{y \in \mathbb{R}} \quad \exists!\, \underset{A}{x \in \mathbb{R}} : \underbrace{x^n}_{f(x)} = y$

$\underline{\text{DEF}}$ $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = x$, cioè per ogni $\underset{B}{y \in \mathbb{R}}$

$\underset{f^{-1}(y)}{\sqrt[n]{y}}$ è l'unico elemento di $\underset{A}{\mathbb{R}}$ tale che $\underbrace{(\sqrt[n]{y})^n}_{f(f^{-1}(y))} = y \quad \forall y \in \underset{B}{\mathbb{R}}$

Osservazione: fissato $x \in \underset{A}{\mathbb{R}}$, posto $y = \underset{f(x)}{x^n}$,

se n è dispari $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$ solo se $y \geq 0$

poiché $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underset{f^{-1}(f(x))}{\sqrt[n]{x^n}} = x \quad \forall x \in \underset{A}{\mathbb{R}}$

schema per definizioni di alcune funzioni elementari

DEFINIZIONE DI logaritmo di base a $(a>0,\ a\neq 1)$

$f : x \in \underset{A}{\mathbb{R}} \longrightarrow f(x) = a^x \in \underset{B}{]0,+\infty[}$ è invertibile, quindi

$\forall y \in \underset{B}{]0,+\infty[}\ \exists!\, x \in \underset{A}{\mathbb{R}} : \underset{f(x)}{a^x} = y$

DEF $f^{-1}(y) = \log_a y = x$, cioè per ogni $y \in \underset{B}{]0,+\infty[}$

$\underset{f^{-1}(y)}{\log_a y}$ è l'unico elemento di $\underset{A}{\mathbb{R}}$ tale che $\underset{f(f^{-1}(y))}{a^{\log_a y}} = y \quad \forall y \in \underset{B}{]0,+\infty[}$

Osservazione: fissato $x \in \underset{A}{\mathbb{R}}$, posto $y = \underset{f(x)}{a^x}$,

poiché $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underset{f^{-1}(f(x))}{\log_a(a^x)} = x \quad \forall x \in \underset{A}{\mathbb{R}}$

DEFINIZIONE DI arcoseno

$f : x \in \underset{A}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} \longrightarrow f(x) = \operatorname{sen} x \in \underset{B}{[-1,1]}$ e' invertibile, quindi

$\forall\, y \in \underset{B}{[-1,1]} \;\; \exists!\, x \in \underset{A}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \underset{f(x)}{\operatorname{sen} x} = y$

<u>DEF.</u> $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y = x$, cioe' per ogni $y \in \underset{B}{[-1,1]}$

$\underset{f^{-1}(y)}{\operatorname{arcsen} y}$ e' l'unico elemento di $\underset{A}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ tale che $\underset{f(f^{-1}(y))}{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y)} = y \;\; \forall y \in \underset{B}{[-1,1]}$

Osservazione: fissato $x \in \underset{A}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$, posto $y = \underset{f(x)}{\operatorname{sen} x}$,

poiche' $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underset{f^{-1}(f(x))}{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)} = x \;\; \forall x \in \underset{A}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

DEFINIZIONE DI arcocoseno

$f : x \in \underbrace{[0,\pi]}_{A} \longrightarrow f(x) = \cos x \quad \in \underbrace{[-1,1]}_{B}$ è invertibile, quindi

$$\forall\, y \in \underbrace{[-1,1]}_{B} \ \exists!\, x \in \underbrace{[0,\pi]}_{A} : \underbrace{\cos x}_{f(x)} = y$$

DEF $f^{-1}(y) = \arccos y = x$, cioè per ogni $y \in \underbrace{[-1,1]}_{B}$

$\underbrace{\arccos y}_{f^{-1}(y)}$ è l'unico elemento di $\underbrace{[0,\pi]}_{A}$ tale che $\underbrace{\cos(\arccos y)}_{f(f^{-1}(y))} = y \quad \forall y \in \underbrace{[-1,1]}_{B}$

Osservazione: fissato $x \in \underbrace{[0,\pi]}_{A}$, posto $y = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$,

poiché $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underbrace{\arccos(\cos x)}_{f^{-1}(f(x))} = x \quad \forall x \in \underbrace{[0,\pi]}_{A}$

arcocoseno : $\underbrace{[-1,1]}_{B} \to \underbrace{[0,\pi]}_{A}$

DEFINIZIONE DI arcotangente

$f : x \in \underset{A}{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} \longrightarrow f(x) = \operatorname{tg} x \in \underset{B}{\mathbb{R}}$ è invertibile, quindi

$\forall\, y \in \underset{B}{\mathbb{R}} \quad \exists!\, x \in \underset{A}{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} : \underset{f(x)}{\operatorname{tg} x} = y$

<u>**DEF.**</u> $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = x$, cioè per ogni $y \in \underset{B}{\mathbb{R}}$

$\underset{f^{-1}(y)}{\operatorname{arctg} y}$ è l'unico elemento di $\underset{A}{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ tale che $\underset{f(f^{-1}(y))}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = y \quad \forall y \in \underset{B}{\mathbb{R}}$

Osservazione: fissato $x \in \underset{A}{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$, posto $y = \underset{f(x)}{\operatorname{tg} x}$,

poiché $f^{-1}(y) = x$, risulta $\underset{f^{-1}(f(x))}{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)} = x \quad \forall x \in \underset{A}{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$

arcotangente $: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$