

## Funzioni razionali

Si dice "funzione razionale" ogni funzione esprimibile come rapporto di polinomi:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0)$$

definita in  $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ .

Una categoria di funzioni razionali che si presenta nell'ambito del calcolo integrale e' caratterizzata da

$P(x)$  polinomio di grado 0 (cioe'  $P(x) = \text{costante}$ ) oppure di grado 1

$Q(x)$  polinomio di grado 2, cioe'  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  
con  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ . Risulta quindi

$$Q(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{con} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

In tal caso si dimostra che esistono  $A, B \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

"decomposizione in fratti semplici"  
"frazioni semplici"

ESEMPIO di decomposizione in fratti semplici:

$$f(x) = \frac{7x + 13}{2x^2 + 9x - 5}$$

Il denominatore è un polinomio di secondo grado con  $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121$

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{121}}{4} = \frac{-9 - 11}{4} = \frac{-20}{4} = -5 \quad x_2 = \frac{-9 + 11}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 9x - 5 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5) = (2x-1)(x+5)$$

$$\frac{7x+13}{2x^2+9x-5} = \frac{7x+13}{(2x-1)(x+5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+5}$$

Determiniamo A e B: moltiplichiamo ambo i membri di per  $2x-1$ :

$$\frac{(7x+13)\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}(x+5)} = \frac{A\cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}} + \frac{B(2x-1)}{x+5}$$

$$\frac{7x+13}{x+5} = A + \frac{B(2x-1)}{x+5}$$

Ponendo  $x = \frac{1}{2}$  ( $\frac{1}{2}$  è il numero che annulla  $2x-1$ ), il secondo membro coincide con A; il primo membro diventa

$$A = \frac{7 \cdot \frac{1}{2} + 13}{\frac{1}{2} + 5} = \frac{7 + 26}{1 + 10} = \frac{33}{11} = 3$$

Moltiplicando invece per  $x+5$  si ottiene (dopo la semplificazione)

$$\frac{7x+13}{2x-1} = \frac{A(x+5)}{2x-1} + B$$

Ponendo  $x = -5$  ( $-5$  è il numero che annulla  $x+5$ ) il secondo membro è uguale a  $B$ ; il primo membro è quindi:

$$B = \frac{7 \cdot (-5) + 13}{2 \cdot (-5) - 1} = \frac{-35 + 13}{-10 - 1} = \frac{-22}{-11} = 2$$

Conclusione:

$$\frac{7x+13}{2x^2+9x-5} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+5}$$