ESERCITAZIONE DEL 25 OTTOBRE 2017

1. Sia $A \subset R$. Dimostrare che il minimo di A, se esiste, é unico.

Dimostriamo che se $m_1 = \min A$ *e* $m_2 = \min A$*, allora* $m_1 = m_2$.
$m_1 = \min A \Rightarrow m_1 \leq a \, \forall a \in A \Rightarrow m_1 \leq m_2$ *(perché* $m_2 \in A$*)*
$m_2 = \min A \Rightarrow m_2 \leq a \, \forall a \in A \Rightarrow m_2 \leq m_1$ *(perché* $m_1 \in A$*)*
Per la proprietá asimmetrica dei numeri reali, $m_1 \leq m_2 \,,\ \ m_2 \leq m_1 \ \Rightarrow m_1 = m_2$.

2. Dimostrare che il $\min\,]0, +\infty[$ non esiste.

Se $m \leq 0$*, non puó essere* $m = \min\,]0, +\infty[$ *perché* $m \notin]0, +\infty[$*. Se* $m > 0$*, non puó essere* $m = \min\,]0, +\infty[$ *perché non é verificata la condizione*

$$\forall a \ \in]0, +\infty[\qquad m \leq a \,,$$

infatti dimostriamo che é vera la sua negazione:

$$\exists \, a \ \in]0, +\infty[: \qquad m > a \,.$$

Ponendo $a = \dfrac{m}{2}$ *, da una parte risulta* $a \in]0, +\infty[$ *perché* a *é rapporto di numeri positivi, dall'altra risulta* $m > \dfrac{m}{2}$ *perché*

$$m > \frac{m}{2} \ \Leftrightarrow \ 2m > m \ \Leftrightarrow \ m > 0 \,.$$

Conclusione: qualunque numero reale non puó essere $\min\,]0, +\infty[$*, dunque il* $\min\,]0, +\infty[$ *non esiste.*

3. Determinare il $\max\, [1, 2[\cup \{7\}$ e il $\max\, [0, 5[\cup \{-2\}$ (se esistono).

* $\quad \max\, [1, 2[\cup \{7\} = 7$
Si tratta di dimostrare che 7 *verifica*

$$\begin{cases} 7 \geq a \quad \forall a \in [1, 2[\cup \{7\} \\ 7 \in [1, 2[\cup \{7\} \end{cases}$$

Riguardo la prima di tali affermazioni, sia $a \in [1, 2[\cup \{7\}$*. Per definizione di unione di due insiemi, risulta* $a \in [1, 2[$ *oppure* $a \in \{7\}$*. Nel primo caso, per definizione di* $[1, 2[$*, risulta* $1 \leq a < 2$ *e quindi* $7 \geq a$ *(perché* $7 > 2 > a$*); nel secondo caso risulta* $a = 7$ *e quindi ancora* $7 \geq a$ *(perché* $7 = a$*). In ognuno dei due casi risulta* $7 \geq a$*, ovvero quanto volevasi dimostrare.*

Riguardo la seconda di tali affermazioni, $7 \in [1, 2[\cup \{7\}$ *perché* $7 \in \{7\}$*.*

* $\quad \max\, [0, 5[\cup \{-2\}$ *non esiste*

Se $M \geq 5$*, allora* $M \notin [0, 5[\cup \{-2\}$*: infatti* $M \notin [0, 5[$ *(i numeri in* $[0, 5[$ *sono tutti minori di* 5*) e* $M \notin \{-2\}$ *(qualunque numero maggiore o uguale di* 5 *non puó coincidere con* -2*).*

Se $M < 5$*, non puó essere* $M = \max\,[0,5[\cup\{-2\}$ *perché non é verificata la condizione*

$$\forall a \in [0,5[\cup\{-2\} \qquad M \geq a\,,$$

infatti dimostriamo che é vera la sua negazione:

$$\exists\, a \in [0,5[\cup\{-2\} : \qquad M < a\,.$$

I numeri $M < 5$ *hanno due possibilitá: o sono negativi, oppure appartengono a* $[0,5[$ *(in altri termini,* $]-\infty,0[\cup[0,5[=]-\infty,5[$*). Se* $M < 0$*, basta porre ad esempio* $a = 0$*; se* $M \in [0,5[$*, basta porre* $a = (M+5)/2$*: risulta infatti*

$$M < (M+5)/2 \;\Leftrightarrow\; 2M < M+5 \;\Leftrightarrow\; M < 5\,.$$

4. Vero o falso? (e dire perché!) $\forall\, a \in]-\infty,3[\ \exists\, b \in]0,+\infty[\ :\ a < b$

É vero: infatti se $a \in]-\infty,3[$ *si puó in ogni caso porre* $b = 3$ *(oppure* $b = 5$*,* $b = 44$*...!) e risulta* $b \in]0,+\infty[$ *(ovvio, perché* 3*,* 5 *o* 44 *sono numeri positivi), nonché* $a < b$*, visto che* $a < 3$ *(oppure, se si fanno le altre scelte,* $a < 3 < 5$ *dunque* $a < 5$*,* $a < 3 < 44$ *dunque* $a < 44$*...).*

5. Posto $A = [2,9[$, $B =]5,6]$, determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ (é richiesto solo di determinare tali insiemi; nello svolgimento che segue figura anche la dimostrazione, giusto per i primi due insiemi)

$A \cup B = A$ *(ovvero* $A \cup B = [2,9[$ *): infatti possiamo dimostrare le inclusioni* $A \cup B \subseteq A$*,* $A \cup B \supseteq A$*. Riguardo la prima: se* $a \in A \cup B$ *allora, per definizione di unione,* $a \in [2,9[$ *oppure* $a \in]5,6]$*. Nel primo caso si é giá ottenuto che* $a \in [2,9[$*, mentre nel secondo caso (cioé* $a \in]5,6]$*) risulta* $5 < a \leq 6$ *e quindi anche* $2 \leq a < 9$*, visto che* $2 < 5 < a \leq 6 < 9$*. Riguardo la seconda inclusione, banalmente ogni elemento di* $[2,9[$*, cioé di* A*, é anche elemento di* A *unito a qualunque altro insieme. Tutto questo esercizio é in sostanza la dimostrazione della proposizione:*

$$B \subseteq A \;\Rightarrow A \cup B = A$$

$A \cap B = B$ *(ovvero* $A \cap B =]5,6]$ *): infatti possiamo dimostrare le inclusioni* $A \cap B \subseteq B$*,* $A \cap B \supseteq B$*. Riguardo la prima: banalmente ogni elemento di* $A \cap B$ *é anche elemento di* B*. Riguardo la seconda inclusione, bisogna dimostrare che ogni elemento di* B *é sia elemento di* A *che di* B*, ovvero basta dimostrare che ogni elemento di* B *é anche elemento di* A*, il che é stato giá dimostrato in occasione della uguaglianza precedente. Analogamente al caso precedente, se* $B \subseteq A$ *vale sempre l'uguaglianza* $A \cap B = B$*.*

$A - B = [2,5] \cup]6,9[$

$B - A = \emptyset$

6. Posto $X = [7,+\infty[$, $Y = \{4,5,6,7,8\}$, stabilire se X é contenuto nell'insieme dei maggioranti di Y.

L'insieme dei maggioranti di Y *é* $[8,+\infty[$*, quindi é richiesto di stabilire se é vera l'inclusione* $[7,+\infty[\subseteq [8,+\infty[$*. Tale inclusione é falsa: infatti ad esempio* 7 *appartiene al primo insieme e non al secondo insieme (in altri termini,* $7 \in X$ *e non é un maggiorante di* $\{4,5,6,7,8\}$*, visto che non risulta* $7 \geq 8$*).*