ESERCITAZIONE DELL'8 NOVEMBRE 2017

1. Stabilire (motivando la risposta) se i seguenti insiemi sono limitati, se sono limitati inferiormente ed anche se sono limitati superiormente:

(1) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$

(2) $\mathbf{Z} \cap [-2, 2]$

(3) $\{x \in \mathbf{R} : -x^2 < 0\}$

L'insieme (1) é limitato (il che vuol dire che é limitato sia superiormente che inferiormente), infatti 0 *é un minorante e* 1 *é un maggiorante.*

Anche l'insieme (2), che coincide con $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$*, é limitato: in questo caso si tratta di un insieme dotato di massimo (il numero* 2*) e di minimo (il numero* -2*).*

Il terzo insieme si puó equivalentemente scrivere come $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *oppure come* $\mathbf{R} - \{0\}$*, visto che ogni numero reale non nullo, elevato al quadrato, é positivo (quindi il suo opposto é negativo). Quindi l'insieme (3) non é limitato né inferiormente, né superiormente (e una sola di queste due affermazioni é sufficiente per stabilire che non é limitato).*

2. Data la funzione $f : \{-1, 0, 1\} \to \{2, 3, 4\}$ definita da $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$, stabilire (motivando la risposta) se é monotona e stabilire (motivando la risposta) se é invertibile. Infine, disegnare il grafico di f.

La funzione f *non é monotona: infatti non é crescente (perché se si fissa* $x_1 = 0$*,* $x_2 = 1$*, risulta* $x_1 < x_2$ *e* $f(x_1) > f(x_2)$ *e non* $f(x_1) \leq f(x_2)$*) e non é decrescente (perché se si fissa* $x_1 = -1$*,* $x_2 = 0$*, risulta* $x_1 < x_2$ *e* $f(x_1) < f(x_2)$ *e non* $f(x_1) \geq f(x_2)$*). La funzione* f *non é invertibile. Infatti, se si considera* $y = 2$*, esistono* x_1*,* x_2*, con* $x_1 \neq x_2$*, tali che* $f(x_1) = f(x_2) = y$*: basta porre* $x_1 = -1$*,* $x_2 = 1$*. Il grafico di* f *si disegna in un piano cartesiano evidenziando i tre punti* $(-1, 2)$*,* $(0, 3)$*,* $(1, 2)$*.*

3. Siano $A, B \subseteq R$ e sia $f : A \to B$. Negare la proposizione:

$$(\mathcal{P}) \qquad \forall\, y \in B \quad \exists\, x \in A : y = f(x)$$

Dopo aver scritto la negazione di $(\mathcal{P})$, supporre che f sia invertibile e rispondere alle seguenti domande:

(a) $(\mathcal{P})$ é vera? (in caso affermativo, scrivere il motivo; in caso negativo, esibire un esempio di f invertibile che non verifica $(\mathcal{P})$;

(b) La negazione di $(\mathcal{P})$ (quella scritta nella prima parte dell'esercizio) é vera? (in caso affermativo, scrivere il motivo; in caso negativo, esibire un esempio di f invertibile che non verifica la negazione di $(\mathcal{P})$, cioé verificante $(\mathcal{P})$.

La negazione di $(\mathcal{P})$ *é*

-($\mathcal{P}$) $\quad \exists\, y \in B \,:\quad \forall\, x \in A \,,\quad y \neq f(x)$

La risposta alla domanda (a): ($\mathcal{P}$) é vera, perché se f é invertibile non solo si puó dire che per ogni fissato $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $y = f(x)$, ma si puó affermare che di siffatte x ne esiste una ed una sola. La risposta alla domanda (b): come conseguenza di (a), la negazione di ($\mathcal{P}$) é falsa. Come esempio di funzione invertibile che non verifica -($\mathcal{P}$) va bene una **qualunque** *funzione invertibile, per esempio $f\,:\{0\} \to \{0\}$ definita da $f(0) = 0$.*

4. Siano $A, B \subseteq R$ e sia $f\,: A \to B$. La seguente proposizione:
Se f é monotona ma non é strettamente monotona, allora non é invertibile
é vera o é falsa? Se é vera, scrivere il motivo; se é falsa, esibire un esempio di funzione monotona, invertibile e non strettamente monotona.

La proposizione é vera: Se f é monotona ma non strettamente monotona, esistono $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Quindi il valore $f(x_1)$ (che puó anche essere scritto $f(x_2)$) non é assunto da una ed una sola $x \in A$ (visto che é assunto sia in x_1 che in x_2) e questo basta per stabilire che f non é invertibile.

5. Posto $A = [0, 3[$, $B = [3, 6]$, determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ (é richiesto solo di determinare tali insiemi) e stabilire se é vero che $a \leq b\ \forall a \in A\,,\ \forall b \in B$.

$A \cup B = [0, 6]$
$A \cap B = \emptyset$
$A - B = A$
$B - A = B$
Infine, é vero che $a \leq b\ \forall a \in A\,,\ \forall b \in B$, perché risulta $a \leq 3 \leq b\ \forall a \in A\,,\ \forall b \in B$.

6. Scrivere le proprietá caratteristiche dell'estremo inferiore di un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente.

Sia A un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente e sia $m \in \mathbf{R}$ il suo estremo inferiore. Risulta

$$\begin{cases} m \leq a\ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A\,:\, m + \varepsilon > a \end{cases}$$