ESERCITAZIONE DEL 15 NOVEMBRE 2017

1. Risolvere le seguenti disequazioni dopo aver tracciato il grafico delle funzioni che appaiono al primo membro:
(1) $x^7 < 5$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, \sqrt[7]{5}[$
(2) $x^3 < -1$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, -1[$
(3) $x^2 < -4$ $\quad$ $Risposta: \emptyset$
(4) $x^4 < 7$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7}[$
(5) $x^7 < 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, 0[$
(6) $x^4 > 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
(7) $x^2 - 4x + 3 < 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]1, 3[$
(8) $x^2 + x + 1 > 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ \mathbf{R}$
(9) $-x^2 - 2x - 1 \geq 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ \{-1\}$
(10) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$

2. Calcolare la distanza tra i punti seguenti:

(1) $x_0 = 5 \in \mathbf{R}$, $\quad x_1 = 8 \in \mathbf{R}$ $\quad$ $Risposta:\ \ |x_0 - x_1| = 3$
(2) $x_0 = 2 \in \mathbf{R}$, $\quad x_1 = -2 \in \mathbf{R}$ $\quad$ $Risposta:\ \ |x_0 - x_1| = 4$
(3) $P_0 = (2, 4) \in \mathbf{R}^2$, $P_1 = (3, 5) \in \mathbf{R}^2$ $\quad$ $Risposta:\ \ \overline{P_0P_1} = \sqrt{(3-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

3. Risolvere le seguenti disequazioni dopo aver tracciato il grafico delle funzioni che appaiono al primo membro:
(1) $e^x < 1$ $\quad$ $Risposta:\ \ ]-\infty, 0[$
(2) $\log x \geq 0$ $\quad$ $Risposta:\ \ [1, +\infty[$

4. Tracciare il grafico delle funzioni potenza con esponente 3, 8, $\sqrt{2}$, $-\dfrac{3}{4}$ e stabilire se sono invertibili e se sono monotone.
Risposta (tutte le affermazioni che seguono si "leggono" dai grafici illustrati nella teoria):
La funzione $x \in \mathbf{R} \to x^3 \in \mathbf{R}$ *é strettamente crescente e invertibile;*
la funzione $x \in \mathbf{R} \to x^8 \in \mathbf{R}$ *non é monotona, né invertibile;*
la funzione $x \in [0, +\infty[\to x^{\sqrt{2}} \in [0, +\infty[$ *é strettamente crescente e invertibile; se invece si considera la funzione* $x \in [0, +\infty[\to x^{\sqrt{2}} \in \mathbf{R}$*, si ottiene una funzione strettamente crescente ma non invertibile.*
la funzione $x \in]0, +\infty[\to x^{-\frac{3}{4}} \in]0, +\infty[$ *é strettamente decrescente e invertibile; se invece si considera la funzione* $x \in]0, +\infty[\to x^{-\frac{3}{4}} \in \mathbf{R}$*, si ottiene una funzione strettamente decrescente ma non invertibile.*

5. Siano $A = \{4,7\}$, $B = \{3,6\}$ e sia $f : A \to B$ la funzione definita da $f(4) = 6$, $f(7) = 3$.
(1) Scrivere l'inversa di f
(2) Il grafico di f é costituito da due punti: determinare la loro distanza
Risposta :
(1) L'inversa di f é la funzione $f^{-1} : B \to A$ definita da $f^{-1}(3) = 7$, $f^{-1}(6) = 4$.
(2) $\sqrt{(7-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

6. Siano $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathbf{R}^2$.
(1) L'insieme costituito dai punti P_0, P_1 é il grafico di una funzione f? In caso affermativo: di quale funzione f? (in altri termini: in caso affermativo, scrivere la definizione della funzione avente per grafico l'insieme $\{P_0, P_1\}$)
(2) Supponiamo che l'insieme $\{P_0, P_1\}$ sia costituito da due punti distinti e che coincida con il grafico di una funzione f invertibile. Quali relazioni sono verificate da x_0, x_1, y_0, y_1? É vero che f é strettamente monotona?
(3) Supponiamo che siano assegnati i punti di $\mathbf{R}^2$: $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e che l'insieme $\{P_0, P_1, P_2\}$ sia il grafico di una funzione g invertibile. É vero che g é strettamente monotona?

Risposta :
(1) La risposta é affermativa se $x_0 \neq x_1$ e anche se $P_0 = P_1$ (da notare che per come é posto l'esercizio i due punti potrebbero coincidere e in questo caso l'insieme $\{P_0, P_1\}$, di fatto costituito da un solo punto, é sicuramente un grafico di funzione); é invece negativa se $x_0 = x_1$ e $y_0 \neq y_1$, perché in tale caso la retta parallela all'asse y di equazione $x = x_0$ intersecherebbe il grafico in due punti distinti. Nel caso della risposta affermativa, ogni funzione $f : \{x_0, x_1\} \to B$ con B insieme contenente $\{y_0, y_1\}$, definita da $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, ha come grafico l'insieme $\{P_0, P_1\}$ (se $x_0 = x_1$, allora per quanto scritto sopra deve essere anche $y_0 = y_1$ e la corrispondenza della funzione f si esprime piú semplicemente scrivendo $f(x_0) = y_0$).
(2) I due punti distinti non possono avere la stessa ascissa, altrimenti non potrebbero costituire il grafico di una funzione, quindi risulta $x_0 \neq x_1$. Visto che f é invertibile, deve risultare anche $y_0 \neq y_1$. In tal caso f é strettamente monotona: se $x_0 < x_1$, dal fatto che $y_0 \neq y_1$ si deduce che $y_0 < y_1$ (nel qual caso f é strettamente crescente) oppure $y_0 > y_1$ (nel qual caso f é strettamente decrescente); se $x_0 > x_1$ si ragiona analogamente.
(3) Non necessariamente g é strettamente monotona: ad esempio la funzione $g : \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ definita da $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f(3) = 5$ é invertibile (infatti ogni elemento di $\{4,5,6\}$ é assunto da uno ed un solo elemento di $\{1,2,3\}$) ma non monotona (considerando ad esempio dapprima la coppia di punti $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ e poi la coppia di punti $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ si esclude rispettivamente che g sia decrescente e che sia crescente).