ESERCITAZIONE DEL 22 NOVEMBRE 2017

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $e^x \leq 5$ *Risposta* : $]-\infty, \log 5]$

(2) $\log x < -1$ *Risposta* : $]0, e^{-1}[= \left]0, \frac{1}{e}\right[$

(3) $3^x \leq -4$ *Risposta* : $\emptyset$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 7$ *Risposta* : $]-\infty, \log_{\frac{1}{4}} 7[$

(5) $\log_5 x \geq -2$ *Risposta* : $[5^{-2}, +\infty[= \left[\frac{1}{25}, +\infty\right[$

(6) $\log(x^2) < 0$ *Risposta* : $]-1, 0[\cup]0, 1[=]-1, 1[-\{0\}$

2. Quali delle seguenti funzioni sono invertibili? (per le funzioni invertibili scrivere l'inversa; per le funzioni non invertibili, scrivere perché non si tratta di funzioni invertibili). Inoltre, per ciascuna delle seguenti funzioni, scrivere se si tratta di una funzione monotona oppure no.

(1) $x \in [0, +\infty[\to |x| \in [0, +\infty[$
é invertibile e monotona (strettamente crescente); coincide con $x \in [0, +\infty[\to x \in [0, +\infty[$ *e quindi coincide anche con la sua inversa*

(2) $x \in \mathbf{R} \to x^2 \in \mathbf{R}$
non é invertibile, né monotona; non é invertibile perché (ad esempio) il numero reale $-1 \in \mathbf{R}$ *non é assunto da alcun* $x \in \mathbf{R}$ *(per mostrare la non invertibilitá si puó ragionare con qualunque numero reale non nullo: i numeri reali negativi non sono valori assunti dalla funzione, quelli positivi sono invece valori assunti dalla funzione, ma piú di una volta)*

(3) $x \in [0, +\infty[\to x^2 \in \mathbf{R}$
non é invertibile ma é monotona; non é invertibile perché (ad esempio) il numero reale $-1 \in \mathbf{R}$ *non é assunto da alcun* $x \in [0, +\infty[$ *(per mostrare la non invertibilitá si puó ragionare con qualunque numero reale negativo, che appartiene all'insieme di arrivo ma non é un valore assunto dalla funzione)*

(4) $x \in \mathbf{R} \to e^x \in \mathbf{R}$
non é invertibile ma é monotona; non é invertibile perché (ad esempio) il numero reale $-1 \in \mathbf{R}$ *non é assunto da alcun* $x \in \mathbf{R}$ *(per mostrare la non invertibilitá si puó ragionare con qualunque numero reale non positivo, che appartiene all'insieme di arrivo ma non é un valore assunto dalla funzione)*

(5) $x \in [0, +\infty[\to e^x \in \mathbf{R}$
non é invertibile ma é monotona; non é invertibile perché (ad esempio) il numero reale $-1 \in \mathbf{R}$ *non é assunto da alcun* $x \in [0, +\infty[$ *(per mostrare la non invertibilitá si puó ragionare con qualunque numero reale minore di 1, che appartiene all'insieme di arrivo ma non é un valore assunto dalla funzione)*

(6) $x \in]0, +\infty[\to \log_{\frac{2}{3}} x \in \mathbf{R}$
é invertibile e monotona (strettamente decrescente); la sua inversa é $x \in \mathbf{R} \to \left(\frac{2}{3}\right)^x \in]0, +\infty[$

(7) $x \in [0, \pi] \to \mathrm{sen} x \in [-1, 1]$
non é invertibile, né monotona; non é invertibile perché (ad esempio) il numero reale $-1 \in [-1, 1]$ *non é assunto da alcun* $x \in [0, \pi]$ *(per mostrare la non invertibilitá si puó ragionare con qualunque numero appartenente* $[-1, 1[$*: i numeri in* $[-1, 0[$ *non sono valori assunti dalla funzione, i numeri in* $[0, 1[$ *sono invece valori assunti dalla funzione, ma piú di una volta)*

(8) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathrm{tg} x \in]0, +\infty[$
é invertibile e monotona (strettamente crescente); la sua inversa é $x \in]0, +\infty[\to \mathrm{arctg} x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

(9) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\to \cos x \in]0, 1[$
é invertibile e monotona (strettamente decrescente); la sua inversa é $x \in]0, 1[\to \arccos x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

3. Determinare cosπ, $\sqrt{16}$, tgπ, log1, e^0, sen0

Risposta: $\cos\pi = -1$, $\sqrt{16} = 4$, $\mathrm{tg}\pi = 0$, $\log 1 = 0$, $e^0 = 1$, $\mathrm{sen}0 = 0$

4. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere oppure false (nel seguito il termine "successione" sta per "successione di numeri reali"; per ognuna delle cinque affermazioni dichiarare "é vera" oppure "é falsa perché .... — e dire il motivo")

(1) per una qualunque successione ci sono solo due possibilitá: o é convergente, o é divergente
Falsa: una successione puó essere oscillante
(2) una successione convergente é sicuramente regolare
Vera: per essere "regolare" va bene essere convergente oppure anche divergente
(3) una successione oscillante é sicuramente regolare
Falsa: una successione si dice oscillante proprio quando NON é regolare
(4) una successione regolare é sicuramente divergente
Falsa: una successione regolare puó essere anche convergente
(5) per una qualunque successione ci sono solo due possibilitá: o é oscillante, o é regolare
Vera: infatti il termine "oscillante" rappresenta proprio la negazione di "regolare"

5. Scrivere la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ nei seguenti casi (non si chiede di dimostrare la validitá dell'uguaglianza, ma solo di scrivere cosa si intende per "$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$" quando $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ e a hanno i valori indicati):

(1) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $\quad a = 0 \quad$ *Risposta* : $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\nu \in \mathbf{N} : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu$

(2) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(n^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $\quad a = +\infty \quad$ *Risposta* : $\forall\, M > 0 \quad \exists\,\nu \in \mathbf{N} : n^2 > M \quad \forall\, n > \nu$

(3) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $\quad a = 1 \quad$ *Risposta* : $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\nu \in \mathbf{N} : \left|\frac{n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \quad \forall\, n > \nu$

(4) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $\quad a = 0 \quad$ *Risposta* : $\forall\,\varepsilon > 0\, \exists\,\nu \in \mathbf{N} : \left|\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - 0\right| < \varepsilon\, \forall\, n > \nu$

(5) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\log\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ $\quad a = -\infty \quad$ *Risposta* : $\forall\, M > 0 \quad \exists\,\nu \in \mathbf{N} : \log\left(\frac{1}{n}\right) < -M \quad \forall\, n > \nu$