ESERCITAZIONE DEL 29 NOVEMBRE 2017

1. Scrivere la dimostrazione del teorema della permanenza del segno (per le successioni) nel caso del limite negativo.

Dimostriamo che $a_n \to a < 0 \Rightarrow \exists\, \nu \in \mathbf{N} : a_n < 0\ \forall\, n > \nu$

Posto $\varepsilon = -\frac{a}{2}$, *poiché* $a < 0$ *risulta* $\varepsilon > 0$ *e quindi, essendo* $a_n \to a$, $\exists\, \nu \in \mathbf{N} : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon\ \forall\, n > \nu$. *In particolare per tutti gli* $n > \nu$ *risulta* $a_n < a + \varepsilon = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} < 0$, *da cui la tesi.*

2. Scrivere la dimostrazione del primo corollario del teorema della permanenza del segno nel caso delle successioni non positive, ovvero dimostrare che $a_n \to a \in \mathbf{R}\,, a_n \leq 0\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ \Rightarrow\ a \leq 0$.

Per assurdo sia $a > 0$. *Per il teorema della permanenza del segno* $\exists\, \nu \in \mathbf{N} : a_n > 0\ \forall\, n > \nu$, *il che é assurdo, essendo per ipotesi* $a_n \leq 0\ \forall\, n \in \mathbf{N}$.

3. Scrivere la dimostrazione del teorema dei carabinieri nel caso del limite $-\infty$:

$$a_n \leq b_n\ \forall\, n \in \mathbf{N}\,, b_n \to -\infty\ \Rightarrow\ a_n \to -\infty$$

Fissiamo $M > 0$. *Poiché* $b_n \to -\infty$, $\exists\, \nu \in \mathbf{N} : b_n < -M\ \forall\, n > \nu$; *essendo per ipotesi* $a_n \leq b_n\ \forall\, n \in \mathbf{N}$, *si ha anche che* $\exists\, \nu \in \mathbf{N} : a_n \leq b_n < -M\ \forall\, n > \nu$, *da cui la tesi.*

4. Scrivere la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ nei seguenti casi (non si chiede di dimostrare la validitá dell'uguaglianza, ma solo di scrivere cosa si intende per " $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$" per le funzioni f assegnate e per i valori di x_0 e l indicati).

(1) $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in \mathbf{R}, x_n \neq 2\, \forall\, n \in \mathbf{N}, x_n \to 2$, *risulta* $x_n^3 \to 8$.

(2) $\lim_{x \to -1} \operatorname{arcsen} x = -\dfrac{\pi}{2}$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in]-1, 1]\, \forall\, n \in \mathbf{N}, x_n \to -1$, *risulta* $\operatorname{arcsen} x_n \to -\frac{\pi}{2}$.

(3) $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in \mathbf{R}, x_n \to +\infty$, *risulta* $\operatorname{arctg} x_n \to \frac{\pi}{2}$.

(4) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in \mathbf{R}, x_n \to -\infty$, *risulta* $e^{x_n} \to 0$.

(5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n > 0\ \forall\, n \in \mathbf{N}, x_n \to 0$, *risulta* $\dfrac{1}{\sqrt{x_n}} \to +\infty$.

(6) $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in \mathbf{R}\ \forall\, n \in \mathbf{N}, x_n \to +\infty$, *risulta* $x_n^3 \to +\infty$.

(7) $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = +\infty$

Risposta: $\forall\, (x_n), x_n \in \mathbf{R}\ \forall\, n \in \mathbf{N}, x_n \to -\infty$, *risulta* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x_n} \to +\infty$.

5. Utilizzando unicamente i grafici delle funzioni elementari, determinare i limiti seguenti:

(1) $\lim_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$ (2) $\lim_{x\to-\infty} x^8 = +\infty$ (3) $\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$ (4) $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$
(5) $\lim_{x\to+\infty} 4 - x = -\infty$ (6) $\lim_{x\to-\infty} 3x - 7 = -\infty$ (7) $\lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ (8) $\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$
(9) $\lim_{x\to+\infty} x^{\sqrt{2}} = +\infty$ (10) $\lim_{x\to-\infty} x^{-1} = 0$ (11) $\lim_{x\to+\infty} x^{-\sqrt{3}} = 0$ (12) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
(13) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (14) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = +\infty$ (15) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = 0$ (16) $\lim_{x\to0} \log_{\frac{7}{4}} x = -\infty$
(17) $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{3}{4}} x = -\infty$ (18) $\lim_{x\to0} \log_{\frac{1}{6}} x = +\infty$ (19) $\lim_{x\to+\infty} \log_{\frac{5}{3}} x = +\infty$
(20) $\lim_{x\to1} \mathrm{arccos}x = 0$ (21) $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$