# ESERCITAZIONE DEL 10 GENNAIO 2018

**1.** Sia $I \subset R$ un intervallo, sia $x_0 \in I$ e sia $f : I \to R$. Scrivere la definizione di derivata (prima) di $f$ nel punto $x_0$.

*Si dice che $f$ é derivabile nel punto $x_0$ se esiste ed é finito il limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

*Se $f$ é derivabile nel punto $x_0$, si definisce derivata di $f$ nel punto $x_0$ il limite*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

**2.** Data la funzione

$$f : [4,5] \ni x \to f(x) = \frac{x+1}{x-3} \in R\,,$$

scrivere l'equazione della retta passante per i punti del grafico di $f$ aventi ascissa 4 e ascissa 5.

*Assegnata $f : [a,b] \to R$, l'equazione della retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (considerata per esempio nella dimostrazione del teorema di Lagrange, oppure anche a proposito del significato geometrico della derivata) é data da*

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

*Nel nostro caso $a = 4$, $f(a) = \frac{a+1}{a-3} = 5$, $b = 5$, $f(b) = \frac{b+1}{b-3} = 3$ e quindi l'equazione della retta passante per i punti del grafico di $f$ aventi ascissa 4 e ascissa 5 é*

$$y = 5 + \frac{3-5}{5-4}(x-4)$$

*cioé, equivalentemente,*

$$y = -2x + 13\,.$$

**3.** Qual é il valore della derivata della funzione logaritmo nel punto di ascissa 10? (scrivere il valore e il motivo).

*La derivata di $f(x) = \log x$ é $f'(x) = 1/x$ per ogni $x > 0$, quindi nel punto $x = 10$ la derivata vale $f'(10) = 1/10$.*

**4.** Calcolare la derivata prima delle funzioni assegnate attraverso le seguenti espressioni (lo svolgimento deve contenere tutti i calcoli):

(1) $\dfrac{x+2}{x-1}$ (2) $\dfrac{x\log x}{x-1}$ (3) $x^6$ (4) $\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}$ (5) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ (6) $\dfrac{2^x-\cos x}{x}$ (7) $\dfrac{2^{\mathrm{sen}x}}{x}$

(8) $\mathrm{arcsen}(\log x)$ (9) $\log(\mathrm{arctg}x)$ (10) $\log(|\mathrm{arctg}x|)$

*Risposte:*

*(1)* $-\dfrac{3}{(x-1)^2}$ *(2)* $\dfrac{x-\log x-1}{(x-1)^2}$ *(3)* $6x^5$ *(4)* $\dfrac{1}{\mathrm{tg}x} - \dfrac{x}{\mathrm{sen}^2 x}$ *(5)* $\dfrac{\mathrm{e}^x+2}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x+2)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

*(6)* $\dfrac{2^x(x\log 2-1)+x\,\mathrm{sen}x+\cos x}{x^2}$ *(7)* $\dfrac{2^{\mathrm{sen}x}(x\cos x\log 2-1)}{x^2}$ *(8)* $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$

*(9)* $\dfrac{1}{(1+x^2)\text{arctg}x}$ *(10)* $\dfrac{1}{(1+x^2)\text{arctg}x}$

*Da notare: la funzione in (10) puó essere considerata come funzione del tipo $f(g(x))$, con $f$ data dalla funzione logaritmo composta con la funzione valore assoluto e con $g(x) = \text{arctg}x$. Nella lezione sulla derivata delle funzioni elementari abbiamo visto che $D(\log|x|) = 1/x$: il risultato $1/x$ é formalmente identico quello di $D(\log x)$ (solo formalmente: bisogna ricordare che la funzione $\log|x|$ é un prolungamento di $\log x$ in $]-\infty, 0[$ e che il risultato del calcolo della derivata vale anche in $]-\infty, 0[$). La conseguenza é che ai fini del calcolo della derivata, la presenza del valore assoluto non altera il risultato: ecco perché le risposte in (9) e (10) coincidono (solo formalmente!).*

**5.** Calcolare la derivata seconda delle funzioni assegnate attraverso le seguenti espressioni (lo svolgimento deve contenere tutti i calcoli):

(1) $\text{tg}(\log x)$ (2) $\text{arctg}(x^4)$ (3) $e^{x^2}$ (4) $x\log(x^2+1)$

*Risposte:*

*(1)* $-\dfrac{\cos(\log x) - 2\text{sen}(\log x)}{x^2\cos^3(\log x)}$ *(2)* $\dfrac{4x^2\left(3-5x^8\right)}{\left(x^8+1\right)^2}$ *(3)* $2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)$ *(4)* $\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$