ESERCITAZIONE DEL 18 OTTOBRE 2017

1. Scrivere tutti i sottoinsiemi di $A = \{4, 6\}$

I sottoinsiemi di A *sono* $\emptyset$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{4, 6\}$.

2. Dimostrare la proposizione $\{5, 8, 1, 7\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Posto $A = \{5, 8, 1, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, *si tratta di dimostrare che* $A \not\subseteq B$, *cioé*

$$\exists\, a \in A \,:\, a \notin B$$

Tale affermazione é vera, infatti basta porre $a = 8$*: risulta*

$$8 \in \{5, 8, 1, 7\}\,, \qquad 8 \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

3. Determinare l'unione, l'intersezione, la differenza del primo dal secondo e del secondo dal primo, dei due insiemi dell'esercizio precedente.

Posto $A = \{5, 8, 1, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, *risulta:*

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, *in quanto*
* $A \cup B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
perché se $x \in A \cup B$ *allora* $x \in A$ *oppure* $x \in B$, *e quindi, essendo* $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, *in ogni caso risulta* $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \subseteq A \cup B$
perché $1 \in B$ *(e quindi* $1 \in A \cup B$*),* $2 \in B$ *(e quindi* $2 \in A \cup B$*),* $3 \in B$ *(e quindi* $3 \in A \cup B$*),* $4 \in B$ *(e quindi* $4 \in A \cup B$*),* $5 \in B$ *(e quindi* $5 \in A \cup B$*),* $6 \in B$ *(e quindi* $6 \in A \cup B$*),* $7 \in B$ *(e quindi* $7 \in A \cup B$*),* $8 \in A$ *(e quindi* $8 \in A \cup B$*).*

$A \cap B = \{5, 1, 7\}$, *in quanto*
* $A \cap B \subseteq \{5, 1, 7\}$
perché se $x \in A \cap B$ *allora in particolare* $x \in A$*: se dunque* $x = 5$, *poiché risulta anche* $5 \in B$, *si ha che* $5 \in A \cap B$, *ed effettivamente* $5 \in \{5, 1, 7\}$. *Lo stesso ragionamento vale per* $x = 1$, $x = 7$. *Se* $x = 8$, *poiché* $8 \notin B$, *si ha* $8 \notin A \cap B$ *e quindi il caso* $x = 8$, *come il caso di ogni altro* x *che non fa parte di* A, *non va esaminato. Dunque ogni elemento di* $A \cap B$ *é anche elemento di* $\{5, 1, 7\}$
* $\{5, 1, 7\} \subseteq A \cap B$
perché $5 \in A$ *e* $5 \in B$*;* $1 \in A$ *e* $1 \in B$*;* $7 \in A$ *e* $7 \in B$*. Da notare che quest'ultimo ragionamento dimostra solo l'inclusione in* $A \cap B$ *e non l'uguaglianza.*

Ragionando come sopra si arriva a:

$$A - B = \{8\}\,, \qquad B - A = \{2, 3, 4, 6\}$$

4. La proposizione:

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\; \exists\, m \in \mathbf{N} \,:\, m < n$$

é falsa. Scrivere la negazione e dimostrarla.

La negazione si scrive usando le sostituzioni:

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \qquad \to \qquad \exists\, n \in \mathbf{N} \,:$$

$$\exists\, m \in \mathbf{N} \,: \qquad \to \qquad \forall\, m \in \mathbf{N}$$

$$m < n \qquad \to \qquad m \geq n$$

La negazione quindi é:

$$\exists\, n \in \mathbf{N} \,:\, \forall\, m \in \mathbf{N}\,(risulta)\, m \geq n$$

Quest'ultima proposizione é vera, infatti basta porre $n = 1$: tale n verifica la frase

$$\forall\, m \in \mathbf{N}\,(risulta)\, m \geq 1\,.$$

Per esercizio consideriamo la stessa affermazione di prima con i simboli $\leq, \geq, >$ al posto di $<$:

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\; \exists\, m \in \mathbf{N} \,:\, m \leq n \qquad \mathrm{e'\,vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n$

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\; \exists\, m \in \mathbf{N} \,:\, m \geq n \qquad \mathrm{e'\,vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n$

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\; \exists\, m \in \mathbf{N} \,:\, m > n \qquad \mathrm{e'\,vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n + 1$
Per esercizio consideriamo le stesse affermazioni con $\mathbf{Z}$ al posto di $\mathbf{N}$:

$$\forall\, n \in \mathbf{Z}\; \exists\, m \in \mathbf{Z} \,:\, m < n \qquad \mathrm{e'\,vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n - 1$

$$\forall\, n \in \mathbf{Z}\; \exists\, m \in \mathbf{Z} \,:\, m \leq n \qquad \mathrm{e'\,vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n$

$$\forall\, n \in \mathbf{Z}\ \exists\, m \in \mathbf{Z}\ :\ m \geq n \qquad \text{e}'\ \text{vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n$

$$\forall\, n \in \mathbf{Z}\ \exists\, m \in \mathbf{Z}\ :\ m > n \qquad \text{e}'\ \text{vera}$$

dimostrazione: basta porre $m = n + 1$

5. Determinare

$$(\{1,5\} - \{1,4\}) \cup (\{1,5\} \cap \{1,4\})$$

Risulta

$$(\{1,5\} - \{1,4\}) \cup (\{1,5\} \cap \{1,4\}) = \{5\} \cup \{1\} = \{1,5\}$$

6. Vero o falso? $\{padri\} \subseteq \{figli\}$, $\{figli\} \subseteq \{padri\}$

La prima inclusione é vera: ogni elemento del primo insieme é anche elemento del secondo insieme, infatti ogni padre é sicuramente anche figlio; la seconda inclusione é falsa: non é vero che ogni figlio é anche padre, perché esiste un figlio che non é padre (basta pensare per esempio ad un neonato).