

Esercizi su insiemi limitati, funzioni limitate, monotone, iniettive, suriettive

Definizioni utili dal testo di Crasta-Malusa:

Def. $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbf{R}$ si dice limitato superiormente se $\exists \mu \in \mathbf{R} : a \leq \mu \quad \forall a \in A$ (pag. 8)

Def. $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbf{R}$ si dice limitato inferiormente se $\exists \nu \in \mathbf{R} : a \geq \nu \quad \forall a \in A$ (pag. 8)

Def. $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbf{R}$ si dice limitato se $\exists \mu, \nu \in \mathbf{R} : \nu \leq a \leq \mu \quad \forall a \in A$ (pag. 8)

Def. Sia $f : A \rightarrow B$. L'insieme $Im(f) = \{f(a) \in B : a \in A\}$ si dice immagine di f (pag. 33)

Def. Sia $f : A \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$. f si dice limitata superiormente se $Im(f)$ è limitato superiormente (pag. 41)

Def. Sia $f : A \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$. f si dice limitata inferiormente se $Im(f)$ è limitato inferiormente (pag. 41)

Def. Sia $f : A \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$. f si dice limitata se $Im(f)$ è limitato sia superiormente che inferiormente (pag. 40)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice crescente se $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ (pag. 42)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice strettamente crescente se $f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ (pag. 42)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice decrescente se $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ (pag. 42)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice strettamente decrescente se $f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ (pag. 42)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice monotona se è crescente o decrescente (pag. 42)

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbf{R}$. $f : A \rightarrow B$ si dice strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente (pag. 42)

Def. Sia $f : A \rightarrow B$. f si dice iniettiva se $f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ (pag. 45)

Def. Sia $f : A \rightarrow B$. f si dice suriettiva se $Im(f) = B$, cioè $\forall b \in B \quad \exists a \in A : b = f(a)$ (pag. 45)

Def. Sia $f : A \rightarrow B$. f si dice biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva (pag. 45)

Rispondere mettendo solo una crocetta. Se la risposta alle domande “...può essere...?” è “sì, in ogni caso”, mettere la crocetta nel quadrato corrispondente. Se la possibilità non si verifica, mettere la crocetta nel quadrato corrispondente a “no: non è possibile”. Infine, se la possibilità si verifica (ma non in tutti i casi), mettere la crocetta nel quadrato corrispondente a “sì, per esempio...”. In tal caso fornire un esempio di funzione di cui si asserisce l’esistenza (ovviamente, in genere, l’esempio non è unico e altre risposte corrette sono possibili); poichè non si risponde “sì, in ogni caso” fornire anche un esempio di funzione NON avente la proprietà richiesta.

1. Una funzione con dominio limitato superiormente

può essere limitata inferiormente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = -x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione con dominio limitato superiormente e non limitata inferiormente è
 $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$

2. Una funzione con dominio limitato superiormente e non limitato inferiormente

può essere limitata? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione non limitata, con dominio limitato superiormente e non limitato inferiormente, è
 $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$

3. Una funzione con dominio limitato superiormente

può essere crescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione con dominio limitato superiormente e non crescente è
 $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = -x \in \mathbf{R}$

4. Una funzione con dominio limitato superiormente

può essere strettamente crescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione con dominio limitato superiormente e non strettamente crescente è
 $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$

5. Una funzione con dominio limitato superiormente

può essere strettamente decrescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = -x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione con dominio limitato superiormente e non strettamente decrescente è
 $f : x \in] - \infty, 0] \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$

6. Una funzione con dominio limitato

può essere limitata? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in]0, 1[\rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione non limitata, con dominio limitato, è
 $f : x \in]0, 1[\rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$

7. Una funzione con dominio non limitato

può essere limitata? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione non limitata, con dominio non limitato, è
 $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$

8. Una funzione crescente

può essere strettamente crescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione crescente e non strettamente crescente è
 $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$

9. Una funzione strettamente crescente

- può essere crescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio...
 no : non è possibile

10. Una funzione crescente

- può essere iniettiva? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione crescente e non iniettiva è
 $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$

11. Una funzione strettamente monotona

- può essere iniettiva? sì, in ogni caso
 sì, per esempio...
 no : non è possibile

12. Una funzione iniettiva

- può essere strettamente monotona? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione iniettiva e non strettamente monotona è
 $f : x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$

13. Una funzione biunivoca

può essere iniettiva? sì, in ogni caso
 sì, per esempio...
 no : non è possibile

14. Una funzione iniettiva

può essere monotona? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione iniettiva e non monotona è
 $f : x \in [-1, 0[\cup]0, 1] \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$

15. Una funzione crescente

può essere decrescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in [-1, 1] \rightarrow f(x) = 1 \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione crescente e non decrescente è
 $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$

16. Una funzione strettamente crescente

può essere decrescente? sì, in ogni caso
 sì, per esempio...
 no : non è possibile

17. Una funzione biunivoca

può essere monotona? sì, in ogni caso
 sì, per esempio... $f : x \in \mathbf{R} \rightarrow f(x) = x \in \mathbf{R}$
 no : non è possibile

Una funzione biunivoca e non monotona è
 $f : x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$