Teorema (Integrazione per sostituzione) *Siano I, J intervalli di* $\mathbf{R}$, *sia* $f : I \to \mathbf{R}$ *continua e sia* $\varphi : J \to I$ *derivabile. Allora*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy\Big|_{y=\varphi(x)}$$

DIM. Sia $F(y)$ una primitiva della funzione $f(y)$. qui si usa che I e' un intervallo

Risulta

$$\int f(y)\,dy = F(y) + c \qquad (y \in I)$$

e' lecito perche' $\varphi : J \to I$, quindi $\varphi(x) \in I$

e quindi, scrivendo $\varphi(x)$ al posto di y,

$$(*) \qquad \int f(y)\,dy\Big|_{y=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + c. \qquad (x \in J)$$

D'altra parte dal teorema di derivazione della funzione composta abbiamo che

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x) \qquad \forall x \in J$$

qui si usa che J e' un intervallo

quindi

$$(*) \qquad \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c \qquad (x \in J)$$

Visto che i secondi membri delle uguaglianze $(*)$ coincidono, devono necessariamente coincidere anche i primi membri. Il teorema e' dimostrato.