Osservazioni sulle risposte dell'esercizio precedente

L'esercizio precedente consiste nell'analizzare, in casi specifici, le seguenti affermazioni:

1) $x \in A \cup B$
2) $x \in A \cap B$
3) $x \in A \setminus B$
4) $x \in B \setminus A$

Da un rapido esame delle risposte si evince che si presentano solo due possibilitá:

- esistono due affermazioni vere (una delle quali é sempre la prima) e due affermazioni false
- tutte le affermazioni sono false

Riguardo la prima possibilitá é chiaro che se esiste una affermazione vera, allora la prima affermazione deve essere necessariamente vera: infatti in ciascuno dei casi $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, necessariamente deve risultare (ricordando le definizioni di intersezione e di differenza di due insiemi) anche $x \in A \cup B$.

Le due possibilitá possono essere sintetizzate scrivendo: *Le affermazioni vere sono* 0 *oppure* 2. Vogliamo qui risolvere i seguenti problemi.

Problema 1: É possibile considerare due sottoinsiemi A, B di numeri reali e un numero reale x in modo che delle quattro affermazioni ne risulti vera solo *una*?
Problema 2: É possibile considerare due sottoinsiemi A, B di numeri reali e un numero reale x in modo che delle quattro affermazioni ne risultino vere solo *tre*?
Problema 3: É possibile considerare due sottoinsiemi A, B di numeri reali e un numero reale x in modo che le quattro affermazioni risultino *tutte vere*?

Dimostriamo qui di seguito che la risposta é negativa per ciascuno dei tre problemi.

Soluzione del Problema 1: Abbiamo giá osservato che se é vera almeno un'affermazione, allora é vera la prima. Quindi ci chiediamo se sia possibile determinare A, B, x in modo da rendere 1) vera e 2),3),4) false. Ebbene, se $x \in A \cup B$ e $x \notin A \cap B$ ci sono due possibilitá: $x \in A$ oppure $x \notin A$. Nel primo caso, poiché $x \notin A \cap B$, deve risultare anche $x \notin B$, quindi deve risultare vera la 3) (e questo non si verifica: abbiamo detto che vogliamo la 3) falsa!). Nel secondo caso, poiché $x \in A \cup B$, deve risultare anche $x \in B$, quindi deve risultare vera la 4) (e questo non si verifica: abbiamo detto che vogliamo la 4) falsa!). La conclusione é che in ogni caso non puó accadere che la 1) sia vera e le altre false.

Soluzione del Problema 2: Abbiamo giá osservato che se é vera almeno un'affermazione, allora la prima é vera . Osserviamo anche che le affermazioni 3) e 4) non possono essere entrambe vere: infatti, se é vera la 3), deve risultare in particolare $x \in A$, ma questo va contro la veridicitá della 4). Quindi sono vere le prime tre oppure la 1), la 2) e la 4). Quindi in ogni caso é vera la 2), cioé $x \in A \cap B$, e questo é incompatibile sia con la 3) che con la 4). La conclusione é che in ogni caso non puó accadere che delle quattro affermazioni ne risultino vere solo tre.

Soluzione del Problema 3: Nella soluzione precedente abbiamo giá osservato che le affermazioni 3) e 4) non possono essere entrambe vere, quindi non puó accadere che le quattro affermazioni risultino tutte vere.