Domande sul teorema di esistenza dell'estremo superiore

Riportiamo qui di seguito alcune domande relative alla dimostrazione del teorema di esistenza dell'estremo superiore. Il significato dei simboli é quello utilizzato nel corso e coincide con quello utilizzato nel libro di testo. Le risposte sono nella pagina seguente.

1. *É vero che* $\mathcal{M} = \{maggioranti\ di\ \mathcal{N}\}$*?*

2. *É vero che* $\mathcal{N} = \{minoranti\ di\ \mathcal{M}\}$*?*

3. *Supponiamo che per un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente risulti* $s \in A$*. Possiamo concludere che* $s = \max A$*?*

4. *Supponiamo che un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sia dotato di massimo. Possiamo affermare* $\max A \in \mathcal{M}$*?*

5. *Supponiamo che un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sia dotato di massimo. Possiamo affermare* $\max A = \sup A$*?*

6. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente. Possiamo affermare* $A \subseteq \mathcal{N}$*?*

7. *Possiamo affermare* $s \notin \mathcal{N}$*?*

8. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente e sia* p *un minorante di* A*. Possiamo affermare che* $p \in \mathcal{N}$*?*

9. *Possiamo affermare che* $\mathcal{N}$ *é sicuramente una semiretta aperta?*

10. *Posto* $A =]0, 1[$, $\mathcal{N} =$*?* , $\mathcal{M} =$*?*

Domande sul teorema di esistenza dell'estremo superiore

Riportiamo qui di seguito alcune domande (con le relative risposte) relative alla dimostrazione del teorema di esistenza dell'estremo superiore. Il significato dei simboli é quello utilizzato nel corso e coincide con quello utilizzato nel libro di testo.

1. *É vero che* $\mathcal{M} = \{maggioranti\ di\ \mathcal{N}\}$*?*
SI. Dalla dimostrazione segue che $\mathcal{M} = [s, +\infty[$ e quindi, essendo $\mathcal{N} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, risulta $\mathcal{N} =]-\infty, s[$. L'insieme dei maggioranti di $\mathcal{N}$ é quindi costituito da s e da tutti i numeri reali maggiori di s.

2. *É vero che* $\mathcal{N} = \{minoranti\ di\ \mathcal{M}\}$*?*
NO. Addirittura si puó affermare che per qualunque insieme A risulta $\mathcal{N} \neq \{minoranti\ di\ \mathcal{M}\}$. Infatti dalla dimostrazione segue che $\mathcal{M} = [s, +\infty[$ e quindi, essendo $\mathcal{N} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, risulta $\mathcal{N} =]-\infty, s[$. L'insieme dei minoranti di $\mathcal{M}$ é quindi costituito da s e da tutti i numeri reali minori di s, quindi $\mathcal{N} \neq]-\infty, s]$.

3. *Supponiamo che per un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente risulti* $s \in A$*. Possiamo concludere che* $s = \max A$*?*
SI. Risulta $s = \max A$ perché $s \in A$ (per ipotesi) e perché s é, in particolare, un maggiorante di A (alla fine della dimostrazione si vede che $s \in \mathcal{M}$.

4. *Supponiamo che un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sia dotato di massimo. Possiamo affermare* $\max A \in \mathcal{M}$*?*
SI, perché il massimo di un insieme di numeri reali é, in particolare, un maggiorante.

5. *Supponiamo che un dato insieme* $A \subseteq \mathbb{R}$ *sia dotato di massimo. Possiamo affermare* $\max A = \sup A$*?*
SI, perché $\max A$ é, in particolare, un maggiorante; d'altra parte é il minimo dei maggioranti perché se $x \in \mathbb{R}$ verifica $x < \max A$, allora x non puó essere un maggiorante di A, essendo, in particolare, $\max A \in A$.

6. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente. Possiamo affermare* $A \subseteq \mathcal{N}$*?*
NO. Se, per esempio, A é costituito da un solo elemento, allora coincide con il suo massimo e quindi il suo unico elemento é anche il minimo dei suoi maggioranti (denotato con s nella dimostrazione). Ne segue che addirittura $A \subseteq \mathcal{M}$ e $A \cap \mathcal{N} = \emptyset$. In generale, se A é dotato di massimo, non puó accadere che $A \subseteq \mathcal{N}$ perché il massimo di A appartiene sicuramente a $\mathcal{M}$.

7. *Possiamo affermare* $s \notin \mathcal{N}$*?*
SI. Infatti la dimostrazione si conclude dimostrando che $s \in \mathcal{M}$.

8. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *limitato superiormente e sia* p *un minorante di* A*. Possiamo affermare che* $p \in \mathcal{N}$*?*
NO. Se A é costituito da un solo elemento, allora coincide con il suo minimo e quindi il suo unico elemento é anche un particolare minorante di A. In questa situazione tale minorante non appartiene ad $\mathcal{N}$ ma ad $\mathcal{M}$. Osserviamo che se A possiede almeno un altro elemento (quindi se A é costituito da due o piú elementi, anche infiniti), allora p non puó essere un maggiorante di A e quindi, in questa seconda situazione, possiamo affermare che $p \in \mathcal{N}$.

9. *Possiamo affermare che* $\mathcal{N}$ *é sicuramente una semiretta aperta?*
SI. Dalla dimostrazione segue che $\mathcal{M} = [s, +\infty[$ e quindi, essendo $\mathcal{N} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$, risulta $\mathcal{N} =]-\infty, s[$.

10. *Posto* $A =]0, 1[$, $\mathcal{N} = ?$, $\mathcal{M} = ?$
$\mathcal{N} =]-\infty, 1[$, $\mathcal{M} = [1, +\infty[$.