DOMANDE SUL RANGO DI UNA MATRICE

1. Una matrice 5x7 ha tutti i minori di ordine 2 nulli. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1: se tutti i minori di ordine 2 sono nulli, saranno nulli anche tutti i minori di ordine maggiore di 2, quindi il massimo ordine dei minori non nulli può essere al più 1 (potrebbe essere 0 se la matrice ha tutti gli elementi nulli).

2. Una matrice 7x7 ha determinante nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6: il rango non può essere 7, altrimenti dovrebbe esistere un minore non nullo di ordine 7. Ma il determinante della matrice 7x7 è l'unico minore di ordine 7, e sappiamo che è nullo. Il rango è, quindi, minore di 7.

3. Una matrice 4x9 ha un minore di ordine 4 nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4: in altri termini, il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne). Avere un minore di ordine 4 nullo non esclude che esista un altro minore di ordine 4 non nullo.

4. Una matrice 4x9 ha un minore di ordine 4 non nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: è necessariamente 4: infatti 4 è un ordine di un minore non nullo e non esistono minori di ordine maggiore di 4.

5. Una matrice 4x9 ha una riga nulla (per esempio la seconda riga è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3: il rango non può superare 4 perchè la matrice non ha più di 4 righe; il rango non può essere 4 perchè ogni sottomatrice quadrata di ordine 4 possiede una riga nulla e quindi ha determinante nullo. Ne segue che il rango deve essere minore di 4.

6. Una matrice 4x9 ha una colonna nulla (per esempio la seconda colonna è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4: il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne, cioè 4 nel nostro caso), perchè le colonne sono 9 e 8 colonne possono determinare qualunque valore per i minori di ordine 4 (e di ordine inferiore a 4).

7. Una matrice 4x9 ha un minore di ordine 2 diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: 2 oppure 3 oppure 4: se il rango fosse 0 oppure 1 tutti i minori di ordine maggiore di 1 sarebbero nulli (quindi in particolare sarebbero nulli tutti i minori di ordine 2).

8. Una matrice 5x5 ha determinante diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: è necessariamente 5, perchè 5 è un ordine di minore non nullo e non esistono minori di ordine maggiore di 5.

9. I minori di ordine 3 di una matrice 6x7 sono 0, 5, 2, 1, 7, 31
Quanto può essere il rango?

Risposta: 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6: infatti esiste un minore di ordine 3 non nullo e il massimo ordine dei minori non nulli non può essere più piccolo di 3.

10. Una matrice 6x9 ha sette colonne tutte di zeri. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2: infatti al più 2 colonne hanno elementi potenzialmente non nulli e ogni sottomatrice quadrata di ordine 3 ha almeno una colonna con elementi tutti nulli; dunque tutti i minori di ordine 3 e di ordine maggiore di 3 sono nulli e il massimo ordine dei minori non nulli è al più 2.

11. Una matrice quadrata di ordine 4 ha le prime tre colonne con elementi tutti uguali a 2. Quanto può essere il rango?

Risposta: 1 oppure 2: infatti ogni sottomatrice quadrata di ordine 3 ha due colonne uguali, quindi ha determinante nullo. Il massimo ordine dei minori non nulli deve quindi essere minore di 3, quindi in linea di principio può essere 0 oppure 1 oppure 2. Ma zero non può essere, perchè la matrice, avendo almeno un elemento uguale a 2, non è la matrice identicamente nulla.

12. Una matrice quadrata di ordine 6 avente determinante nullo viene moltiplicata (righe per colonne) con un'altra matrice quadrata di ordine 6. Quanto può essere il rango del prodotto?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5: infatti il prodotto ha determinante uguale al prodotto dei determinanti (per il teorema di Binet) e quindi ha determinante nullo. Essendo l'ordine 6 (sia dei fattori, sia del prodotto), il rango deve essere inferiore a 6.

13. Il vettore riga (1,2,3,4,5) viene ricopiato 8 volte per formare una matrice di 8 righe e 5 colonne. Successivamente l'elemento che sta sulla prima riga e sulla quinta colonna viene cancellato e sostituito con il numero 0. Qual è il rango della matrice ottenuta in questo modo?

Risposta: 2: la sottomatrice 2x2 più in alto a destra ha la prima riga 4 0 e la seconda riga 4 5 e quindi ha determinante 20 (che è diverso da zero). Ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di 2 ha (almeno) due righe uguali e quindi ha determinante nullo. Ne segue che il rango è 2.

14. Un vettore di 7 componenti può essere identificato con una matrice di tipo 1x7 oppure 7x1. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1: non può essere maggiore del minimo tra numero di righe e il numero di colonne, dunque non può essere 2, nè più grande di 2. È zero se tutte le componenti del vettore sono nulle, è 1 se esiste una componente non nulla.

15. Il rango di una matrice 3x5 non è 3. Esiste un minore di ordine 3 uguale a zero?

Risposta: certamente! Anzi tutti i minori di ordine 3 sono nulli, perchè il massimo ordine dei minori non nulli è al più 2.

16. Una matrice 7x8 ha tutti i minori di ordine 3 nulli. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2: se tutti i minori di ordine 3 sono nulli, saranno nulli anche tutti i minori di ordine maggiore di 3, quindi il massimo ordine dei minori non nulli può essere al più 2 (potrebbe essere 0 se la matrice ha tutti gli elementi nulli).

17. Una matrice 5x5 ha determinante nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4: il rango non può essere 5, altrimenti dovrebbe esistere un minore non nullo di ordine 5. Ma il determinante della matrice 5x5 è l'unico minore di ordine 5, e sappiamo che è nullo. Il rango è, quindi, minore di 5.

18. Una matrice 8x5 ha un minore di ordine 5 nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5: in altri termini, il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne). Avere un minore di ordine 5 nullo non esclude che esista un altro minore di ordine 5 non nullo.

19. Una matrice 6x9 ha un minore di ordine 4 non nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 4 oppure 5 oppure 6: infatti 4 è un ordine di un minore non nullo e il massimo ordine dei minori non nulli non può essere minore di 4.

20. Una matrice 4x3 ha una riga nulla (per esempio la terza riga è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3: il rango non può superare 3 perchè la matrice non ha più di 3 colonne; il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne, cioè 3 nel nostro caso), perchè tre righe qualunque possono determinare qualunque valore per i minori di ordine 3.

21. Una matrice 4x3 ha una colonna nulla (per esempio la seconda colonna è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2: il rango non può superare 3 perchè la matrice non ha più di 3 colonne; non è 3 perchè qualunque sottomatrice quadrata di ordine 3 ha determinante nullo, avendo una colonna tutta nulla, ed infine può essere qualunque numero possibile minore di 3 (dunque 0,1,2) perchè due colonne qualunque possono determinare qualunque valore per i minori di ordine 2.

22. Una matrice 7x3 ha un minore di ordine 2 diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: 2 oppure 3: se il rango fosse 0 oppure 1 tutti i minori di ordine maggiore di 1 sarebbero nulli (quindi in particolare serebbero nulli tutti i minori di ordine 2). Il numero 2 è un ordine di minore non nullo, ma ciò non esclude che il massimo ordine possa essere maggiore (ovvero 3, non essendoci più di 3 colonne).

23. Una matrice 4x4 ha determinante diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: è necessariamente 4, perchè 4 è un ordine di minore non nullo e non esistono minori di ordine maggiore di 4.

24. I minori di ordine 5 di una matrice 7x9 sono 6, 0, 3, 9, 7, 14, 21
Quanto può essere il rango?

Risposta: 5 oppure 6 oppure 7: infatti esiste un minore di ordine 5 non nullo e il massimo ordine dei minori non nulli non può essere più piccolo di 5.

25. Una matrice 7x5 ha 5 righe tutte di zeri. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2: infatti al più 2 righe hanno elementi potenzialmente non nulli e ogni sottomatrice quadrata di ordine 3 ha almeno una riga con elementi tutti nulli; dunque tutti i minori di ordine 3 e di ordine maggiore di 3 sono nulli e il massimo ordine dei minori non nulli è al più 2.

26. Una matrice quadrata di ordine 6 ha le prime quattro colonne con elementi tutti uguali a 3. Quanto può essere il rango?

Risposta: 1 oppure 2 oppure 3: infatti ogni sottomatrice quadrata di ordine 4 ha due colonne uguali, quindi ha determinante nullo. Il massimo ordine dei minori non nulli deve quindi essere minore di 4, quindi in linea di principio può essere 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3. Ma 0 non può essere, perchè la matrice, avendo almeno un elemento uguale a 3, non è la matrice identicamente nulla.

27. Una matrice quadrata di ordine 7 avente determinante non nullo viene moltiplicata (righe per colonne) con un'altra matrice quadrata di ordine 7 avente determinante non nullo. Quanto può essere il rango del prodotto?

Risposta: è necessariamente 7: infatti il determinante del prodotto, essendo il prodotto dei determinanti per il teorema di Binet, è non nullo e una qualunque matrice quadrata di ordine 7 con determinante non nullo ha rango 7.

28. Il vettore riga (1,2,3,4,5,6,7,8,9) viene ricopiato 4 volte per formare una matrice di 4 righe e 9 colonne. Successivamente l'elemento che sta sulla prima riga e sulla nona colonna viene cancellato e sostituito con il numero 0. Qual è il rango della matrice ottenuta in questo modo?

Risposta: 2: la sottomatrice 2x2 più in alto a destra ha la prima riga 8 0 e la seconda riga 8 9 e quindi ha determinante 72 (che è diverso da zero). Ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di 2 ha (almeno) due righe uguali e quindi ha determinante nullo. Ne segue che il rango è 2.

29. Un vettore di 5 componenti può essere identificato con una matrice di tipo 1x5 oppure 5x1. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1: non può essere maggiore del minimo tra numero di righe e il numero di colonne, dunque non può essere 2, nè più grande di 2. È zero se tutte le componenti del vettore sono nulle, è 1 se esiste una componente non nulla.

30. Il rango di una matrice 8x4 non è 4. Esiste un minore di ordine 4 uguale a zero?

Risposta: certamente! Anzi tutti i minori di ordine 4 sono nulli, perchè il massimo ordine dei minori non nulli è al più 3.

31. Una matrice 9x7 ha tutti i minori di ordine 6 nulli. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5: se tutti i minori di ordine 6 sono nulli, saranno nulli anche tutti i minori di ordine maggiore di 6, quindi il massimo ordine dei minori non nulli può essere al più 5 (potrebbe essere 0 se la matrice ha tutti gli elementi nulli).

32. Una matrice 8x8 ha determinante nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6 oppure 7: il rango non può essere 8, altrimenti dovrebbe esistere un minore non nullo di ordine 8. Ma il determinante della matrice 8x8 è l'unico minore di ordine 8, e sappiamo che è nullo. Il rango è, quindi, minore di 8.

33. Una matrice 3x7 ha un minore di ordine 3 nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3: in altri termini, il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne). Avere un minore di ordine 3 nullo non esclude che esista un altro minore di ordine 3 non nullo.

34. Una matrice 7x4 ha un minore di ordine 4 non nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: è necessariamente 4, perchè 4 è un ordine di minore non nullo e non esistono minori di ordine maggiore di 4.

35. Una matrice 7x8 ha una riga nulla (per esempio la quarta riga è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6: il rango non può superare 6 perchè ogni sottomatrice quadrata di ordine 7 ha determinante nullo, avendo sicuramente una riga nulla.

36. Una matrice 7x9 ha una colonna nulla (per esempio la quinta colonna è fatta tutta di zeri). Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6 oppure 7: il rango può essere qualunque (ovvero un qualunque numero tra 0 e il massimo possibile, che è il minimo tra il numero di righe e il numero di colonne, cioè 7 nel nostro caso), perchè le colonne sono 9 e 8 colonne possono determinare qualunque valore per i minori di ordine 7.

37. Una matrice 5x9 ha un minore di ordine 4 diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: 4 oppure 5: se il rango fosse minore di 4, tutti i minori di ordine 4 sarebbero nulli. Il numero 4 è un ordine di minore non nullo, ma ciò non esclude che il massimo ordine possa essere maggiore (ovvero 5, non essendoci più di 5 righe).

38. Una matrice 8x8 ha determinante diverso da zero.
Quanto può essere il rango?

Risposta: è necessariamente 8, perchè 8 è un ordine di minore non nullo e non esistono minori di ordine maggiore di 8.

39. I minori di ordine 2 di una matrice 8x4 sono 3, 7, 0, 1, 17, 22, 5
Quanto può essere il rango?

Risposta: 2 oppure 3 oppure 4: infatti esiste un minore di ordine 2 non nullo e il massimo ordine dei minori non nulli non può essere più piccolo di 2 e non può essere più grande di 4 perchè la matrice assegnata ha 4 colonne.

40. Una matrice 5x8 ha 6 colonne tutte di zeri. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2: infatti al più 2 colonne hanno elementi potenzialmente non nulli e ogni sottomatrice quadrata di ordine 3 ha almeno una colonna con elementi tutti nulli; dunque tutti i minori di ordine 3 e di ordine maggiore di 3 sono nulli e il massimo ordine dei minori non nulli è al più 2.

41. Una matrice quadrata di ordine 8 ha le prime sei colonne con elementi tutti uguali a 4. Quanto può essere il rango?

Risposta: 1 oppure 2 oppure 3: infatti ogni sottomatrice quadrata di ordine 4 ha due colonne uguali, quindi ha determinante nullo. Il massimo ordine dei minori non nulli deve quindi essere minore di 4, quindi in linea di principio può essere 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3. Ma 0 non può essere, perchè la matrice, avendo almeno un elemento uguale a 4, non è la matrice identicamente nulla.

42. Una matrice quadrata di ordine 9 avente determinante nullo viene moltiplicata (righe per colonne) con un'altra matrice quadrata di ordine 9 avente determinante non nullo. Quanto può essere il rango del prodotto?

Risposta: 0 oppure 1 oppure 2 oppure 3 oppure 4 oppure 5 oppure 6 oppure 7 oppure 8: infatti il prodotto ha determinante uguale al prodotto dei determinanti (per il teorema di Binet) e quindi ha determinante nullo. Essendo l'ordine 9 (sia dei fattori, sia del prodotto), il rango deve essere inferiore a 9.

43. Il vettore riga (1,2,3,4) viene ricopiato 9 volte per formare una matrice di 9 righe e 4 colonne. Successivamente l'elemento che sta sulla prima riga e sulla nona colonna viene cancellato e sostituito con il numero 0. Qual è il rango della matrice ottenuta in questo modo?

Risposta: 2: la sottomatrice 2x2 più in alto a destra ha la prima riga 3 0 e la seconda riga 3 4 e quindi ha determinante 12 (che è diverso da zero). Ogni sottomatrice quadrata di ordine maggiore di 2 ha (almeno) due righe uguali e quindi ha determinante nullo. Ne segue che il rango è 2.

44. Un vettore di 8 componenti può essere identificato con una matrice di tipo 1x8 oppure 8x1. Quanto può essere il rango?

Risposta: 0 oppure 1: non può essere maggiore del minimo tra numero di righe e il numero di colonne, dunque non può essere 2, nè più grande di 2. È zero se tutte le componenti del vettore sono nulle, è 1 se esiste una componente non nulla.

45. Il rango di una matrice 6x9 non è 6. Esiste un minore di ordine 6 uguale a zero?

Risposta: certamente! Anzi tutti i minori di ordine 6 sono nulli, perchè il massimo ordine dei minori non nulli è al più 5.

46. Una matrice 9x7 ha tutti i minori di ordine 6 nulli tranne uno, che è non nullo. Quanto può essere il rango?

Risposta: 6 oppure 7: visto che esiste un minore non nullo di ordine 6, il massimo ordine dei minori non nulli può essere almeno 6 e non può superare 7 perchè la matrice in questione ha 7 colonne.