Domanda: perchè se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ non posso dire subito che $\ell_1 = \ell_2$?

DEFINIZIONE DI LIMITE DI UNA FUNZIONE (reale di una variabile reale, caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A.

Diremo che $\ell \in \mathbb{R}$ è <u>un</u> limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se ℓ verifica la seguente affermazione ("filastrocca"):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap A$$

TEOREMA (di unicità del limite)

$$\left.\begin{array}{l} \ell_1 \in \mathbb{R} \text{ verifica la filastrocca} \\ \ell_2 \in \mathbb{R} \text{ verifica la filastrocca} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

Dim. (tra poco!)

NOTAZIONE (= "definizione di un simbolo")

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A. Il teorema di unicità del limite afferma che non possono esistere due (= "almeno due") numeri reali ℓ (distinti!) che verificano la filastrocca, quindi può esistere al più un solo numero ℓ che verifica la filastrocca.
Se ne esiste uno (dunque "... e uno solo"), scriveremo

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$