



Small Helicopter

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione

Elaborato per "Sistemi di Controllo Multivariabile"

Corso tenuto dal prof. Francesco Amato

Mauro Fusco

Luigi Di Massa

M58000041

M58000053



INDICE

INTRODUZIONE

Capitolo I – Elementi di Fisica dell'Elicottero

Equazioni della dinamica

Forze e momenti

Comportamento delle lame rotoriche

Velocità indotte

Calcolo delle forze e dei momenti

Piatto oscillante

Calcolo dei movimenti delle lame

Motore elettrico

Capitolo II – Il Modello matematico non lineare

Equazioni del modello matematico

Formulazione nello spazio di stato

Capitolo III – Linearizzazione e Sottosistemi

Linearizzazione del modello matematico non lineare

Modello per il moto orizzontale e analisi delle dinamiche

Modello per il moto verticale e analisi delle dinamiche

Capitolo IV – Proprietà strutturali

Capitolo V – Controllo in frequenza

Disaccoppiamento per il Modello Verticale



Capitolo VI – *Allocazione dei poli*

Allocazione dei poli per il Modello verticale

Allocazione dei poli per il Modello orizzontale

Capitolo VII – *Controllo ottimo lineare quadratico su orizzonte finito*

Controllo LQR su orizzonte finito per il Modello Verticale

Controllo LQR su orizzonte finito per il Modello Orizzontale

Capitolo VIII – *Controllo ottimo lineare quadratico su orizzonte infinito*

Controllo LQR su orizzonte infinito per il Modello Verticale

Controllo LQR su orizzonte infinito per il Modello Orizzontale

Capitolo IX – *Tracking ottimo su orizzonte infinito*

Inseguimento di una traiettoria per il Modello Verticale con LQR infinito

Inseguimento di una traiettoria per il Modello Orizzontale con LQR infinito

Inseguimento di una traiettoria per il Modello Verticale con controllo PI

Inseguimento di una traiettoria per il Modello Orizzontale con controllo PI

Capitolo X – *Osservatori dello stato*

Osservatori di Luenberger per il Modello verticale

Osservatori di Luenberger per il Modello orizzontale

Dal calcolatore:

Simulink Flight Gear

Risposta ad una perturbazione dello stato

Inseguimento di una traiettoria a basse velocità

Bibliografia



Introduzione

Il presente lavoro tratta la progettazione e la simulazione di controllori per un elicottero di piccole dimensioni. L'obiettivo di questo elaborato è di ripercorrere, applicandoli al modello matematico dell'elicottero, tutte le teorie e tecniche presentate durante il corso di "Sistemi di controllo Multivariabile". In particolare, con riferimento ai diversi sottosistemi "indipendenti" che rappresentano l'elicottero, si procederà all'analisi e alla sintesi sfruttando:

- 1) Metodi frequenziali per sistemi MIMO
- 2) Equazione di Lyapunov
- 3) Controllabilità ed Osservabilità
- 4) Assegnamento degli autovalori mediante LMI
- 5) Assegnamento dell'autostruttura mediante risoluzione di un problema di ottimizzazione
- 6) Tecniche di controllo LQR su orizzonte finito
- 7) Tecniche di controllo LQR su orizzonte infinito
- 8) Tracking ottimo su orizzonte infinito con controllo LQR infinito
- 9) Tracking ottimo su orizzonte infinito con controllo PI
- 10) Teoria degli osservatori di Luenberger

Tutte le fasi di analisi e sintesi sono sostenute ed accompagnate dall'utilizzo di MatLab/Simulink.

Nella fase conclusiva, una volta progettati i controllori necessari, si farà vedere un metodo per avere una visione più intuitiva di quanto realizzato mediante l'animazione. Quest'ultima si otterrà facendo interagire il programma Simulink col simulatore di volo "Flight Gear".





Capitolo I – Elementi di Fisica dell'Elicottero

§ 1 – Introduzione

L'elicottero è una macchina volante più pesante dell'aria, che utilizza per la sustentazione superfici portanti dotate di moto rotatorio (rotore). Il rotore è l'elemento composto da più pale che attraverso la sua rotazione permette, oltre al sustentamento, anche il pilotaggio e la propulsione di un aerogiro.

In particolare, un rotore consiste in un mozzo (in inglese "hub") calettato su di un albero in rotazione libera o posto in rotazione dal motore. Al mozzo vengono attaccate generalmente due (o anche più) pale. Un rotore (a differenza di un' "elica aeronautica") può sviluppare una spinta non solo nella direzione di avanzamento, bensì anche in altre direzioni.

Col termine di "sistema rotore" (che si indicherà a volte anche, semplicemente, come "rotore") si intendono anche i sistemi di orientamento delle pale, che costituiscono gli attuatori del sistema di controllo del velivolo.

Ben lungi da voler qui riassumere la storia di questa macchina, si deve però ricordare che essa fu messa a punto quando gli aeroplani si libravano in volo già da quasi mezzo secolo (il primo volo libero venne effettuato dal russo Igor Sikorsky il 13 maggio 1940 a bordo del "VS-300"). La difficoltà principale sta proprio nella realizzazione di un rotore efficiente. I problemi maggiori che si hanno allorché si voglia effettuare un volo con un'elica rotante sono due:

- 1) Durante una traslazione in una certa direzione, alla velocità rotante di ogni pala si somma vettorialmente alla velocità di traslazione:
 - Nella pala che si muove nello stesso senso del moto (pala avanzante) la velocità risultante risulta aumentata in modulo
 - Nella pala opposta (pala retrocedente) la velocità risultante risulta diminuita in modulo

Di conseguenza la pala avanzante produce maggiore portanza di quella retrocedente (si ricordi che la portanza dipende in maniera almeno quadratica dalla velocità) e l'elicottero tende a ribaltarsi.

- 2) Se l'elicottero, tramite il motore, mette in rotazione il rotore che si muove nell'aria, questo a sua volta, frenato dall'aria, tende a far ruotare tutto l'elicottero in senso opposto alla sua rotazione: questa azione è detta "coppia di reazione".

✚ Per risolvere il *primo problema* esposto, gli elicotteri hanno la capacità di variare l'inclinazione delle pale a seconda della loro posizione angolare. La pala è perciò fissata al mozzo mediante una cerniera ad asse orizzontale parallelo a quello della pala stessa, che consente di variare



l'inclinazione ("calettamento") rispetto all'asse di rotazione. Tale cerniera è detta "cerniera di passo", perché consente la variazione del passo dell'elica cui il rotore può essere assimilato. La variazione di passo dovrà essere tale da aumentare l'angolo di incidenza della pala durante la fase retrocedente per compensare la minore velocità e diminuirla durante la fase avanzante. Un'altra soluzione che viene adottata per evitare la dissimmetria, è quella di una cerniera di "flappeggio" che consente alla pala di alzarsi durante la fase avanzante o abbassarsi durante la fase retrocedente. A seconda dei movimenti consentiti, si distinguono:

- a) Rotori completamente articolati: ogni pala è libera di oscillare verso l'alto o il basso ("cerniera di flappeggio"), in avanti o indietro ("cerniera di brandeggio"), oltre che di variare il calettamento.
- b) Rotori semi-rigidi: ad ogni pala è consentito solo il flappeggio ed il cambio di passo.

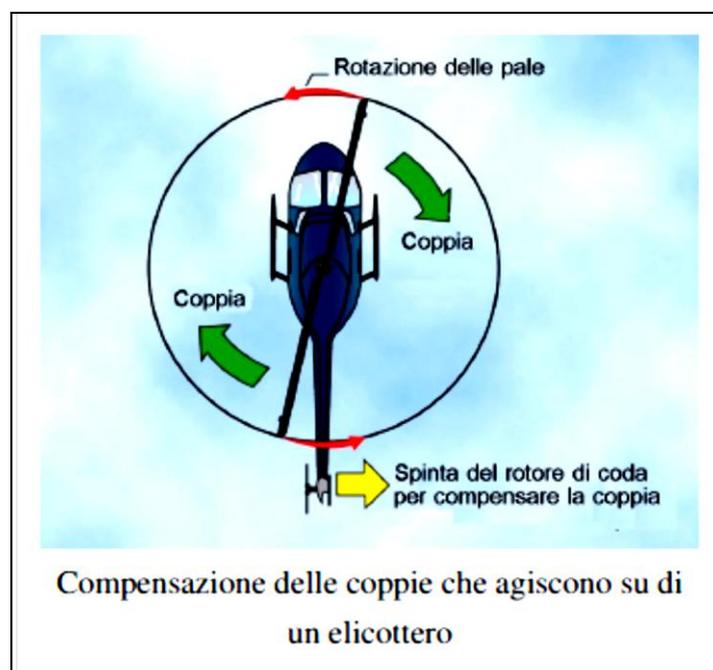
Il piccolo elicottero trattato in questo lavoro è dotato di un rotore semi-rigido.

✚ Per risolvere il *secondo problema* deve essere previsto un sistema di reazione anti-coppia. Quelli più diffusi modernamente sono:

- a) rotore di coda convenzionale;
- b) rotore di coda intubato: è una configurazione ove l'elica rotorica risulta avvolta in una struttura tubolare che consente di ridurre il rumore acustico (problema non trascurabile per elicotteri di dimensioni normali);
- c) NOTAR (acronimo di "NO Tail Rotor") : la reazione anticoppia viene sviluppata emettendo un fluido ad elevata pressione dalla parte posteriore del velivolo.

Il piccolo elicottero trattato in questo lavoro è dotato di un rotore di coda convenzionale.

In conclusione si osservi la seguente figura esplicativa del principio di funzionamento del rotore di coda.





In questo elaborato si farà riferimento ad un elicottero senza equipaggio di piccole dimensioni, il quale è dotato di un servo-rotore addizionale chiamato "barra stabilizzatrice (Bell-Hiller nel caso trattato) "che smorza le dinamiche del rotore dell'elicottero" (vedi seguito). Le dinamiche degli elicotteri di piccola scala sono abbastanza simili a quelle degli elicotteri di grossa taglia, sebbene esse siano progettate per condizioni di inviluppo di volo diverse da quelle di questi ultimi.

Come detto una lama del rotore principale di un elicottero effettua diversi movimenti sotto l'azione del carico aerodinamico. Il movimento di "flappeggio" (flapping) delle pale è il fenomeno più importante che interessa il rotore di un elicottero e le sue dinamiche sono influenzate da:

- a) la velocità dell'elicottero
- b) la velocità del rotore

La barra stabilizzatrice Bell-Hiller, e le sue dinamiche, agiscono sull'elicottero restringendo la banda passante del veicolo.

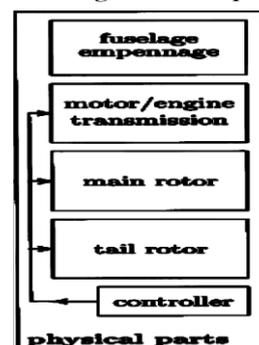
L'intero complesso dei movimenti cui si è accennato può essere incluso nel modello matematico ma ciò risulta alquanto complesso: pertanto si terrà conto solo di alcune caratteristiche indispensabili come le dinamiche in alta frequenza e l'instabilità dell'impianto, le quali possono essere rappresentate da un sistema linearizzato.

In generale, è da sottolineare che **l'elicottero è un sistema instabile che pertanto abbisogna della presenza continua di un controllore (che può essere il pilota nel caso di elicotteri con equipaggio) che possa adulterare le dinamiche naturali del sistema.**

La descrizione del comportamento in volo di un piccolo elicottero è un fatto complesso perché tale veicolo può essere riguardato come l'assemblamento di sottosistemi interdipendenti, ognuno dei quali dotato delle proprie caratteristiche distintive. Tali sottosistemi sono:

- 1) forma della fusoliera
- 2) trasmissione del motore
- 3) rotore principale
- 4) rotore di coda
- 5) controllore

Ciò è rappresentato a lato.



Il controllore è in grado di agire sulla trasmissione e sui rotori, non può invece modificare la forma della fusoliera.

Il rotore principale è la parte dominante ed è dotato della struttura più complicata: esso influenza le equazioni delle forze e dei momenti nella parte principale del modello.

Le altre parti sono, inoltre, fortemente variabili a seconda del particolare elicottero considerato, ivi si svilupperanno le equazioni risultanti dalla modellizzazione eseguita su di un banco di prova riportati in [1], pur tuttavia esse possono essere facilmente estese ad ogni elicottero progettato con:

- a) un rotore a due lame;
- b) una barra stabilizzatrice Bell-Hiller;
- c) un rotore di coda.



La descrizione di ogni componente dell'elicottero può effettuarsi definendo diversi sistemi di coordinate, in tal modo il moto dell'aeromobile può essere specificato tenendo conto anche delle caratteristiche geometriche della fusoliera.

§ 2 – Equazioni della dinamica

Al fine di derivare le equazioni dei moti traslazionale e rotazionale dell'elicottero si assume che esso sia un **corpo rigido**.

Tale semplificazione attiene a tutta la teoria della navigazione che descrive tutti le trasformazioni di coordinate necessarie alla scrittura delle equazioni cardinali della dinamica.

Si assume, inoltre, che posizioni e velocità sia lineari che angolari siano misurate e disponibili per l'aeromobile senza equipaggio poiché quest'ultimo è normalmente dotato:

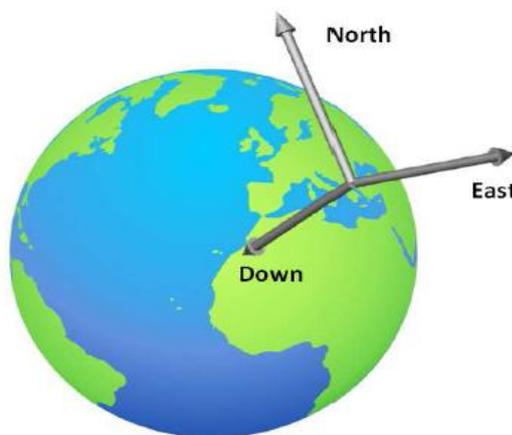
- a) Di un'unità di misura inerziale (IMU)
- b) Di un sistema di posizione globale (GPS)

In realtà, nell'ultima parte di questo lavoro viene anche contemplata la possibilità di non disporre di tutte queste informazioni ma soltanto di alcune tra velocità lineari e posizioni. Le altre informazioni verranno stimate mediante osservatori che si baseranno sul modello matematico del sistema ivi riportato.

§ 2.1 – Sistemi di riferimento

Come anticipato è necessario fissare dei sistemi di riferimento. Di norma il sistema di coordinate da utilizzare varia a seconda dell'applicazione, come il controllo della posizione oppure dell'assetto. Dunque è necessario definire diversi sistemi di coordinate, in particolare:

- a) **Descrizione rispetto alla Terra:** tale descrizione è fatta mediante un sistema di coordinate Cartesiane con x^e , y^e , z^e che puntano il Nord, l'Est ed il centro della Terra (NED) con l'origine all'estremità di un punto fissato sulla Terra. Tale sistema di coordinate può essere ritenuto inerziale poiché l'accelerazione cui è soggetto il punto sulla terra non verrà considerata. Esso è rappresentato nella seguente figura:



- b) **Descrizione rispetto al corpo:** tale descrizione è fatta mediante un sistema di coordinate Cartesiane solidale al corpo orientato lungo gli assi dell'elicottero x^b , y^b , z^b (cui corrispondono le velocità lineari u , v , w) che sono orientati in avanti, sul lato destro ed in basso e hanno origine nel baricentro G dell'elicottero. Quest'ultima scelta semplifica le equazioni della cinematica.



- c) **Descrizione di navigazione:** tale descrizione è fatta mediante un sistema di coordinate Cartesiane orientato lungo gli assi dell'elicottero (come la terna solidale al corpo) ma la sua origine è la stessa della terna cartesiana solidale alla Terra. Gli assi di tale terna saranno indicati con i simboli x^n, y^n, z^n .

Per la descrizione dell'assetto basata sulle terne di navigazione e solidale al corpo esistono due metodi di norma utilizzati:

- 1) la formulazione "quaternion";
- 2) gli angoli di Eulero;

Questi ultimi hanno lo svantaggio di presentare una singolarità nella trasformazione per le velocità angolari allorché l'elicottero effettui una rollio oppure un beccheggio pari a 90 gradi; tale fenomeno non compare se si usa la formulazione quaternion. Pur tuttavia, per la loro facile comprensibilità **si useranno gli angoli di Eulero**.

La matrice di trasformazione dal riferimento di navigazione a quello solidale alla Terra è data dalla matrice dei *coseni direttori*

$$C_e^n = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\theta\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

ove:

- θ è l'angolo di beccheggio (*pitch*)
- φ è l'angolo di rollio (*roll*)
- ψ è l'angolo di imbardata (*yaw*)

Per meglio comprendere le terne disposte e gli angoli in questione si osservi il disegno:

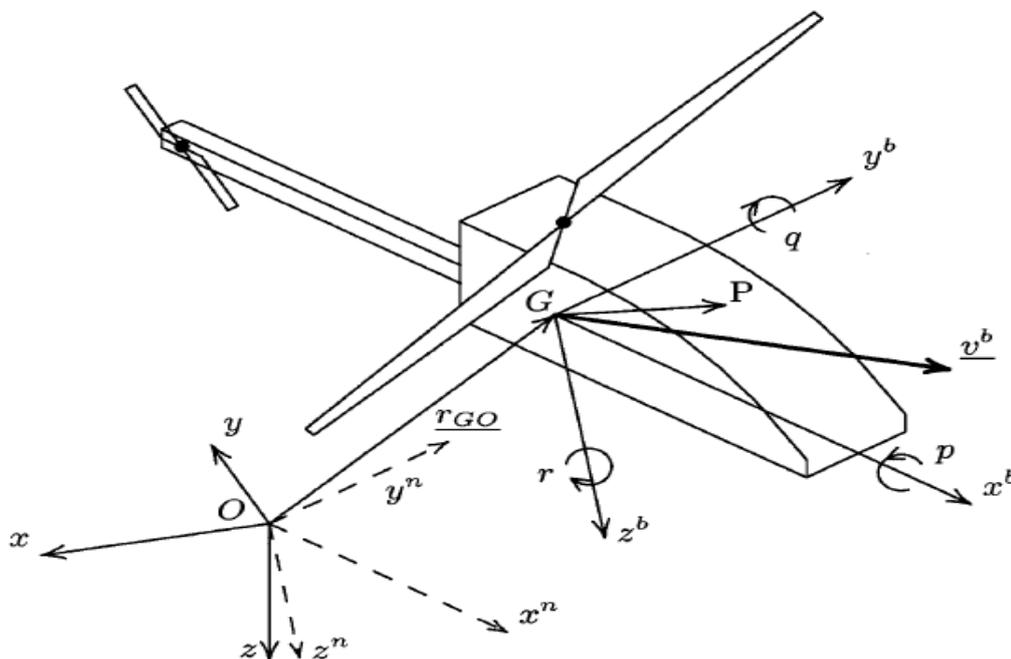


Figura 1: terne di riferimento e velocità



§ 2.2 – Equazioni

Il telaio si muove con componenti della velocità lineare, varianti dal tempo, u, v e w e componenti della velocità angolare che si indicheranno con p, q ed r (come indicato in *figura 1*):

$$u = \dot{x} \quad \text{velocità di avanzamento}$$

$$v = \dot{y} \quad \text{velocità laterale}$$

$$w = \dot{z} \quad \text{velocità verticale}$$

$$p = \dot{\varphi} \quad \text{velocità di rollio}$$

$$q = \dot{\theta} \quad \text{velocità di beccheggio}$$

$$r = \dot{\psi} \quad \text{velocità di imbardata}$$

La variazione delle velocità suddette è dovuta all'azione delle forze e dei momenti che agiscono sull'elicottero, che si indicheranno, secondo le loro componenti lungo gli assi, come: F_x, F_y, F_z ed M_x, M_y, M_z .

Assumendo che la massa del velivolo sia costante, le equazioni si ricavano agevolmente scegliendo un punto P qualsiasi della fusoliera e derivando l'espressione dell'accelerazione assoluta di questo punto: l'origine degli assi mobili è collocato nel baricentro G dell'elicottero (vedi Figura 1).

Il procedimento per ricavare le equazioni comincia considerando il vettore posizione di G rispetto a P:

$$\mathbf{r}_{PG} = x^b \mathbf{e}_{x^b} + y^b \mathbf{e}_{y^b} + z^b \mathbf{e}_{z^b} \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{PG} = \dot{\mathbf{r}}_{PG} = \dot{x}^b \mathbf{e}_{x^b} + \dot{y}^b \mathbf{e}_{y^b} + \dot{z}^b \mathbf{e}_{z^b} + x^b \dot{\mathbf{e}}_{x^b} + y^b \dot{\mathbf{e}}_{y^b} + z^b \dot{\mathbf{e}}_{z^b} \quad (3)$$

La derivata dei versori degli assi della terna solidale al corpo può essere espressa mediante le formule di Poisson come:

$$\dot{\mathbf{e}}_{x^b} = \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{e}_{x^b}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{y^b} = \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{e}_{y^b} \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{z^b} = \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{e}_{z^b}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}_g$ la velocità angolare del corpo rispetto al sistema di riferimento ad esso solidale:

$$\boldsymbol{\omega}_g = p\mathbf{e}_{x^b} + q\mathbf{e}_{y^b} + r\mathbf{e}_{z^b} \quad (5)$$

Effettuando il prodotto vettoriale in (4), risulta:

$$\dot{\mathbf{e}}_{x^b} = r\mathbf{e}_{y^b} - q\mathbf{e}_{z^b}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{y^b} = p\mathbf{e}_{z^b} - r\mathbf{e}_{x^b} \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_{z^b} = q\mathbf{e}_{x^b} - p\mathbf{e}_{y^b}$$



Poiché si è fatta l'ipotesi che la fusoliera possa essere approssimata ad un corpo rigido, la distanza del punto di riferimento P dal baricentro G è costante, e la velocità relativa di P rispetto a G può essere scritta come:

$$\mathbf{v}_{PG} = \dot{\mathbf{r}}_{PG} = \dot{x}^b \mathbf{e}_{x^b} + \dot{y}^b \mathbf{e}_{y^b} + \dot{z}^b \mathbf{e}_{z^b} + x^b \dot{\mathbf{e}}_{x^b} + y^b \dot{\mathbf{e}}_{y^b} + z^b \dot{\mathbf{e}}_{z^b} = x^b \dot{\mathbf{e}}_{x^b} + y^b \dot{\mathbf{e}}_{y^b} + z^b \dot{\mathbf{e}}_{z^b}$$

Poiché sono nulle le derivate delle componenti della posizione di P nel riferimento solidale al corpo centrato in G. Utilizzando, poi, le relazioni (6) la velocità di P rispetto a G si può scrivere come:

$$\mathbf{v}_{PG} = (qz^b - ry^b)\mathbf{e}_{x^b} + (rx^b - pz^b)\mathbf{e}_{y^b} + (py^b - qx^b)\mathbf{e}_{z^b} \quad (7)$$

Ed indicando con: u_{PG} , v_{PG} ed w_{PG} le quantità tra parentesi, si può scrivere più sinteticamente:

$$\mathbf{v}_{PG} = u_{PG}\mathbf{e}_{x^b} + v_{PG}\mathbf{e}_{y^b} + w_{PG}\mathbf{e}_{z^b} \quad (8)$$

Derivando la quale si ottiene l'accelerazione di P rispetto a G:

$$\mathbf{a}_{PG} = \dot{\mathbf{v}}_{PG} = (\dot{u}_{PG} - r v_{PG} + q w_{PG})\mathbf{e}_{x^b} + (\dot{v}_{PG} - p w_{PG} + r u_{PG})\mathbf{e}_{y^b} + (\dot{w}_{PG} - q u_{PG} + p v_{PG})\mathbf{e}_{z^b} \quad (9)$$

Ora essendo, chiaramente:

$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_G \quad (10)$$

Scrivendo la velocità del baricentro relativamente alla terna solidale al corpo come:

$$\mathbf{v}_G = u\mathbf{e}_{x^b} + v\mathbf{e}_{y^b} + w\mathbf{e}_{z^b} \quad (11)$$

Dalla (10) e dalla (7) discende immediatamente che:

$$\mathbf{v}_P = (u + qz^b - ry^b)\mathbf{e}_{x^b} + (v + rx^b - pz^b)\mathbf{e}_{y^b} + (w + py^b - qx^b)\mathbf{e}_{z^b} \quad (12)$$

Ed

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{PG} + (\boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{v}_P) \quad (13)$$

Ottenuta l'accelerazione di un generico punto P della fusoliera è possibile scrivere le equazioni della dinamica per le forze ed i momenti agenti sul velivolo.

La somma delle forze esterne (che saranno meglio identificate nei prossimi paragrafi) possono essere viste come agenti nel baricentro del corpo, dunque:

$$\mathbf{F}_G = F_x\mathbf{e}_{x^b} + F_y\mathbf{e}_{y^b} + F_z\mathbf{e}_{z^b} \quad (14)$$

Che può essere scritta per componenti mediante la seconda legge di Newton ($F_i = m a_i$):

$$F_x = m_H(\dot{u} - r v + q w)$$

$$F_y = m_H(\dot{v} - p w + r u) \quad (15)$$

$$F_z = m_H(\dot{w} - q u + p v)$$

avendo considerato, naturalmente, la componente traslazionale dell'accelerazione.

Passando ai momenti, s'osservi che il momento delle forze esterne rispetto al baricentro si può scrivere come:



$$\mathbf{M}_G = \int_{\text{corpo}} \mathbf{r}_P \times \mathbf{a}_P dm \quad (16)$$

Tenendo conto del secondo termine al secondo membro della (13) e della (12), la (16) diventa:

$$\mathbf{M}_G = \left[\int_{\text{corpo}} (ya_z - za_y) dm \right] \mathbf{e}_x + \left[\int_{\text{corpo}} (za_x - xa_z) dm \right] \mathbf{e}_y + \left[\int_{\text{corpo}} (xa_y - ya_x) dm \right] \mathbf{e}_z \quad (17)$$

Indicando con L, M ed N le quantità tra parentesi quadre, il momento delle forze esterne rispetto al polo G si scrive sinteticamente come:

$$\mathbf{M}_G = L\mathbf{e}_x + M\mathbf{e}_y + N\mathbf{e}_z \quad (18)$$

Definendo i momenti principali di inerzia I_x, I_y ed I_z ed i prodotti di inerzia J_{xy}, J_{xz} , ed J_{yz} a causa della simmetria della fusoliera, è possibile dimostrare che solo il prodotto di inerzia J_{xz} ha un valore apprezzabile rispetto ai momenti principali di inerzia, dunque è possibile scrivere che:

$$J_{xy} = J_{yz} = 0 \quad (19)$$

Introducendo tali momenti di inerzia di massa si dimostra (sulla scorta di quanto visto finora) che le componenti lungo gli assi x, y e z del vettore momento delle forze esterne rispetto al polo G, \mathbf{M}_G , si possono scrivere come:

$$M_x = L = I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - J_{xz}(pq + \dot{r})$$

$$M_y = M = I_y \dot{q} - (I_z - I_x)pr - J_{xz}(p^2 - r^2) \quad (20)$$

$$M_z = N = I_z \dot{r} - (I_x - I_y)qp - J_{xz}(\dot{p} - rq)$$

Le (15) e le (20) costituiscono le equazioni della dinamica per il moto traslazione e rotazionale del velivolo rispetto alla terna fissa.

§ 3 – Forze e momenti

Nelle equazioni (15) e (20) i primi membri, componenti, rispettivamente, della forza totale e del momento totale esterno agente sull'elicottero, devono essere identificati. In altre parole, è necessario individuare i fenomeni fisici che interessano l'elicottero in volo, per poter valutare le forze ed i momenti in giuoco in una loro espressione quantitativa dipendente da variabili che andranno a costituire, assieme a quelle cinematiche già introdotte (velocità e posizioni angolari e lineari) lo stato del sistema dinamico.

A tal fine è necessario considerare un certo stato di volo per l'elicottero.

In genere, le caratteristiche di volo di un elicottero possono essere distinte in due diversi regimi:

- 1) In "Hovering" o bassa velocità (fino a circa 10 m/s), inclusa la manovra in verticale.
- 2) In condizioni di velocità medio-alta.

Per "hovering" si intende il "volo a punto fisso", ossia un volo sostenuto a velocità nulla e quota costante.



Il volo a bassa velocità o in hovering caratterizza fortemente l'elicottero, in quanto queste dinamiche distinguono l'elicottero da altri mezzi volanti che non presentano le stesse caratteristiche di maneggevolezza in tali condizioni.

Si deve aggiungere anche che, in realtà, il volo orizzontale ad alta velocità presenta difficoltà relativamente contenute rispetto al regime precedente, poichè mantenere l'elicottero fermo in una posizione, quota e direzione determinate è estremamente difficile, in particolare **in presenza di vento**, il che complica gli atterraggi di precisione e soprattutto i recuperi con il verricello.

Infatti come già anticipato il rotore di un elicottero, preso a sé stante, è un sistema instabile alle basse velocità: l'instabilità a "pendolo" della coppia beccheggio/rollio è una conseguenza della risposta oscillante del rotore a perturbazioni della velocità.

Si deve notare anche che mentre i progettisti di un velivolo possono fare ben poco per far fronte all'instabilità esistente alle basse velocità, con l'uso di ali fisse è possibile, invece, stabilizzare il velivolo alle alte velocità.

Per tutte queste ragioni, il problema del controllo assume maggiore importanza nel volo in hovering o a bassa velocità.

Di seguito, quindi, sarà considerata solo quest'ultima condizione di volo.

Bisogna anche aggiungere che, di norma, **gli elicotteri di piccola taglia, del tipo che si tratta in questo lavoro, vengono proprio progettati per volare a bassa velocità ed in hovering magari in circostanze ostili.**

Definite le condizioni di volo, è possibile passare all'identificazione delle forze e di momenti esterni.

§ 3.2 – Forze e momenti esterni

La figura seguente mostra le forze ed i momenti di maggiore interesse per la modellizzazione:

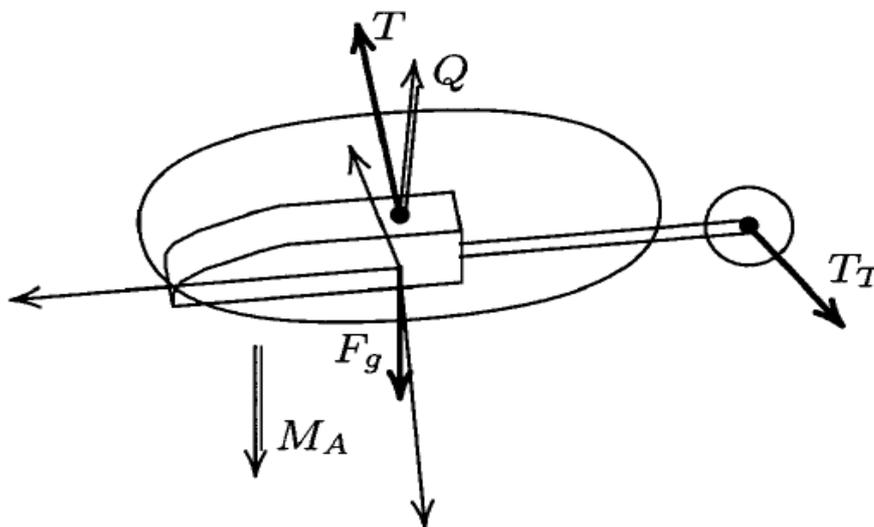


Figura 2: forze principali agenti sull'elicottero.

Le forze più importanti che agiscono sull'elicottero sono:

- La forza peso F_g



- La forza di spinta del rotore principale T
- La forza di spinta del rotore di coda T_T

Le coppie più importanti che agiscono sull'elicottero sono:

- La coppia causata dal mozzo ^{Nota} del rotore principale Q
- La coppia causata dal mozzo rotore di coda Q_T

Per quanto concerne la forza peso F_g si assume che essa agisca sempre in senso verticale; essa può dunque essere rappresentata nella terna solidale al corpo mediante la trasformazione (1) per cui:

$$F_g = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta m_{hc}g \\ \sin\varphi \cos\vartheta m_{hc}g \\ \cos\varphi \cos\vartheta m_{hc}g \end{bmatrix} \quad (21)$$

Per quanto concerne i momenti, essi sono causati anche alla resistenza del profilo delle lame del rotore ed al movimento di flappeggio delle lame.

Inoltre la coppia sviluppata dai rotori M_A è un'altra variabile importante, da essa dipende ad esempio la forza sviluppata dal rotore di coda.

Le forze ed i momenti citati possono essere calcolati solo a valle del chiarimento dei fenomeni che interessano le singole lame ed gli interi sistemi del rotore principale e di coda, per cui si passa all'analisi di tali fenomeni prima di poter procedere con il calcolo.

Per quanto riguarda invece coppia sviluppata dal motore, essa viene calcolata nel paragrafo ove si discute anche il modello del motore elettrico.

§ 4 – *Comportamento delle lame rotoriche*

Le lame del rotore principale di ogni elicottero, di qualsivoglia taglia, si incurvano e si torcono sotto l'effetto di **carichi aerodinamici tempo varianti e non lineari**.

Ad ogni modo, *il meccanismo più importante* che determina il comportamento del rotore è *il flappeggio ciclico delle pale*, il quale *fornisce un controllo indiretto della direzione della spinta del rotore e dei momenti del mozzo del rotore*. Per questa ragione, tale meccanismo è la sorgente primaria della manovrabilità dell'elicottero.

Descriviamo dunque i fenomeni fisici più importanti che interessano i rotori principale e di coda che determinano l'entità dei momenti e delle forze in questione.

In genere **la rigidità delle lame del rotore di un piccolo elicottero è notevolmente superiore a quella degli elicotteri di piccola taglia**. Da questo punto di vista la lama di un elicottero può essere considerata rigida e dotata di due movimenti: *flapping* (sbattimento) e *lagging* (ritardo o "brandeggio").

Nota:

Le forze in gioco "sviluppate dai rotori" sono causate dalla portanza che si sviluppa sulle pale messe in rotazione, le coppie invece sono date dalla rotazione stessa dei "rotori". Per questo viene usata la dizione differente "forze sviluppate dai rotori" per le forze, e la dizione "momenti sviluppati dai mozzi dei rotori" per i momenti.



Figura 3: flapping e lagging

Figura 4: Voight-Sikorsky VS-300 dei primi anni '40 del novecento. Si noti la flessione verso l'alto delle pale (flapping) e la torsione verso sinistra della pala in primo piano nella foto(lagging).



Interessiamoci in prima istanza del movimento di flapping: esso è dovuto alle variazioni dei carichi aerodinamici e può essere descritto attraverso la traiettoria di un punto dell'estremità della pala. Il flapping è descritto (avendo supposto la pala rigida) dall'angolo di flapping β individuato dall'asse della pala ed il piano ortogonale all'asse del mozzo, come chiarisce la figura 5.

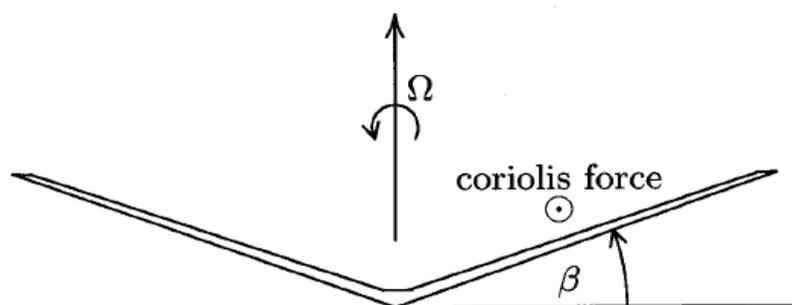


Figura 5: Angolo di flapping e forza di Coriolis che determina il movimento di lagging.

Per quanto concerne il lagging, si deve dire che una lama libera di sbattere è soggetta a notevoli forze di Coriolis dirette ortogonalmente al piano di rappresentazione in Figura 5. La lama tende a essere trascinata dalla forza di Coriolis in verso opposto a quello di rotazione, generando il fenomeno del lagging.

In realtà i rotori a due lame possono essere costruiti in maniera tale da scongiurare il presentarsi di questo effetto, e gli elicotteri di piccola taglia, come quello che sarà considerato nel seguito, sono progettati proprio nel senso anzidetto, dunque tale effetto non sarà considerato.



In realtà esiste anche un altro movimento che interessa le pale durante la rotazione, che è un a torsione della pala stessa attorno ad un asse parallelo all'asse della pala. Ma ancora una volta, per la rigidità delle piccole pale con cui qui si ha a che fare, tale effetto può essere trascurato.

In definitiva, la posizione della lama rotorica viene individuata:

- Dall'angolo di flapping β
- Dall'angolo di azimuth ψ

Quest'ultimo è indicato in figura 5 tramite la sua derivata Ω (velocità del rotore), ed individua la posizione della pala vista dall'alto sul piano di rotazione su cui giace la traiettoria di un suo punto estremo, per β fissato (tale piano in letteratura è indicato come "tip-path plane").

§ 5 – Velocità indotte

§ 5.1 – Rotore principale

Il calcolo della spinta $T(t)$ del rotore principale richiede informazioni circa il carico agente sulle pale causato dal flusso d'aria che scorre attraverso di esse. Ciò richiede la conoscenza della velocità dell'aria che viene indotta dalla portanza delle pale. La "teoria classica del disco attuatore" consente, sotto certe ipotesi, di effettuare conoscere la velocità dell'aria e quindi risalire alla spinta $T(t)$.

Le ipotesi fondamentali su cui poggia tale teoria sono:

- Il rotore è dotato di un numero infinito di pale, sicchè esso può essere riguardato come un disco.
- Il gradiente di pressione è uniformemente distribuito sul disco rotorico onde la velocità dell'aria attraverso il rotore è costante.
- Non vi sono vortici di aria nel flusso. La velocità dell'aria è solo assiale.

Per chiarire le ipotesi fatte si osservi la figura 6, dove il rotore è rappresentato in sezione (linea orizzontale) il flusso d'aria lo attraversa assialmente lungo la direzione della spinta $T(t)$.

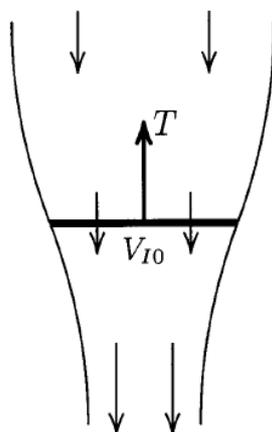


Figura 6: Teoria del disco attuatore (hovering).

Si devono distinguere tre differenti circostanze di volo a bassa velocità:



- 1) Volo a punto fisso (hovering).
- 2) Ascesa.
- 3) Discesa.

✚ 1 - Durante il volo a punto fisso la velocità minima indotta dalla rotazione delle pale del rotore principale nell'aria può essere calcolata dal teorema di Bernoulli per cui, indicandola con V_{I0} essa è espressa da:

$$V_{I0} = \sqrt{\frac{T}{2\rho S_M}} \quad (22)$$

Dove S_M è l'area del disco rotorico mentre ρ è la densità del fluido (aria).

Ma poiché l'elicottero è in hovering la spinta T sarà esattamente pari alla forza peso che agisce su di esso, ossia:

$$T = m_{helitotal} g \quad (23)$$

Dunque si può scrivere:

$$V_{I0} = \sqrt{\frac{m_{helitotal} g}{2\rho S_M}} \quad (24)$$

Quella calcolata è la minima velocità indotta ed è anche detta "velocità di spinta". Piccole variazioni o disturbi nella spinta $T(t)$ inducono variazioni della velocità di spinta; di ciò si deve tener conto per modellare le dinamiche dell'elicottero. A tal fine si utilizza un modello del primo ordine espresso dall'equazione:

$$\dot{V}_I = \frac{1}{T_{V_I}} (-V_I(t) + V_{I0} \sqrt{\frac{T(t)}{m_{helitotal} g}}) \quad (25)$$

Dove con V_I si indica la velocità indotta a seguito di variazioni della spinta rispetto al valore di equilibrio espresso in (23), e \dot{V}_I rappresenta la variazione della stessa.

✚ 2 - Per l'ascesa l'equazione (25) è quella di base che consente di descrivere le dinamiche che intervengono in tale situazione. La velocità indotta sarà però aumentata dalla velocità verticale. E' possibile esprimere la velocità indotta durante la salita con un modello del primo ordine del tipo:

$$\dot{V}_{Iv} = \frac{w(t)}{2} + \sqrt{\frac{w(t)^2}{2} + V_I^2(t)} \quad (26)$$

Come già indicato nel paragrafo 2.2 $w(t)$ è la velocità lineare dell'elicottero lungo la verticale.

✚ 3 - Durante la discesa, se questa avviene a velocità sostenuta, si può verificare il cosiddetto "stato di anello di vortice" (*vortex ring state*). Nel caso estremo in cui la velocità di discesa $w(t)$ è uguale alla velocità indotta V_I accade che non vi è alcuna massa di fluido che attraversa il rotore allora (come è chiaro dalla relazione (22) e successive) non può essere sviluppata alcuna spinta:

$$w(t) = V_I \Rightarrow T(t) = 0 \quad (27)$$

I piloti di elicottero tentano sempre di evitare tale condizione che è enormemente pericolosa. Infatti in questa situazione una variazione dell'angolo di attacco delle pale, non può sviluppare comunque alcuna

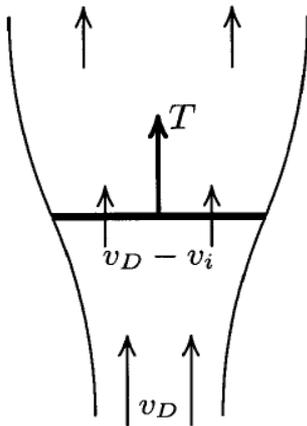


portanza, e quindi peggiora soltanto la situazione. L'unica salvezza (se la quota lo consente) in questo caso è quella, per l'elicottero ed il suo pilota, di entrare in "auto rotazione".

Quando la velocità del flusso ascendente è superiore alla velocità indotta, l'aria è costretta a rallentare passando attraverso il rotore, tale condizione è detta "stato di mulino indotto". Utilizzando il teorema di Bernoulli, questo caso può essere caratterizzato dall'equazione (28):

$$V_{IWB} = \frac{v_D}{2} - \sqrt{\frac{v_D^2}{2} + V_I^2(t)} \quad (28)$$

Nella (26) il termine v_D rappresenta la velocità dell'aria rispetto all'elicottero prima di arrivare in prossimità del rotore (ove rallenta) si osservi la figura 7.



Questo stato è anche detto di "auto rotazione ideale" e può essere descritto dalla velocità indotta. Solitamente, l'autorotazione è definita come quello stato specifico del rotore che si ha nel caso di rottura del motore. I piloti sfruttano l'energia cinetica rimanente del sistema rotorico per far atterrare l'elicottero. Il flusso di aria che attraversa il rotore durante la discesa dell'elicottero può fornire energia cinetica addizionale al sistema rotorico. In questo caso la velocità indotta è caratterizzata dal flusso d'aria in ingresso.

Figura 7: teoria del disco attuatore durante la discesa. La velocità dell'aria diminuisce in prossimità del rotore.

§ 5.2 – Rotore di coda

Per conoscere la spinta $T_T(t)$ del rotore di coda è necessario affrontare il problema del calcolo della velocità dell'aria indotta in esso, il che può essere fatto ricorrendo sempre alla teoria del disco attuatore vista per il rotore principale con le opportune differenze. Queste stanno in prima istanza nel fatto che il rotore di coda è disposto verticalmente a differenza del rotore principale che, come si è visto, è disposto orizzontalmente.

La velocità di imbardata r e la velocità laterale dell'elicottero v sono entrambe influenzate dalla velocità dell'aria indotta nel rotore di coda.

Senza scendere nel dettaglio, l'espressione della velocità indotta nel rotore di coda è riportata in [1]. Essa può essere anch'essa modellata da un'equazione del primo ordine:

$$\dot{V}_{ITR}(t) = \frac{1}{T_{VTI}} (-V_{TI}(t) + V_{TI0} \frac{T_T(t)}{T_{T_0}(t)}) \quad (29)$$

ove $T_{T_0}(t)$ è la forza laterale sviluppata dal rotore di coda necessaria a compensare il momento torcente causato dal motore in hovering. Tale valore si può calcolare con metodi numerici iterativi.



§ 5.3 – Costanti di tempo per le velocità indotte

Le costanti di tempo T_{V_I} e $T_{V_{T_I}}$ che compaiono nelle equazione (25) e (29) che determinano l'andamento delle velocità indotte, rispettivamente, nel rotore principale ed in quello di coda hanno valori che debbono essere identificati opportunamente. Esse (seguendo sempre quanto riportato in [1]) assumono valori tra 0.1 s e 0.15 s.

Per il calcolo della portanza T , è necessario conoscere la velocità di ogni punto della pala. Assumendo, ad esempio, che la velocità indotta sia distribuita in maniera lineare lungo la pala con il massimo corrispondente al punto estremo della pala, la velocità dei punti della pala sarà espressa da una legge del tipo (riportata in [1]):

$$v_I = r_l \frac{3V_{Iv}(R_m^2 - r_m^2)}{2(R_m^3 - r_m^3)} \quad (30)$$

§ 6 – Calcolo delle forze e dei momenti

La componente principale della forza sviluppata dal rotore principale lungo la direzione ortogonale al piano individuato dalla traiettoria di un punto estremo della pala (tip-path plane) è normalmente detta "spinta" T .

La componente perpendicolare a T che punta all'indietro è detta forza H . La terza componente, che punta lateralmente, è indicata come forza Y .

Queste ultime due componenti, Y ed H , non si presentano in situazioni di volo a punto fisso, mentre nel volo in avanzamento hanno un effetto stabilizzante. Pertanto le componenti Y ed H possono essere trascurate in questa sede, pur tuttavia il calcolo di H resta fondamentale per determinare il momento torcente Q sviluppato dal mozzo del rotore principale.

Per il calcolo della spinta T si deve calcolare la portanza di un elementino di pala dL . L'angolo **di incidenza della pala** (vedi figura 8) **sarà indicato con θ** e può essere espresso come una funzione dell'angolo di azimuth ψ che individua la posizione della pala:

$$\theta(\psi) = \theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi \quad (31)$$

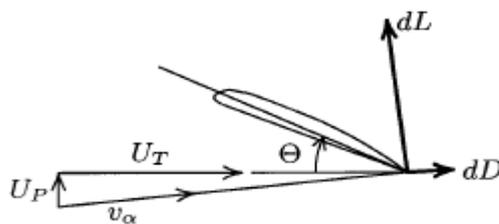


Figura 8: Angolo di beccheggio di una pala, portanza e trascinamento

L'angolo θ si ottiene come somma di un **beccheggio collettivo** delle pale (θ_0 indicato anche con A_M) e due termini di variazione ciclica del beccheggio (A_1 e B_1). Questi termini vengono controllati dalla presenza di un "piatto oscillante" fondamentale per evitare il fenomeno del ribaltamento (rollio) dell'elicottero che merita, per la sua descrizione, un apposito paragrafo.



Poiché la variazione di flusso d'aria lungo l'asse della lama è abbastanza piccola, la spinta elementare dT è approssimativamente uguale alla portanza finita dL agente sopra un clementino di lama di lunghezza l a distanza r_l dal centro del rotore, dunque:

$$dT = \frac{1}{2} c_{\alpha\alpha} \rho U_T^2 \left(\theta(\psi) + \frac{U_p}{U_T} \right) l dr \quad (32)$$

Il coefficiente $c_{\alpha\alpha}$ rappresenta la pendenza della pala e si suppone costante lungo di essa (pala rigida). U_T è la componente orizzontale della velocità (vedi figura 8) del flusso d'aria ed è determinata dalla velocità di rotazione del rotore e dalla velocità dell'elicottero:

$$U_T = \Omega r_l - u \sin\psi - v \cos\psi \quad (33)$$

U_p invece è la componente verticale della velocità dell'aria alla pala. Essa è legata alla velocità indotta ed all'angolo di flappeggio. I movimenti di rollio e di beccheggio dell'elicottero possono essere trascurati perché si assume che essi siano molto piccoli in hovering: $p = q \cong 0$. Dunque, seguendo sempre quanto esposto in [1], risulta:

$$U_p = -r_l \dot{\beta} - v_l + u \beta \cos\psi - v \beta \sin\psi + w \quad (34)$$

Ora per ottenere la spinta complessiva agente sul rotore è necessario integrare la (32) lungo la pala di lunghezza $(R_M - r_M)$ per un angolo $\psi = 2\pi$ (giro completo della lama), e moltiplicare per 2 (rotore a 2 pale):

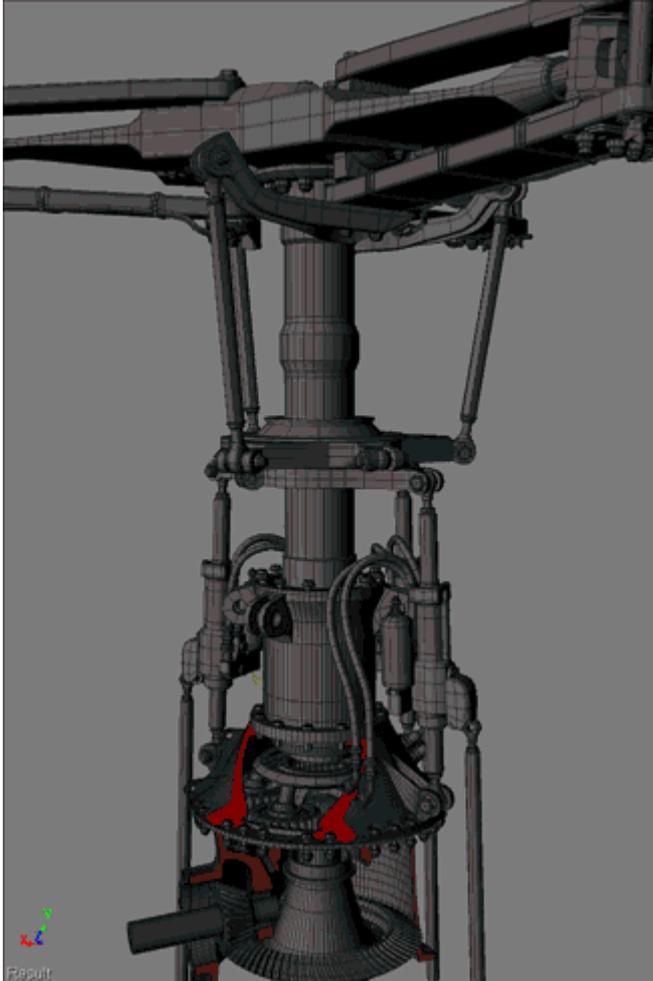
$$T(t) = 2 \int_0^{2\pi} \int_{r_M}^{R_M} \frac{1}{2} c_{\alpha\alpha} \rho U_T^2 \left(\theta(\psi) + \frac{U_p}{U_T} \right) l dr d\psi \quad (35)$$

Il calcolo della forza di trascinamento H , della cui importanza si è accennato all'inizio, può essere fatto in maniera abbastanza simile integrando la forza di trascinamento su di un elemento dD sull'intero disco rotorico. Il momento torcente Q può essere dedotto dalle forze T ed H . Per la sua espressione analitica (molto laboriosa) si rimanda all'appendice B in [1].



§ 7 – Il piatto oscillante

Il piatto oscillante introduce 3 comandi per il rotore principale più 1 per il rotore di coda. La comprensione del suo funzionamento è di cardinale importanza per comprendere la meccanica dell'attuatore che permette il controllo dell'aeromobile.



Il piatto oscillante è composto da una parte fissa ed una rotante. Esso è montato attorno all'albero del rotore e può compiere due movimenti:

1 - può essere inclinato (mediante attuatori lineari idraulici) rispetto all'albero del rotore: l'inclinazione del piatto (filtrata dalla barra stabilizzatrice di cui si dirà in seguito) incide direttamente sul **beccheggio ciclico delle pale**.

2-può traslare verticalmente lungo l'asse del rotore: la traslazione del piatto modifica l'angolo di **beccheggio collettivo delle pale**.

Questi comandi (che vengono espressi nel modello mediante 3 angoli, 2 per descrivere l'inclinazione del piatto ed uno per descriverne l'innalzamento o l'abbassamento) permettono di comandare l'elicottero infatti:

1-La modifica del beccheggio ciclico delle pale ("**comando ciclico**") provoca, come si vedrà

Figura 9: meccanismo per il comando del rotore principale

nel prossimo paragrafo, la variazione dell'inclinazione del tip-path plane . In altre parole, variando il passo ciclico delle pale, varia la distribuzione della spinta fornita dal rotore principale, e quindi l'elicottero può avanzare, retrocedere e volare di lato in conseguenza della distribuzione non solo verticale della spinta.

2-La modifica del beccheggio collettivo delle pale ("**comando collettivo**") fa variare la portanza sviluppata dalle pale e quindi consente all'elicottero di traslare verticalmente.

E' chiaro che per il rotore di coda è strettamente necessario disporre solo di un comando collettivo che, facendo variare la spinta sviluppata da tale rotore, consente di controllare l'angolo di imbardata (e sue derivate) dell'elicottero.



In questa maniera, aggiungendo anche la tensione in ingresso al motore, si sono descritti tutti e 5 gli ingressi di controllo del velivolo, che saranno comunque riassunti nuovamente in sede di definizione del modello matematico.

Per concludere, la figura 10 mostra 3 diverse significative configurazioni per un piatto oscillante.

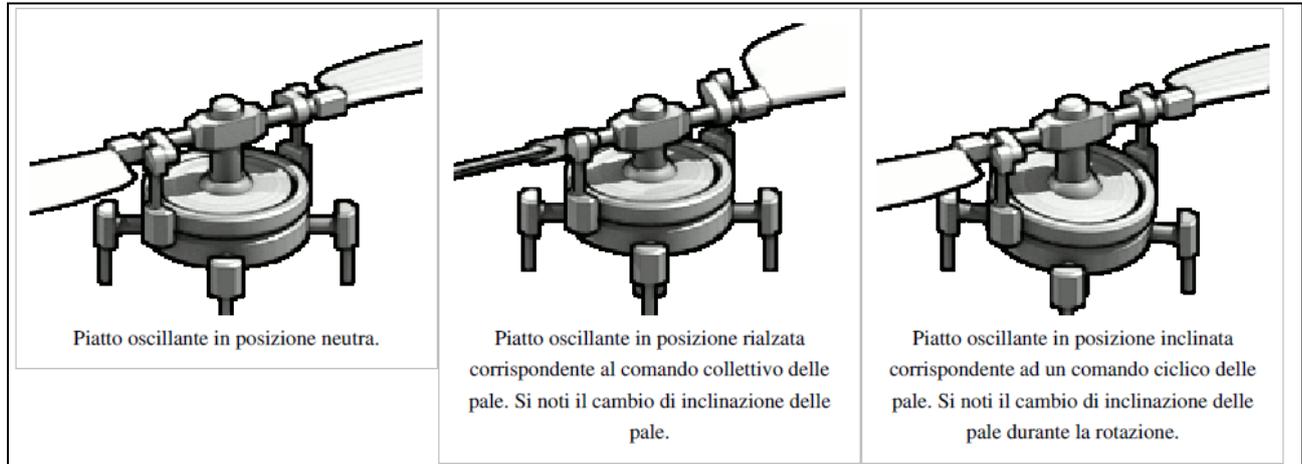


Figura 10: variazione del beccheggio delle pale con la rotazione del piatto oscillante.

§ 8 – Calcolo dei movimenti delle lame

§ 8.1 – Movimenti di flappeggio

Il meccanismo di flappeggio della pala fornisce un controllo indiretto della direzione della spinta rotorica come si può intuire osservando la formula (34) ove compare l'angolo di flappeggio β .

Pertanto il flappeggio è la fonte primaria di manovrabilità dell'elicottero. Il flappeggio della pala è in parte sotto il controllo del pilota e dipende fortemente dal flusso d'aria localmente in entrata.

La descrizione matematica del flappeggio della pala può essere derivata dal momento angolare agente sulla lama rotorica, uguale al momento aerodinamico del rotore principale.

$$M_T = \int_{r_r}^{R_r} r dT \quad (36)$$

Quest'ultima deduzione è presente nella letteratura dedicata all'argomento in maniera molto ampia, come segnalato in [1]. Per trovare una relazione utile l'equazione del moto di flappeggio deve essere scritta in un sistema di riferimento solidale al rotore $\psi = \Omega t$. In letteratura l'equazione di flappeggio è un'equazione differenziale del secondo ordine del tipo:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \psi^2} + \frac{\gamma}{8} \frac{\partial \beta}{\partial \psi} + \beta = 2(\hat{p} \cos \psi - \hat{q} \sin \psi) + \frac{\gamma}{8} (\theta(\psi) + \hat{q} \cos \psi + \hat{p} \sin \psi) \quad (37)$$



Trascurando le componenti della velocità dell'elicottero. La costante γ che compare nell'equazione testè scritta è detta "numero di inerzia di Lock": esso rappresenta il rapporto tra l'inerzia e le forze aerodinamiche. I valori \hat{p} e \hat{q} rappresentano il rapporto tra le componenti della velocità angolare e la velocità di rotazione del rotore Ω :

$$\hat{p} = \frac{p}{\Omega} \quad \hat{q} = \frac{q}{\Omega} \quad (38)$$

Il numero di Lock si può calcolare (come riportato in [1]) mediante la relazione:

$$\gamma = \frac{\rho c_{\alpha\alpha} l_{leave} R^4}{I_{leave}} \quad (39)$$

Assumendo un valore tipico per γ pari a 6 per un elicottero di taglia normale, risulta $\frac{\gamma}{8} = 0.75$. Risolvendo l'equazione (37) si dimostra che la costante di tempo in termini di azimuth è pari a circa un quarto di giro. Ciò significa che una qualsiasi forza che interessa la lama del rotore per una certa posizione angolare della stessa in termini di azimuth, provoca una deflessione della lama ben 90° più tardi. Pertanto si può affermare che il moto di flapping è pesantemente smorzato.

In condizioni di voli costanti, l'angolo di flapping β può essere espresso in funzione della velocità di rotazione del rotore come somma infinita di armoniche (serie di Fourier):

$$\beta = a_0 - a_1 \cos(\Omega t) - b_1 \sin(\Omega t) - a_2 \cos(2\Omega t) - \dots \quad (40)$$

In quanto per soddisfare l'equazione (37) il moto di flapping deve essere di tipo periodico.

Da questo punto di vista, il termine a_0 rappresenta l'angolo di conicità ed a_1 e b_1 rappresentano il flapping longitudinale e laterale. In accordo con quanto riportato nella letteratura le armoniche superiori alla prima sono relativamente piccole, onde esse hanno un effetto trascurabile sulla spinta rotorica e sul momento.

Sostituendo l'espressione in serie di β arrestata al primo ordine nell'equazione (37) l'equazione differenziale è nelle variabili a_0 , a_1 e b_1 . In accordo con quanto riportato in [1], la risposta del flapping del rotore può essere ben approssimata da un sistema del primo ordine, e le accelerazioni \ddot{a} e \ddot{b} possono essere trascurate. Facendo alcuni passaggi matematici e trasformando il sistema di riferimento rotante dell'equazione (37) in uno non rotante mediante la relazione $\psi = \Omega t$, le equazioni di flapping si scrivono come segue:

$$\begin{cases} \tau_m \dot{a}_1 = -a_1 - \frac{b_1}{\Omega \tau_m} + \frac{A_1}{\Omega \tau_m} - B_1 - \tau_m q \\ \tau_m \dot{b}_1 = -b_1 + \frac{a_1}{\Omega \tau_m} + \frac{B_1}{\Omega \tau_m} + A_1 - \tau_m p \end{cases} \quad (41)$$

Dove è definita come la "costante di tempo del rotore vibrante":

$$\tau_m = \frac{16}{\gamma \Omega} \quad (42)$$

Le formule (41) descrivono un legame tra il beccheggio delle pale ed il flapping delle stesse. Quest'ultimo, infatti, è rappresentato nelle (41) dall'ampiezza delle componenti armoniche a_1 e b_1 , ed anche il beccheggio è presente nelle stesse formole mediante i coefficienti armonici A_1 e B_1 (si ricordi la relazione (30): $\theta(\psi) = \theta_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi$).



Tuttavia le (41) **non saranno inserite nel modello matematico** perché per un elicottero di piccole dimensioni, un valore della costante τ_m pari a 0.03s è raggiunto ad una velocità costante del rotore pari a circa 1500rpm (ossia circa 157 rad/s) ma le dinamiche della pala possono essere smorzate dal servo motore (la già citata barra stabilizzatrice Bell-Hiller). Quindi, le equazioni per il flappeggio del rotore principale (41) saranno omesse, e si riterranno invece valide le relazioni semplicemente algebriche seguenti:

$$a_0 = \frac{\gamma\theta_0}{8} \quad a_1 = -B_1 + \frac{p}{\Omega} - \tau_m q \quad b_1 = A_1 + \frac{q}{\Omega} - \tau_m p \quad (43)$$

Il termine $\frac{\gamma}{8}$ moltiplicato per l'angolo di beccheggio collettivo delle pale θ_0 rappresenta l'angolo di flappeggio costante a_0 . La pala descrive durante il suo moto la superficie laterale di un cono, e questa è la ragione per cui l'angolo costante a_0 è detto "angolo di conicità" (vedi Figura 11). La punta della pala individua la base del cono che viene detta "piano della traiettoria della punta" (della pala) [tip-path plane].

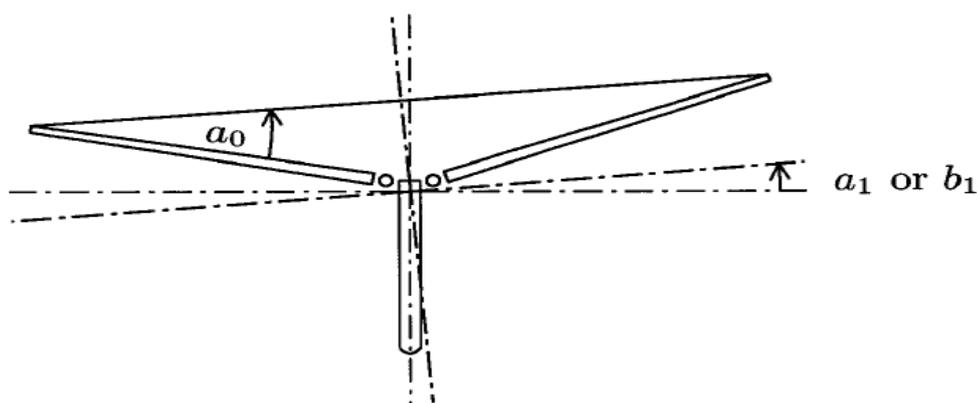


Figura 11: angoli di flapping e tip-path plane

Il flappeggio della lama causa un momento sull'elicottero, il quale è proporzionale all'angolo di flappeggio nelle coordinate del sistema di riferimento solidale all'elicottero x^b ed y^b , moltiplicate per un offset l_{of} costituito dalla cerniera di flappeggio e un coefficiente di rigidità dell'attacco della cerniera k_o :

$$M_x(b_1) = k_o \frac{l_{of}}{4} b_1 \quad (44)$$

$$M_y(a_1) = k_o \frac{l_{of}}{4} a_1 \quad (45)$$

§ 8.2 – Legami tra il piatto oscillante la barra stabilizzatrice ed il beccheggio

A causa dell'alta velocità del rotore, gli elicotteri di piccola taglia posseggono delle dinamiche in un range di frequenze più alto rispetto a quello degli elicotteri normali. Per aiutarli a volare, è strettamente necessario utilizzare una barra stabilizzatrice Bell Hiller (vedi Figura 12), che viene posizionata sull'albero del rotore principale.

La barra stabilizzatrice è costituita da due aste ("paddles") che, in sostanza, fa da tramite tra il piatto oscillante ed le pale, consentendo di variare il passo ciclico di queste ultime in maniera più "morbida".

Una barra stabilizzatrice reale è riportata in figura 12.

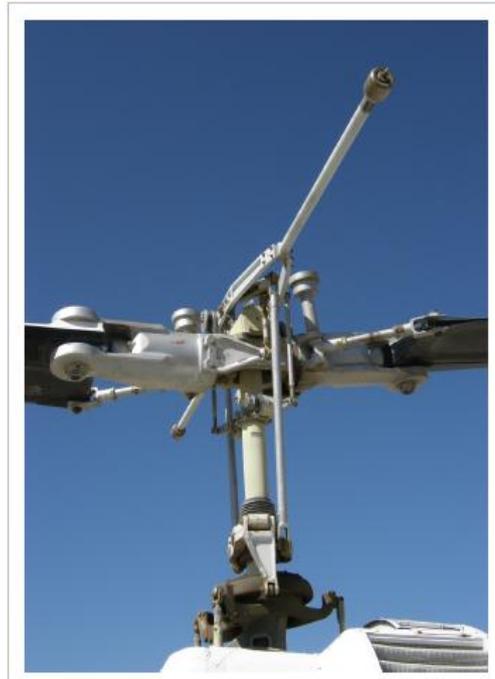


Figura 12: barra stabilizzatrice Bell Hiller in un elicottero "Bell 204".

L'interpretazione fisica del comportamento della barra è quella di aumentare lo smorzamento delle dinamiche che determinano l'assetto dell'elicottero. Inoltre, l'aggiunta della barra modifica il modo in cui l'elicottero risponde ai comandi del pilota e ai disturbi atmosferici.

La barra stabilizzatrice può essere interpretata come un secondo rotore con due semplici aste. Tali aste sono fissate all'albero del rotore senza alcuna cerniera. Come il rotore principale, la barra stabilizzatrice è collegata al piatto oscillante. Il piatto oscillante, come è stato già accennato, è costituito da un piatto che non ruota assieme all'albero ma può essere inclinato in qualsiasi direzione da servo motori. Chiaramente, se il piatto oscillante risulta inclinato, l'asta della barra rimane parallela ad esso. Poiché le pale ruotano con l'albero, il collegamento ciclico ha luogo nella direzione del piatto inclinato.

Per come è costituito il movimento ciclico delle aste, il rotore *ausiliario* (ossia la barra stabilizzatrice) effettua un movimento di flapping. Questo movimento di flappeggio a sua volta induce una variazione ciclica dell'assetto delle pale del rotore: *si trasforma cioè in una variazione dell'angolo di beccheggio delle pale del rotore*. In definitiva il rotore principale riceve l'angolo di beccheggio (coppia (A_1, B_1)) dal piatto oscillante (comandi A_{1s}, B_{1s}) attraverso le aste (coppia (a_{1p}, b_{1p})). La relazione che lega queste grandezze la si può ritenere del tipo:

$$A_1 = k_{p2r}b_{1p} + k_{s2r}A_{1s}$$

(46)

$$B_1 = k_{p2r}a_{1p} + k_{s2r}B_{1s}$$

Dal punto di vista delle leve che si trovano nel meccanismo di testa del rotore, *la barra stabilizzatrice (osservando le relazioni (46)) può essere vista come un amplificatore meccanico del comando inviato al piatto oscillante*. La trasformazione angolare (46) è in realtà alquanto semplificativa, infatti i guadagni k_{p2r} , k_{s2r} ed anche k_{s2p} (guadagno dal piatto oscillante (pedice s) alle (pedice 2) aste (pedice p)) dipendono dall'angolo di beccheggio collettivo A_M (detto anche Θ_0 in precedenza).

Inoltre la relazione (46) nella realtà è di tipo non lineare con le leve di trasmissioni che mostrano un certo "tempo morto". Ad ogni donde, le misure effettuate sperimentalmente mostrano che i guadagni in questione



hanno all'incirca lo stesso valore. La trasformazione angolare (46) può essere impiegata anche per descrivere altre strutture meccaniche che si trovano nella "testa" del rotore.

Per quanto riguarda le dinamiche dell'angolo di flappeggio della barra stabilizzatrice, che compaiono nella relazione (46), possono essere calcolate con la stessa relazione usata per descrivere la variazione dell'angolo di beccheggio delle pale del rotore principale (formole (41)):

$$\tau_p \dot{a}_{1p}(t) = -a_{1p}(t) + k_{s2p} B_{1s}(t) + \frac{p(t)}{\Omega_M} - \tau_p q(t) \quad (47)$$

$$\tau_p \dot{b}_{1p}(t) = -b_{1p}(t) + k_{s2p} A_{1s}(t) + \frac{q(t)}{\Omega_M} - \tau_p p(t)$$

Con la costante di tempo τ_p relativa alla aste della barra stabilizzatrice definita similmente al caso delle pale del rotore principale come:

$$\tau_p = \frac{16}{\gamma_p \Omega_M} \quad (48)$$

Sperimentalmente per questa costante è stato trovato un valore pari a circa 0.09 s. Le dinamiche del servo rotore sono quindi importanti nel modello matematico a causa del fatto che si trovano a bassa frequenza.

§ 8 – Motore elettrico

Di norma i motori di un elicottero possono essere a combustione oppure elettrici. Rispetto ai motori a combustione i motori elettrici hanno il vantaggio di generare vibrazioni di entità inferiore. Comunque, gli elicotteri che volano con un motore elettrico (a volo libero) sono soggetti a problemi di peso a causa del numero elevato di celle elettrolitiche necessarie per poter effettuare un volo di lunga durata. Per lo più, quindi, i motori elettrici sono dimensionati in maniera da ottimizzare la potenza massima fornita ed il peso. Le dinamiche del motore sono abbastanza importanti e devono essere prese in considerazione, poiché il modello non lineare in questo lavoro richiede la coppia sviluppata dal motore e la velocità del rotore dello stesso.

Un motore elettrico può essere modellato come un sistema del secondo ordine:

$$\dot{M}_A = -\frac{1}{\tau_a} M_A + \frac{1}{k_a \tau_a k_{u_{mot}}} \Omega + \frac{1}{k_a \tau_a} u_{mot} \quad (49)$$

$$\dot{\Omega} = k_{\Omega} (M_A - k_L M_{Load}) \quad (50)$$

Trasformando secondo Laplace queste due equazioni si perviene al modello nel dominio della variabile complessa s:

$$M_A(s) = \frac{1}{k_a} \frac{1}{1 + \tau_a s} \left(\frac{\Omega(s)}{k_{u_{mot}}} + u_{mot}(s) \right)$$

$$\Omega(s) = \frac{k_{\Omega}}{s} (M_A(s) - k_L M_{Load}(s))$$

Che si può schematizzare come un sistema retroazionato, come in figura 13.

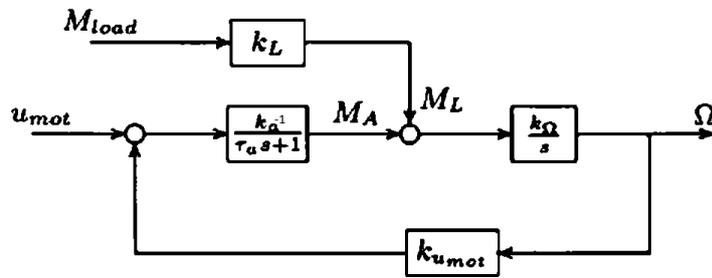


Figura 13: schema del motore elettrico

Per quanto concerne le costanti che compaiono nel modello:

- ✚ La costante di tempo $\tau_a = \frac{L_a}{R_a}$ è data dal rapporto tra l'induttanza e la resistenza di armatura.
- ✚ La costante k_a è data dal rapporto tra la costante k_M che lega la corrente di armatura alla coppia sviluppata all'asse del motore, e la resistenza di armatura: $k_a = \frac{k_M}{R_a}$.
- ✚ Il coefficiente k_L (che può essere posto pari ad 1), significa di un guadagno con il quale la coppia resistente agisce all'asse del motore.
- ✚ La costante k_Ω è pari all'inverso del momento di inerzia di massa del rotore rispetto all'asse di rotazione dello stesso.
- ✚ La costante k_{umot} è la costante elettrica che lega la forza contro elettromotrice alla velocità di rotazione del rotore secondo la relazione: $E = k_{umot}\Omega$.



Capitololl – Il Modello Matematico non lineare

§ 1 – Equazioni del modello matematico

Le cinquanta equazioni scritte finora rappresentano tutte le forze, i momenti e le relazioni necessarie per ottenere il modello non lineare del sistema. La parte principale del modello è costituita dalle equazioni della dinamica del corpo rigido per le forze e per i momenti. Le forze esterne agenti sul sistema sono quella di gravità e quelle di guida esercitate dai rotor, scrivendole per componenti, si ha:

$$F_x(t) = F_{gx}(t) - T(t) \sin(a_1)$$

$$F_y(t) = F_{gy}(t) - T(t) \sin(b_1) + T_T(t)$$

$$F_z(t) = F_{gz}(t) - T(t) \cos(a_1) \cos(b_1)$$

Le quali chiariscono finalmente il primo membro delle equazioni (15), che si possono dunque riscrivere come:

$$F_{gx}(t) - T(t) \sin(a_1) = m_H(\dot{u} - r v + q w)$$

$$F_{gy}(t) - T(t) \sin(b_1) + T_T(t) = m_H(\dot{v} - p w + r u) \quad (51)$$

$$F_{gz}(t) - T(t) \cos(a_1) \cos(b_1) = m_H(\dot{w} - q u + p v)$$

La forza di spinta $T(t)$ si può calcolare conoscendo la velocità indotta V_1 . Mentre per conoscere le componenti della stessa nel riferimento solidale al corpo rigido, si deve disporre degli angoli a_1 e b_1 che si calcolano mediante le equazioni (43),(46) e (47) risolvendole nell'ordine inverso rispetto a quello esposto a partire dalla conoscenza dell'angolo di flappeggio delle aste dato dall'angolo di inclinazione delle aste della barra stabilizzatrice a_{1p} ed b_{1p} .

I momenti dei carichi sul rotore principale e su quello si coda sono gli ingressi per il motore. Essi sono dati da:

$$M_T(t) = Q_T - \eta_T I_T \dot{\Omega}(t) \quad (52)$$

$$M_{load}(t) = \frac{1}{\eta_M} Q - \frac{1}{\eta_T} Q_T \quad (53)$$

Il momento di guida è calcolato mediante le equazioni del motore:

$$M_{drive y}(t) = M_T \quad (54)$$

$$M_{drive z}(t) = \eta_M M_{motor}(t) \quad (55)$$

I momenti risultanti per componenti nelle varie direzioni si possono calcolare come segue:

$$L(t) = M_x - z m T(t) \sin(b_1) - z t T_T(t)$$

$$M(t) = M_y - M_{drive y}(t) - z m T(t) \sin(a_1) + x m T(t) \cos(a_1) \cos(b_1) \quad (56)$$



$$N(t) = M_{drive\ z}(t) - xmT(t) \sin(b_1) + xtT_T(t)$$

In questo modo è finalmente possibile specificare il primo membro delle equazioni (20):

$$M_x - zmT(t) \sin(b_1) - ztT_T(t) = I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - J_{xz}(pq + \dot{r})$$

$$M_y - M_{drive\ y}(t) - zmT(t) \sin(a_1) + xmT(t) \cos(a_1) \cos(b_1) = I_y \dot{q} - (I_z - I_x)pr - J_{xz}(p^2 - r^2) \quad (57)$$

$$M_{drive\ z}(t) - xmT(t) \sin(b_1) + xtT_T(t) = I_z \dot{r} - (I_x - I_y)qp - J_{xz}(\dot{p} - rq)$$

Avendo specificato tutti i termini, di seguito si scrivono tutte le equazioni differenziali del primo ordine che costituiscono il modello matematico non lineare del sistema.

$$1) F_{gx}(t) - T(t) \sin(a_1) = m_{Hh}(\dot{u} - rv + qw)$$

$$2) F_{gy}(t) - T(t) \sin(b_1) + T_T(t) = m_{Hh}(\dot{v} - pw + ru)$$

$$3) F_{gz}(t) - T(t) \cos(a_1) \cos(b_1) = m_{Hv}(\dot{w} - qu + pv)$$

$$4) M_x - zmT(t) \sin(b_1) - ztT_T(t) = I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr - J_{xz}(pq + \dot{r})$$

$$5) M_y - M_{drive\ y}(t) - zmT(t) \sin(a_1) + xmT(t) \cos(a_1) \cos(b_1) = I_y \dot{q} - (I_z - I_x)pr - J_{xz}(p^2 - r^2)$$

$$6) M_{drive\ z}(t) - xmT(t) \sin(b_1) + xtT_T(t) = I_z \dot{r} - (I_x - I_y)qp - J_{xz}(\dot{p} - rq)$$

$$7) \dot{M}_A = -\frac{1}{\tau_a} M_A + \frac{1}{k_a \tau_a k_{u_{mot}}} \Omega + \frac{1}{k_a \tau_a} u_{mot}$$

$$8) \dot{\Omega} = k_{\Omega}(M_A - k_L M_{Load})$$

$$9) \dot{V}_I = \frac{1}{T_{VI}} (-V_I(t) + V_{I0} \sqrt{\frac{T(t)}{m_{helitotal} g}})$$

$$10) \dot{V}_{ITR}(t) = \frac{1}{T_{VTI}} (-V_{TI}(t) + \sqrt{V_{TI0} \frac{T_T(t)}{T_{T0}(t)}})$$

$$11) \tau_p \dot{a}_{1p}(t) = -a_{1p}(t) + k_{s2p} B_{1s}(t) + \frac{p(t)}{\Omega_M} - \tau_p q(t)$$

$$12) \tau_p \dot{b}_{1p}(t) = -b_{1p}(t) + k_{s2p} A_{1s}(t) + \frac{q(t)}{\Omega_M} - \tau_p p(t)$$

§ 2 – Formulazione nello spazio di stato

Per formulare il modello matematico non lineare del piccolo elicottero nello spazio di stato, è necessario innanzitutto definire il vettore degli stati e degli ingressi, e, per completezza, anche il vettore delle uscite.

Il vettore di stato contiene le variabili necessarie a calcolare l'evoluzione dello stato stesso (termini che compaiono come derivate nelle equazioni del modello) e dell'uscita. In questo caso il vettore di stato si compone:

- ✚ delle posizioni (angolari e lineari) e delle velocità (angolari e lineari) che sono necessarie per scrivere come un sistema a stato vettore le equazioni cardinali della dinamica per l'elicottero;



- ✚ degli angoli a_{1p} e b_{1p} che descrivono lo stato della barra stabilizzatrice Bell Hiller (equazioni (47));
- ✚ della velocità del motore e della coppia da esso sviluppata (necessarie a descrivere lo stato del motore elettrico);
- ✚ delle velocità indotte nel rotore principale ed in quello di coda V_I e V_{IT} (equazioni differenziali (25) e (29));

Il vettore degli ingressi, come già spiegato nel paragrafo 7 del capitolo 1, sono le grandezze che governano il piatto oscillante del rotore principale, la grandezza che regola la spinta del rotore di coda e la tensione in ingresso al motore elettrico:

- ✚ B_{1s} ed A_{1s} sono i comandi ciclici del piatto oscillante del rotore principale;
- ✚ A_M ed A_T sono i comandi di collettivo del rotore principale e di quello di coda;
- ✚ u_{mot} è la tensione in ingresso al motore elettrico.

Il vettore di uscita, in generale, sono nient'altro che le grandezze che si intende misurare. Tuttavia, essendo, in genere, gli elicotteri di piccola taglia dotati di un GPS e di un'unità IMU si può pensare di avere in uscita posizioni (lineari e angolari) e velocità (lineari e angolari) ed in più la velocità del motore elettrico, che potrebbe essere misurata con un apposito sensore, per esempio un resolver.

In sintesi i vettori che descrivono il sistema sono:

$$\mathbf{x} = (x^e \quad y^e \quad z^e \quad \psi \quad \theta \quad \varphi \quad u \quad v \quad q \quad p \quad a_{1p} \quad b_{1p} \quad w \quad r \quad \Omega \quad M_a \quad V_I \quad V_{IT})^T$$

$$\mathbf{u} = (B_{1s} \quad A_{1s} \quad A_M \quad A_T \quad u_{mot})^T$$

$$\mathbf{y} = (x^e \quad y^e \quad z^e \quad \psi \quad \theta \quad \varphi \quad u \quad v \quad q \quad p \quad w \quad r \quad \Omega)^T$$

Definito il vettore di stato, degli ingressi e delle uscite le formule che descrivono il modello non lineare possono essere portate nella forma normale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Però si deve notare che le equazioni scritte in precedenza sono in una forma sintetica molto compatta, dalle quali non si visualizzano direttamente gli stati, in special modo al primo membro delle equazioni cardinali dove si sono scritte sinteticamente le forze $F(t)$ ed i momenti, che non sono esplicitati nella loro dipendenza dalle variabili di stato e dagli ingressi.

Per la complessità del modello matematico non è infatti possibile scrivere in maniera elegante e facilmente visualizzabile tale dipendenza. Per dare prova di ciò, si osservi, come accennato, l'espressione del momento sviluppato dal mozzo del rotore principale riportata nell'appendice B in [1]:



$$\begin{aligned}
 Q(t) = & -\frac{\rho}{2} l_{leave} c_{\alpha\alpha} \Omega_M^2 \left(\frac{R_M^4 - r_M^4}{2} \left(-A_M(t) - \frac{\Delta v_i}{\Omega_M} \right) \frac{\Delta v_i}{\Omega_M} \right. \\
 & + \left. \frac{2(R_M^3 - r_M^3)}{3\Omega_M} \left(A_M(t) - \frac{2\Delta v_i}{\Omega_M} \right) w(t) - \frac{(R_M^2 - r_M^2)w^2(t)}{\Omega_M^2} \right) \\
 & + \frac{\rho}{2} l_{leave} \Omega_M^2 \left(\frac{R_M^4 - r_M^4}{2} \left(c_{w0} - c_{w1} \left(A_M(t) + \frac{\Delta v_i}{\Omega_M} \right) \right. \right. \\
 & + \left. \left. c_{w2} \left(A_M(t) + \frac{\Delta v_i}{\Omega_M} \right)^2 \right) + \frac{w(t)(R_M^3 - r_M^3)}{3\Omega_M} (2c_{w1} \right. \\
 & \left. \left. - 4 \frac{c_{w2}}{\Omega_M} \left(A_M(t) + \frac{\Delta v_i}{\Omega_M} \right) \right) + \frac{c_{w2}(R_M^2 - r_M^2)w^2(t)}{\Omega_M^2} \right) \quad (
 \end{aligned}$$

Come si vede, le variabili di stato sono legate da coefficienti e relazioni in numero e complessità tale da impossibilitarci a scrivere in forma elegante il sistema.

Tuttavia ricorrendo al calcolo simbolico in Matlab, inserendo i parametri del modello (diverse decine) e le relazioni che li legano alle variabili di stato, si riesce ad ottenere la dipendenza cercata.

I parametri vengono inseriti in Matlab con il seguente listato:

```

%% Parametri_Elicottero

clear all
close all
clc

%% Massa
m_helicopter=3.5; %%kg

%% Dati del rotore principale

R_m=0.725; %%m (distanza mozzo-punta della pala)
r_m=0.12; %%m (raggio mozzo)
I_rotorM=0.066446; %%kg/m^2 (densità del rotore)
T_VI=0.15; %%s (costante di tempo velocità indotta)
m_bladeM=0.211; %%kg (massa pala)
l_bladeM=0.062; %%m (lunghezza pala)
crp=(46.6*12.2)/(33.7*31); %% (coefficiente per il calcolo del flappeggio) (formule (47))
crs=(0.83*20*21.5)/(33.7*31); %% (idem)
csp=(0.7*20*20.8)/(10.8*19); %% (idem)
c_f0=259406; %% (coefficiente per il calcolo dei momenti causati dal flappeggio) (f. (44)-(45))

l_l0=0.041; %%m (idem, offset)
c_aalfa=5; %%coefficiente per il calcolo della spinta T (formula (35))
c_double0=0.01449; %%coefficienti per il calcolo del momento Q e Q_T(formule (B.33)-(B.34))
c_double1=-0.08905; %%idem
c_double2=0.39076; %%idem
    
```



```

%% Dati del rotore di coda

R_t=0.15;                %%m (distanza mozzo-punta della pala)
r_t=0.06;                %%m (raggio mozzo)
L_rotorT=0.934*10^-4;   %%kg/m^2 (densità del rotore di coda)
    T_VIT=0.1;          %%s (costante di tempo velocità indotta per il rotore di coda)
m_bladeT=0.008575;     %%kg (massa pala rotore di coda)
l_bladeT=0.032;        %%m (lunghezza pala)
c_alfaT=5;             %% (coefficiente per il calcolo della spinta)
c_double1T=2.1;        %% (coefficiente per il calcolo del momento torcente QT)

%% Dati della barra stabilizzatrice

l_servo=0.05;          %%m (lunghezza aste)
R_p=0.35;              %% (distanza mozzo-punta dell'asta della barra stabilizzatrice)
r_p=0.24;              %%m (raggio mozzo)
L_servo=0.001707;     %%kg/m^2 (densità barra stabilizzatrice ) (?)
c_alfaP=2.67;         %%coefficiente per il numero di Lock

%% Dati del motore elettrico
eta_MoM=54*4/22;      %%coefficiente per il calcolo del momento M_clutch (momento di frizione ) (formula
                        B.32)
eta_MoT=54/22;        %%coefficiente per il calcolo del momento M_drivez (momento di guida) (formula b.39)
omega_M=163.363;      %%m/s (circa 1500 giri/minuto)velocità rotore principale in hovering
omega_T=653.452;     %%m/s (velocità rotore di coda in hovering)
k_a=27.309;           %% (costante del motore elettrico ka=KM/Ra
tau_a=0.043024;      %%s (costante di tempo del motore elettrico)
k_omega=2.589;        %%costante rappresentativa del momento di inerzia di massa del rotore del motore
                        elettrico
k_umot=-0.0036;       %%costante elettrica che lega la velocità in uscita del rotore con la forza
                        controelettrica E=Kumot*Omega
k_AM=0.41098;
I_motor=1/k_omega;
k_L=1;

%% Momenti e Prodotti di inerzia di inerzia di massa
I_xx=0.112;
I_yy=0.262;
I_zz=0.191;
I_xz=0.038;

%% Costanti universali
g=9.81;                %%m/s^2accelerazione di gravità
ro=1.29*10^-6;         %%kg/dm^3densità dell'aria

%% Altri parametri

M_omega0=5.549;       %%Nm
xt=1;
xm=1;
zm=1;
zt=1;
k_p2r=0.73;           %%guadagno aste barra stabilizzatrice-pale rotoriche
k_s2r=0.61;           %%guadagno piatto oscillante-pale rotoriche
k_s2p=1.28;           %%guadagno piatto oscillante-aste barra stabilizzatrice
tau_p=0.09;           %%s costante di tempo variazione beccheggio aste
M_load=5.549;         %%Nm
    
```



Oltre ai parametri delle varie parti dell'elicottero devono essere considerati i valori costanti che dipendono da questi parametri e che sono espressi da relazioni note. Questi vengono calcolati nello stesso listato Matlab come segue:

```
%% Valori costanti

S_M=pi*(R_m^2);           %%superficie disco attuatore principale(formula (24))
S_T=pi*(R_t^2);           %%superficie disco attuatore di coda(formula (24) ma per il rotore di coda)
I_leave=m_bladeM*(R_m^2)/3; %%Inerzia di massa delle lame del rotore principale essendovi R_m

gamma_M=ro*I_bladeM*c_aalfa*((R_m^4)-(r_m^4))/I_leave; %%numero di Lock (equazione (37) per il flappeggio
                                                         del rotore principale)
gamma_M3=ro*I_bladeM*c_aalfa*((R_m^3)-(r_m^3))/I_leave; %%diversa espressione del numero di Lock (???)
gamma_P=ro*I_servo*c_aalfaP*((R_p^4)-(r_p^4))/I_servo; %%numero di Lock per il flappeggio della barra
                                                         stabilizzatrice

omega_0=sqrt((omega_M^2)+(c_f0*(l_l0^2)/(4*I_leave)));
zita=gamma_M*omega_M/(16*omega_0);
fi_K=-atan(2*zita*omega_M*omega_0/((omega_0^2)-(omega_M^2)));

V_IMR0=sqrt(m_helicopter*g/(2*ro*S_M)); %%velocità indotta nel rotore principale in condizioni di perfetto
                                                         hovering
F_tailrotor0=-M_omega0/(xt);
V_IMT0=sqrt(F_tailrotor0/(2*ro*S_T));
```

Una volta inseriti in Matlab tutte le costanti e fatte calcolare le grandezze costanti, per avere le equazioni del modello si deve ricorrere al calcolo simbolico. Matlab è dotato di pacchetti che consentono di fare ciò e di vari comandi utili per trattare le equazioni scritte in forma simbolica.

Con il seguente listato, quindi, si sono definiti i vettori simbolici delle variabili di stato e degli ingressi \mathbf{x} ed \mathbf{u} come scelti all'inizio del paragrafo, e si sono inserite tutte le relazioni che esprimono i termini che compaiono nelle equazioni del modello non lineare in funzione dello stato e dell'ingresso. In realtà alcuni termini dipendono anche dalle derivate delle variabili di stato, per questo motivo in un secondo momento sarà necessario fare delle ulteriori sostituzioni per avere il modello in forma normale cercato.

```
%% Espressioni dei termini variabili nelle equazioni non lineari dell'elicottero

clear all
close all
clc

%%Si caricano i parametri dell'elicottero

Parametri_Elicottero

%% variabili di stato

for i=1:18

    eval(['syms x' num2str(i)']);
end
```



```

%% derivate variabili di stato
for i=1:18
    eval(['syms x' num2str(i) '_p']);
end

%% variabili di ingresso
for i=1:5
    eval(['syms u' num2str(i)']);
end

%% Valori variabili
V_Iv=(x13/2)+ sqrt(((x13^2)/2)+ (x17^2));
deltav_i=(3*(R_m^2)*V_Iv)/(2*((R_m^3)-(r_m^3)));

A_1=k_p2r*x12 + k_s2r*u2;          %% equazioni di beccheggio delle pale
B_1=k_p2r*x11 + k_s2r*u1;

a_0= - ((gamma_M*omega_M)/(8*(omega_0^2)))*(u3 + (deltav_i/omega_M))+...
      (gamma_M^3*omega_M*x13)/(6*omega_0);

A_1mh=A_1 + (x9/omega_M)-(16*x10/(gamma_M*omega_M)) + (4*((R_m^3)-(r_m^3))*x7*a_0)/(3*((R_m^4)-
(r_m^4))*omega_M)- ((4*((R_m^3)-(r_m^3))*x8)/(3*((R_m^4)-
(r_m^4))*omega_M))*(u3+(deltav_i/omega_M));

B_1mh=B_1 + (x10/omega_M)-(16*x9/(gamma_M*omega_M)) + (4*((R_m^3)-(r_m^3))*x8*a_0)/(3*((R_m^4)-
(r_m^4))*omega_M)-((4*((R_m^3)-(r_m^3))*x7)/(3*((R_m^4)-
(r_m^4))*omega_M))*(u3+(deltav_i/omega_M));

a_1=-sin(fi_K)*((gamma_M*(omega_M^2)*B_1mh)/(8*sqrt(((omega_M^2)-(omega_0^2))^2) +
4*(zita^2)*(omega_0^2)*(omega_M^2))))+cos(fi_K)*((gamma_M*(omega_M^2)*A_1mh)/(8*sqrt(((omega_M^
2)-(omega_0^2))^2) + 4*(zita^2)*(omega_0^2)*(omega_M^2)))));

b_1=-sin(fi_K)*((gamma_M*(omega_M^2)*A_1mh)/(8*sqrt(((omega_M^2)-(omega_0^2))^2) +
4*(zita^2)*(omega_0^2)*(omega_M^2))))-
cos(fi_K)*((gamma_M*(omega_M^2)*B_1mh)/(8*sqrt(((omega_M^2)-(omega_0^2))^2) +
4*(zita^2)*(omega_0^2)*(omega_M^2)))));

F_gx=-sin(x5)*g*m_helicopter;
F_gy=-sin(x6)*cos(x5)*g*m_helicopter;
F_gz=-sin(x6)*cos(x5)*g*m_helicopter;

T=0.8*ro*1_bladeM*c_aalfa*(-(((R_m^3)-(r_m^3))/3)*(omega_M^2)*u3 -0.22*deltav_i*omega_M + ((x7/2)*B_1 -
(x8/2)*A_1 + x13 + ((x7*a_1)/2)-((x8*b_1)/2)) - ((x7*a_1)/2) + ((x8*b_1)/2) );

V_Itv=-((xt*x14 + x8)/2) + sqrt(((xt*x14 + x8^2)/2) +x18^2);
deltav_Ti= 3*((R_t^2)*V_Itv)/(2*((R_t^3)-(r_t^3)));
    
```



$$T_T=0.75*ro*l_bladeT*c_aalfa*(omega_T^2)*(((R_t^3)-(r_t^3))/3)*(u4 - (deltav_Ti/omega_T)) -$$

$$(((R_t^2)-(r_t^2))/2)* ((x14*xt + x8)/omega_T));$$

$$F_x=F_gx - T* sin(a_1);$$

$$F_y=F_gy - T* sin(b_1) + T_T;$$

$$F_z=F_gz - T* cos(a_1)*cos(b_1);$$

$$M_clutch= eta_MoM*x16 - ((eta_MoM)^2)*I_motor*k_omega*(x16 - k_L*M_load) - eta_MoM*I_motor*x14_p;$$

$$Q=- (ro/2)*l_bladeM*c_aalfa*(omega_M^2)*(((R_m^4)-(r_m^4))/2)*(-u3-$$

$$(deltav_i/omega_M))*(deltav_i/omega_M)+2*(((R_m^3)-(r_m^3))/(3*omega_M))*((u3-...$$

$$2*(deltav_i/omega_M)*x13) - (((R_m^2)-(r_m^2))*x13^2)/(omega_M^2))+...$$

$$(ro/2)*l_bladeM*(omega_M^2)*(((R_m^4)-(r_m^4))/2)*(c_double0-$$

$$c_double1*(u3+(deltav_i/omega_M))+c_double2*((u3+(deltav_i/omega_M))^2))+...$$

$$x13*(((R_m^3)-(r_m^3))/(3*omega_M))*2*c_double1-...$$

$$(4*c_double2/omega_M)*(u3+(deltav_i/omega_M))+c_double2*(((R_m^2)-(r_m^2))*x13^2)/(omega_M^2));$$

$$Q_T=- (ro/2)*l_bladeT*c_aalfaT*(omega_T^2)*(((R_t^4)-(r_t^4))/2)*(u4-$$

$$(deltav_Ti/omega_T))*(deltav_Ti/omega_T)+...$$

$$(2*((R_t^3)-(r_t^3))/3)*((-x14*xt - x8)*(u4/omega_T)-2*(x14*xt + x8)*(deltav_Ti/(omega_T^2)))-...$$

$$(ro/2)*l_bladeT*(omega_T^2)*(((R_t^4)-(r_t^4))/2)*(c_double1T*(u4+(deltav_Ti/omega_T)))-...$$

$$(2*((R_t^3)-(r_t^3))/3)*(c_double1T/omega_T)*(x14*xt + x8));$$

$$M_x=((l_l0^2)/4)*c_f0*b_1;$$

$$M_y=((l_l0^2)/4)*c_f0*a_1;$$

$$M_tail=Q_T - eta_MoT*I_rotorT*x15_p;$$

$$M_drivey=M_tail;$$

$$M_drivez=-x16 + (1-(eta_MoM^-1))*M_clutch + eta_MoT*M_tail;$$

$$L=M_x - zm*T*sin(b_1) - zt*T_T;$$

$$M=M_y + M_drivey - zm*T*sin(a_1) + xm*T*cos(a_1)*cos(b_1);$$

$$N=M_drivez - xm*T*sin(b_1) + xt*T_T;$$

Eseguito questo listato si ottengono tutte le variabili in funzione delle variabili di stato (e di alcune delle derivate di talune componenti dello stato) e delle variabili di ingresso. Quindi, sempre mediante il calcolo simbolico, si possono scrivere in Matlab le 18 equazioni del modello non lineare ottenendo la forma:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Ciò viene fatto con il seguente programma, dove viene indicata l'espressione di ognuna delle componenti della funzione vettoriale f . Nel listato le funzioni vengono riportate nell'ordine corrispondente alle derivate del vettore di stato, contrariamente a quanto fatto nel paragrafo 1. Per questo motivo, di fianco alle relazioni, nel programma viene riportata, per il lettore, la corrispondenza delle f_i con la numerazione delle formule data nel paragrafo precedente.



```

%%Equazioni del modello matematico non lineare

%Si caricano i parametri dell'elicottero

Parametri_Elicottero

%Si caricano le espressioni dei termini variabili

Valori_variabili

%%Equazioni nella forma x_punto= f(x,u)

f1=x7;

f2=x8;

f3=x13;

f4= x14;

f5=x9;

f6=x10;

f7 =(1/m_helicopter)*(F_x + x14*x8 - x9*x13);           %%equazione 1

f8=(1/m_helicopter)*(F_y + x10*x13 - x14*x7);           %%equazione 2

f9=(1/I_yy)*((I_zz-I_xx)*x10*x14 + I_xz*((x10^2) - (x14^2)) + M); %%equazione 5

f10=(1/((I_xx - (I_xz^2)/I_zz)))*(L + (I_yy-I_zz)*x9*x10 + I_xz*(x10*x9 + (1/I_zz)*...
((I_xx-I_yy)*x9*x10 - I_xz*x9*x14));           %%combinazione eq. 4) e 6)

f11=(1/tau_p)*(-x11 + k_s2p*u1 + (x10/(omega_M)) - tau_p*x9);           %%equazione 11

f12=(1/tau_p)*(-x12 + k_s2p*u2 + (x9/(omega_M)) - tau_p*x10);

f13=(1/m_helicopter)*(F_z + x9*x7 - x10*x8);           %%equazione 3

f14=(1/I_zz)*(N + (I_xx - I_yy)*x9*x10 + I_xz*(L + (I_yy-I_zz)*x9*x10 + I_xz*(x10*x9 + (1/I_zz)*
((I_xx-I_yy)*x9*x10 - I_xz*x9*x14))- x9*x14));           %%comb .eq. 6) e 4)

f15= k_omega*(x16 - k_L*M_load);           %%equazione 8

f16=(-1/tau_a)*x16 + (1/(k_a*tau_a*k_umot))*x15 + (1/(k_a*tau_a))*u5;           %%equazione 7

f17=(1/T_VI)*(-x17 + V_IMR0 *sqrt((T/ (m_helicopter*g))));           %%equazione 9

f18=(1/T_VIT)*(-x18 + V_IMT0*sqrt((T_T/ (M_omega0))));           %%equazione 10

```

Si osservi che la funzione f10 (che descrive l'evoluzione dello stato x_{10} , ossia la velocità di rollio p) non è espressa direttamente da una delle equazioni del paragrafo 1 bensì dalla combinazione di due di esse (la 4) e la 5)) questo accade perché nelle equazioni cardinali della dinamica per i momenti, la derivata del rollio compare sia nella prima che nella terza equazione.

In definitiva eseguendo questo listato, si ha l'espressione funzionale cercata.



Capitolo III – Linearizzazione e sottosistemi

§ 1 – Linearizzazione del modello matematico non lineare

Di seguito effettueremo un'operazione di linearizzazione che ci permetta di studiare il velivolo nelle condizioni di nostro interesse (Hovering - Volo a Punto Fisso)

Il modello non lineare può essere linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio tramite il calcolo della matrice Jacobiana.

Siccome siamo interessati allo studio dell'elicottero durante l'Hovering (Volo a punto fisso), le condizioni che determinano questo funzionamento sono le seguenti:

$$u = v = \omega = q = r = 0$$

$$\Omega = 1500 \text{ rpm}$$

Inoltre la posizione x_e, y_e, z_e e l'angolo di imbardata possono assumere un valore costante qualsiasi.

Per la determinazione degli stati di equilibrio, si deve risolvere l'equazione $f(\underline{x}, \underline{u}) = 0$ con la quale si determinano i restanti stati di equilibrio e gli ingressi costanti relativi alla condizione di equilibrio, che vengono riportati nella seguente tabella:

$\theta_0 = -0.392deg$	$B_{1s0} = 0.376 deg$
$\phi_0 = -5.399deg$	$A_{1s0} = 0.042 deg$
$a_{1p0} = 0.532deg$	$A_{M0} = -9.692 deg$
$b_{1p0} = 0.060deg$	$A_{T0} = 11.15 deg$
$V_{10} = 4.241 m/s$	$V_{TI0} = 6.348 m/s$
$M_{A0} = 0.532 Nm$	$M_{w0} = 5.549 Nm$

Mediante il calcolo della matrice Jacobiana, possiamo in definitiva scrivere il modello lineare nella condizione di Hovering nell'intorno del punto di equilibrio.

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$$

Per valutare la matrice Jacobiana è stato utilizzato ancora il calcolo simbolico in Matlab, riportato nel seguente listato:

```
%% Linearizzazione
%% Punto di equilibrio in Hovering
Parametri_Elicottero
Valori_variabili
equazioni_modellononlineare
```



%Condizione di Hovering $u=v=w=q=p=v=0$ m/s $\Omega=157.08$ rad/s

```

%%Si assegnano alle variabili di stato i valori per l'hovering
for i=1:18

eval( ['f' num2str(i) '= subs(f' num2str(i) ',{x7,x8,x13,x9,x10,x14,x15},{0,0,0,0,0,157.08});']);

end

%Si pone f(x,u)=0 per avere l'equilibrio

[x5,x6,x11,x12,x16,x17,x18,u1,u2,u3,u4,u5]=solve('f7=0','f8=0','f9=0','f10=0','f11=0','f12=0','f13=0','f14=0'
,'f15=0','f16=0','f17=0','f18=0')

%% Calcolo della matrice Dinamica A

%Si è ottenuto l'equilibrio

XE={0,0,5000,0,-0.392,-5.399,0,0,0,0,0.532,0.060,0,0,157.08,0.834,4.241,6.348,0.376,0.042,-
9.692,11.15,23.3};

x={x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11,x12,x13,x14,x15,x16,x17,x18,u1,u2,u3,u4,u5};

%%calcolo matrice dinamica A in forma simbolica

for j=1:18

for i=1:18

eval(['A(' num2str(j) ',' num2str(i) ')=diff(f' num2str(j) ',x' num2str(i) ');' ]);

end

end

%%Specificando il punto di lavoro XE, si ottiene la matrice dinamica A in forma numerica

A=subs(A,x,XE)

%% Calcolo della matrice ingresso-stato B

for j=1:18

for i=1:5

eval(['B(' num2str(j) ',' num2str(i) ')=diff(f' num2str(j) ',u' num2str(i) ');' ]);

end

end

B=subs(B,x,XE)
    
```

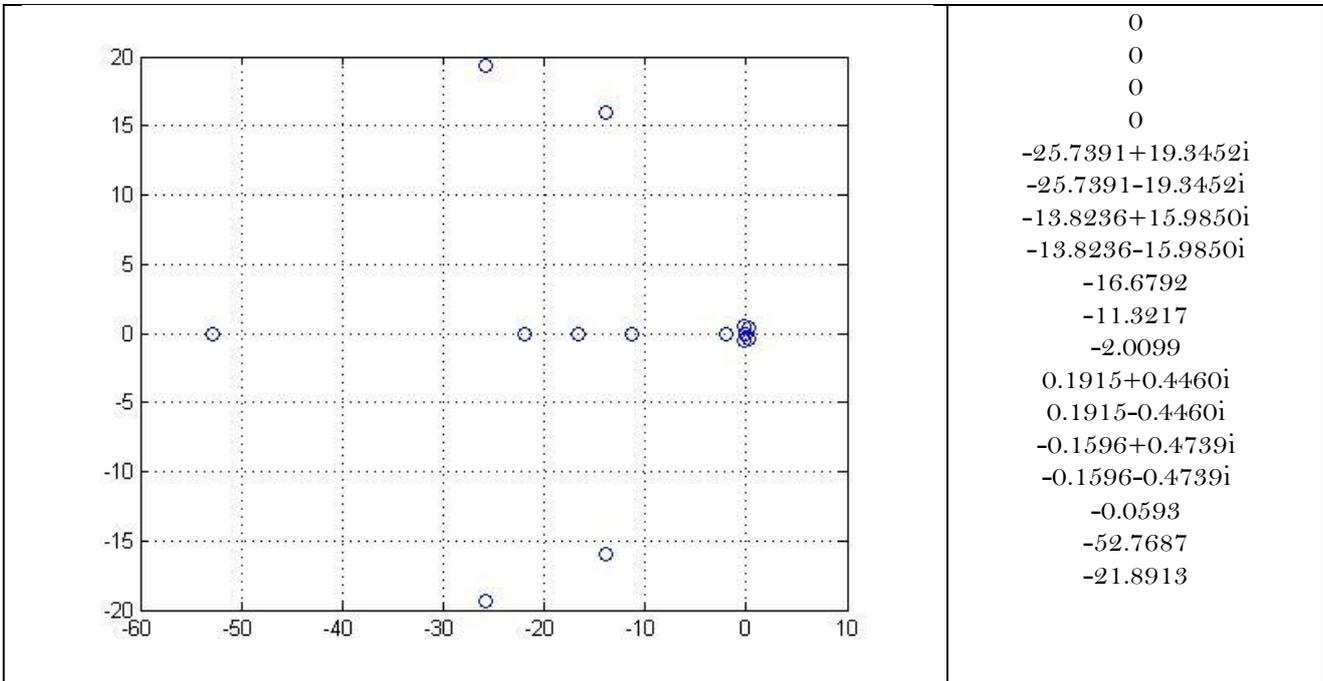
Pertanto il sistema nella forma ingresso stato uscita sarà caratterizzato dalle seguenti matrici



$A = \frac{\partial f}{\partial x} _{x_0, u_0} \in \mathcal{R}^{18 \times 18}$	$B = \frac{\partial f}{\partial u} _{x_0, u_0} \mathcal{R}^{18 \times 5}$
---	--

Le matrici complete sono disponibili in appendice.

I poli del sistema complessivo saranno pertanto dati dagli autovalori della matrice A, che sono situati nel piano complesso come in figura:



Dal punto di vista ingresso uscita la matrice di trasferimento del sistema complessivo sarà

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Avente dimensioni $[13 \times 5]$ e di conseguenza 65 funzioni di trasferimento, avendo definito la matrice stato-uscita come un'identità che mette in uscita le grandezze:

$$\mathbf{y} = (x^e \ y^e \ z^e \ \psi \ \theta \ \varphi \ u \ v \ q \ p \ w \ r \ \Omega)^T$$

Trattare il modello lineare nel suo complesso risulta molto complicato dato il numero elevato di variabili di stato, di ingressi e di uscita.

Pertanto suddivideremo lo studio di questo sistema in tre sottosistemi:

- *Il moto orizzontale*
- *Il moto verticale*
- *Il modello del motore*



§ 3 – Modello per il moto orizzontale

Il modello orizzontale caratterizza la possibilità per l'elicottero di compiere i seguenti movimenti:

- avanzamento lungo l'asse x;
- avanzamento lungo l'asse y;
- beccheggio;
- rollio.

Tutte queste dinamiche sono accoppiate fisicamente dal rotore principale.

Ad esempio, per compiere un avanzamento il rotore deve inclinarsi in avanti (per avere una componente della spinta lungo x) ma ciò comporterà inevitabilmente (per quanto possa essere "buono" il sistema di controllo) un beccheggio del velivolo. In generale, l'accoppiamento è ancora più forte, per cui con una variazione dell'inclinazione del rotore, varia anche il rollio.

Le variabili di interesse per questo sottosistema sono

$$\underline{x}_{hor} = [\theta \ \phi \ u \ v \ q \ p \ a_{1p} \ b_{1p}]^T$$

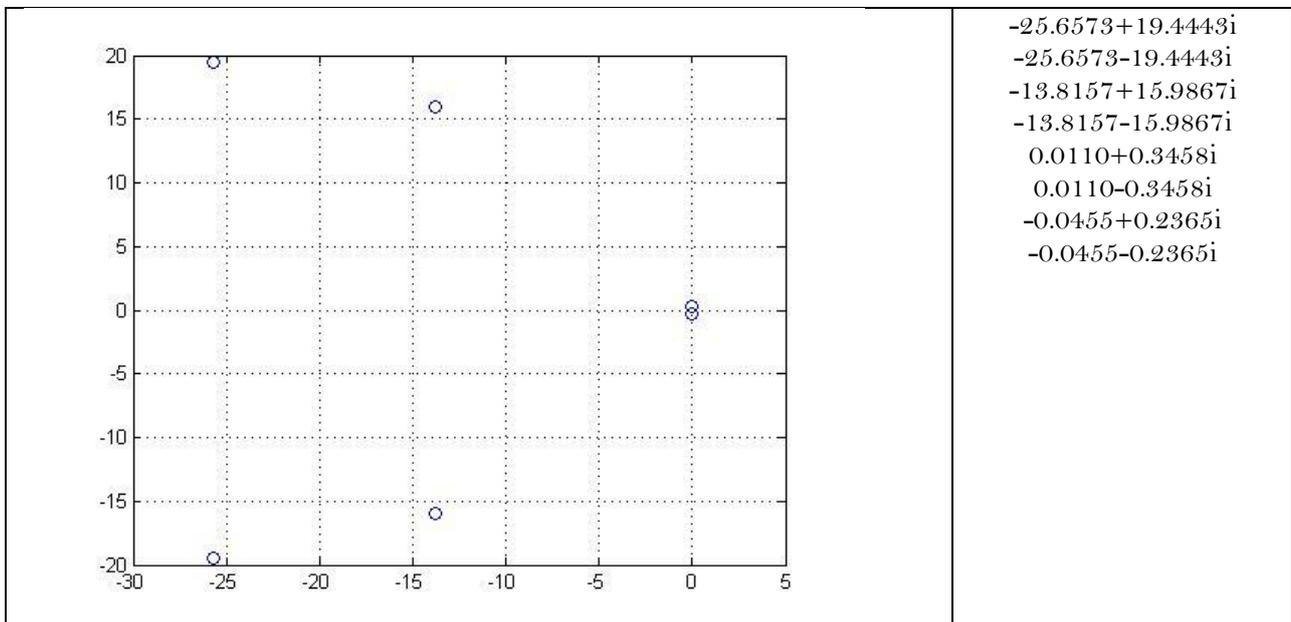
$$\underline{u}_{hor} = [B_{1s} \ A_{1s}]^T$$

$$\underline{y} = [\theta \ \phi \ u \ v \ q \ p]^T$$

Pertanto il sistema nella forma ingresso stato uscita sarà caratterizzato dalle seguenti matrici

$A_{hor} \in \mathcal{R}^{8 \times 8}$	$B_{hor} \in \mathcal{R}^{8 \times 2}$
$C_{hor} \in \mathcal{R}^{6 \times 8}$	$D_{hor} \in \mathcal{R}^{6 \times 2}$

I poli del sottosistema orizzontale saranno dati dagli autovalori della matrice A_{hor} , i quali si distribuiscono nel piano complesso come in figura:





Data la presenza di due poli a parte reale leggermente positiva il sottosistema del moto orizzontale è instabile.

§ 4 – Modello per il moto verticale

Il modello verticale caratterizza la possibilità per l'elicottero di compiere i seguenti movimenti:

- moto lungo l'asse z;
- imbardata.

Il moto verticale ed il moto di imbardata sono fortemente accoppiati nel modello.

$$\underline{x}_{ver} = [\omega \ r \ V_I \ V_{IT}]^T$$

$$\underline{u}_{ver} = [A_M \ A_T]^T$$

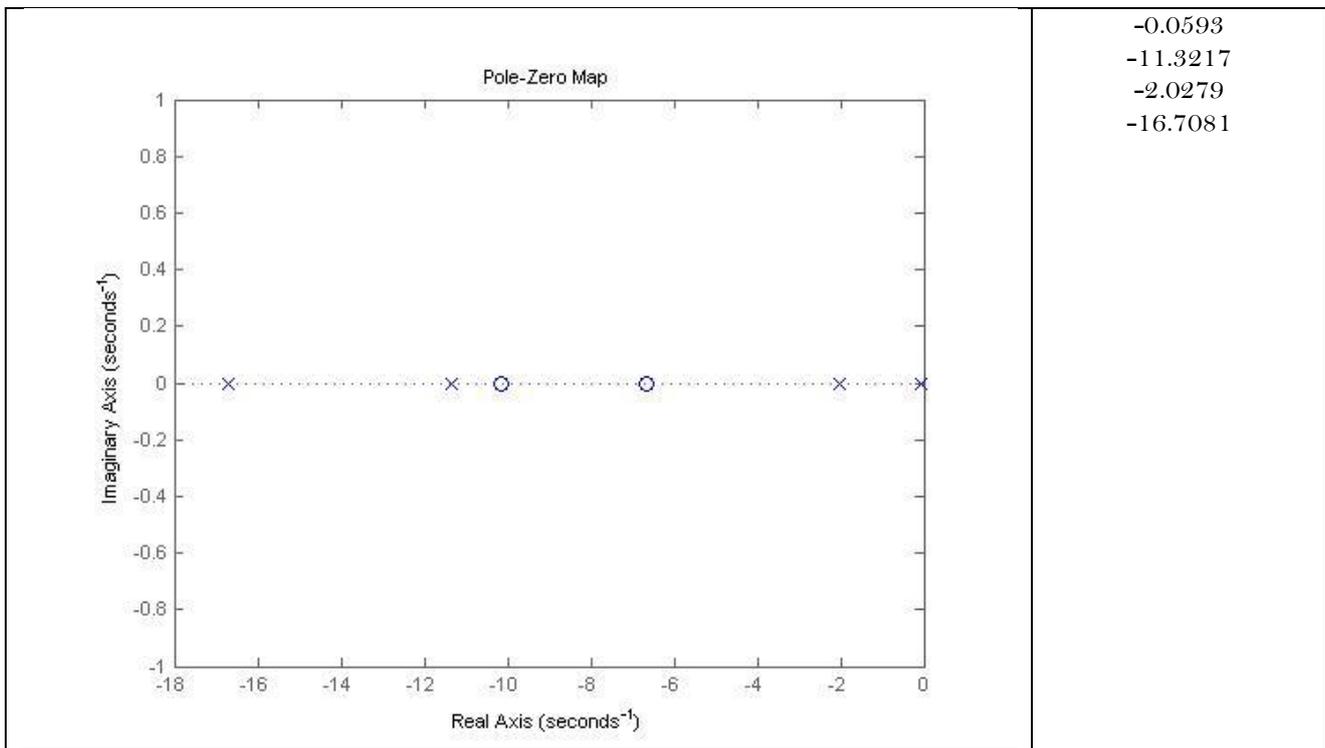
$$\underline{y}_{ver} = [\omega \ r]^T$$

In realtà è evidente che anche la velocità del motore elettrico influenzerà i moti descritti da questo modello. Pur tuttavia, di norma, il motore elettrico viene controllato a parte e per questa ragione non entra nel modello verticale.

Pertanto il sistema nella forma ingresso stato uscita sarà caratterizzato dalle seguenti matrici

$A_{ver} \in \mathcal{R}^{4 \times 4}$	$B_{ver} \in \mathcal{R}^{4 \times 2}$
$C_{ver} \in \mathcal{R}^{2 \times 4}$	$D_{ver} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$

I poli del sottosistema orizzontale saranno dati dagli autovalori della matrice A_{ver}





Capitolo III – Proprietà strutturali

Essendo il sistema principale ed i sottosistemi da esso ricavati lineari possiamo calcolare per questi tre sistemi la matrice di controllabilità, che in generale è data da:

$$\mathbf{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

ove n è l'ordine del sistema (dimensione dello spazio di stato).

Siccome un sistema LTI a tempo continuo risulta essere (completamente) controllabile se il rango della matrice di controllabilità \mathbf{C} è pari all'ordine del sistema n , calcolando le matrici di controllabilità per i due sottosistemi, si ricava che:

- Il sottosistema orizzontale è controllabile
- Il sottosistema verticale è controllabile

Essendo il sistema principale ed i sottosistemi da esso ricavati lineari possiamo calcolare per questi tre sistemi la matrice di osservabilità:

$$\mathbf{O} = [C^T \ A^T C^T \ (A^2)^T C^T \ \dots \ (A^{n-1})^T C^T]$$

ove n è l'ordine del sistema (dimensione dello spazio di stato).

Ricordando che per i sistemi LTI si possono definire:

- Lo spazio di osservabilità X_O
- Lo spazio di non osservabilità X_{NO}

e che la somma diretta dei due sottospazi, restituisce

$$X_O \oplus X_{NO} = \mathfrak{R}^n$$

Siccome un sistema LTI a tempo continuo risulta essere (completamente) osservabile se il rango della matrice di osservabilità \mathbf{O} è pari all'ordine del sistema n .

Essendo:

$$X_O = X_{NO}^\perp = (N(O^T))^\perp = R(O^T)$$

avendo indicato con

- $R(O^T)$ il rango della matrice di osservabilità trasposta
- $N(O^T)$ il nullo della matrice di osservabilità trasposta

A tale scopo utilizzando il comando di Matlab `obsv(sys)` si determina la matrice di osservabilità per i diversi sottosistemi.

Essendo il rango della matrice di osservabilità trasposta minore dell'ordine del sistema il sistema complessivo è osservabile.



Analogamente calcolando la matrice di osservabilità trasposta del sottosistema orizzontale e del sottosistema verticale. Valutando, successivamente, il rango di tali matrici avremo che:

- Il sottosistema orizzontale è osservabile
- Il sottosistema verticale è osservabile

Capitolo IV – Controllo in frequenza

L'idea alla base di questo sistema di controllo è quella di disaccoppiare i diversi canali l'uno dall'altro.

Questo ha il vantaggio di poter ricorrere alle tecniche SISO per il progetto dei controllori (un controllore SISO per canale) .

In questo lavoro il disaccoppiamento è stato realizzato solo per il modello verticale, poiché le tecniche di disaccoppiamento per sistemi generici, di fatto, operano per cancellazione, rendendo la matrice di trasferimento del sistema diagonale, ma esse non possono essere utilizzate per sistemi instabili (questi andrebbero prima stabilizzati) per il controllo del modello orizzontale si rimanda ai capitoli successivi.

§ 1 – Disaccoppiamento di sistemi triangolari

Un sistema è detto *triangolare* se la matrice di trasferimento ha una struttura del tipo:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & 0 & \dots & 0 \\ G_{21} & G_{22} & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ G_{m1} & \dots & \dots & G_{mm} \end{bmatrix}$$

Nel caso di sistemi 2×2 avremo che

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

Notiamo che se progettiamo dei controllori separati per i due sistemi SISO, quindi facendo riferimento solo a $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$, si hanno risultati tanto peggiori quanto più aumenta la costante di guadagno di $G_{12}(s)$

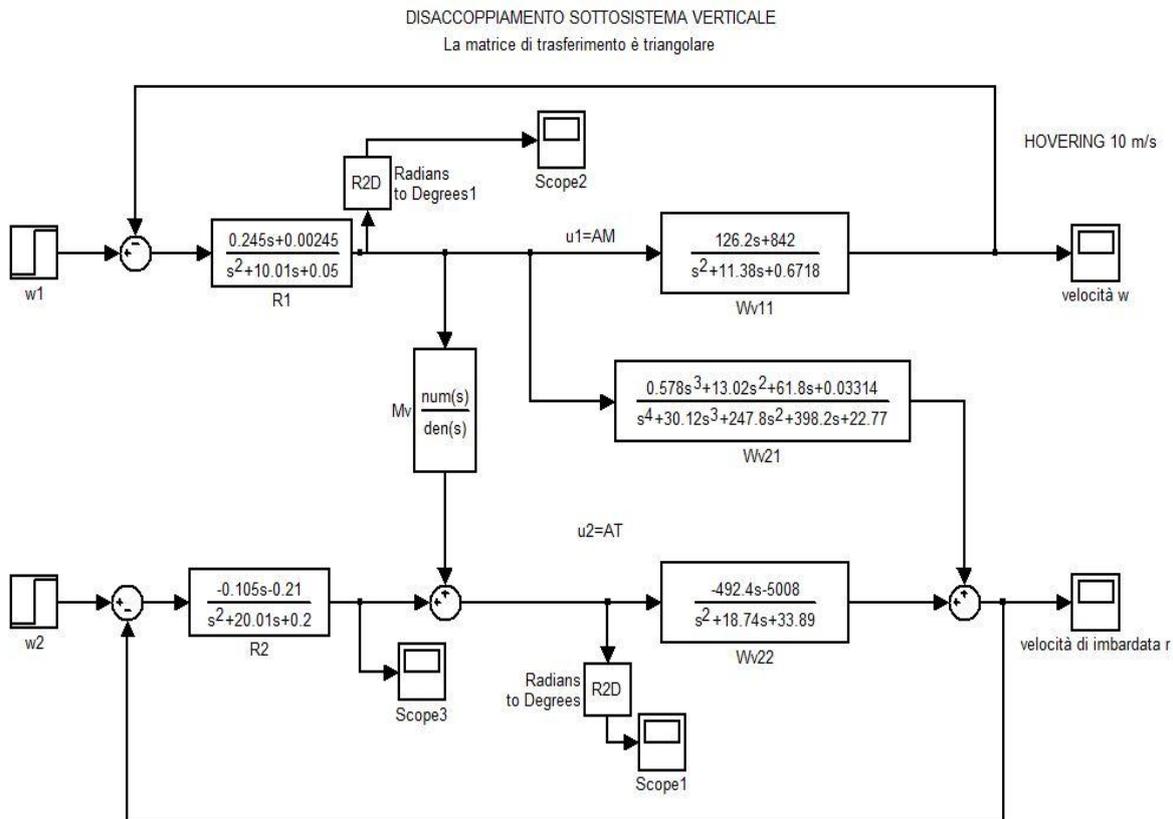
Quindi nel caso di sistemi di questo tipo useremo la seguente tecnica di progetto:

- ✚ Si progetta dapprima il controllore SISO che agisce su $G_{11}(s)$
- ✚ Successivamente osserviamo che u_1 può essere visto dal secondo sottosistema come se fosse un disturbo misurabile ed utilizzare una tecnica di cancellazione
- ✚ A questo punto $G_{22}(s)$ viene ad essere disaccoppiato da u_1 e a questo punto il progetto si può concludere con l'implementazione di un controllore SISO per $G_{22}(s)$



§ 2 – Disaccoppiamento per il sistema verticale

Si è progettato il seguente schema di disaccoppiamento:



Nel seguente listato è riportato il progetto dei controllori SISO con i ragionamenti fatti per progettarli:

Disaccoppiamento modello verticale

Per il calcolo del regolatore R1 si impongono le seguenti specifiche (in riferimento ad un segnale a gradino):

- Errore a regime minore di 0.01
- Margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi
- Tempo di assestamento piccolo

Per soddisfare tale specifiche sono stati fatti ragionamenti in frequenza con tecniche di controllo classico.

```
%%SPECIFICHE
Wv11=126.212*(s+6.671)/(s+11.32)/(s+0.05935);
s=tf('s');
R1=4.9; %% deve essere maggiore di 0.8 per avere errore inferiore ad 1/1000
R2=1/(s+10); %%PER MODERARE LA VARIABILE DI CONTROLLO
R3=(0.05)*(s+0.01)/(s+0.005); %%per modificare la punteggiatura del luogo delle radici (per poter porre un
guadagno maggiore di 0.8
%%e avere risposta indiciale
%%non troppo rapida (variabile
%%di controllo troppo
```



%%sollecitata

L1=R1*R2*R3*Wv11;

F3=feedback(L1,1);
rlocus(L1);
figure(2);
step(F3)

R=R1*R2*R3;

figure(3);
margin(L1); %%margine di fase di quasi 90 gradi!

Per il calcolo del regolatore R2 si impongono le seguenti specifiche (in riferimento ad un segnale a gradino):

- Errore a regime minore di 0.01
- Margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi
- Tempo di assestamento piccolo

Per il calcolo del regolatore R1 si impongono le seguenti specifiche (in riferimento ad un segnale a gradino):

- Errore a regime minore di 0.01
- Margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi
- Tempo di assestamento piccolo

Per soddisfare tale specifiche sono stati fatti ragionamenti in frequenza con tecniche di controllo classico.

```

Wv11=126.212*(s+6.671)/(s+11.32)/(s+0.05935);
s=tf('s');
R1=4.9;                            %% deve essere maggiore di 0.8 per avere errore inferiore ad 1/1000
R2=1/(s+10);                    %%PER MODERARE LA VARIABILE DI CONTROLLO
R3=(0.05)*(s+0.01)/(s+0.005); %%per modificare la punteggiatura del luogo delle radici (per poter porre un
                                         guadagno maggiore di 0.8) e avere risposta indiciale non troppo rapida (variabile
                                         di controllo troppo sollecitata

L1=R1*R2*R3*Wv11;

F3=feedback(L1,1);
rlocus(L1);
figure(2);
step(F3)

R=R1*R2*R3;

figure(3);
margin(L1);      %%Il margine di fase è di quasi 90 gradi
    
```

Per il calcolo del regolatore R2 si impongono le seguenti specifiche (in riferimento ad un ingresso a gradino):

- Errore a regime minore di 0.01
- Margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi
- Tempo di assestamento piccolo



```

%% Progetto di un regolatore per Wv22

clear all
close all
clc

MdTver

s=tf('s');
Wv22=-492.396*(s+10.17)/(s+16.71)/(s+2.028);
mur=-21;          %%deve essere minore di -6.76 per avere errore a regime minore di 1/1000
R1=mur;

R2=1/(s+20);      %%polo per moderare la variabile di controllo

R3=0.005*(s+2)/(s+0.01);  %%per modificare la punteggiatura del luogo e poter fornire un guadagno che rispetti
la specifica sull'errore
L2=R1*R2*R3*Wv22;

figure(1);
rlocus(L2);

F=feedback(L2,1);
figure(2);
step(F);

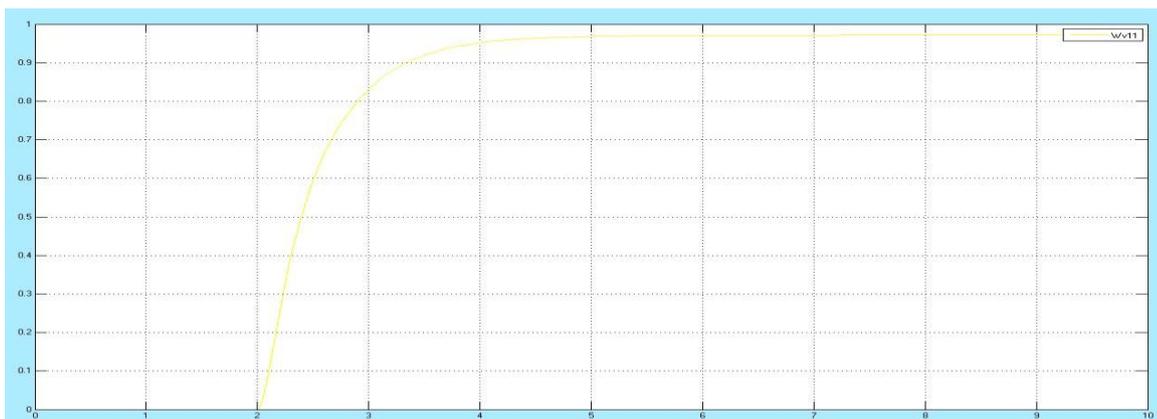
R22=R1*R2*R3;
margin(L2)      %%il margine di fase è di 89 gradi

F=feedback(L2,1);
figure(2);
step(F);

R22=R1*R2*R3;
margin(L2)      %%il margine di fase è di 89 gradi
    
```

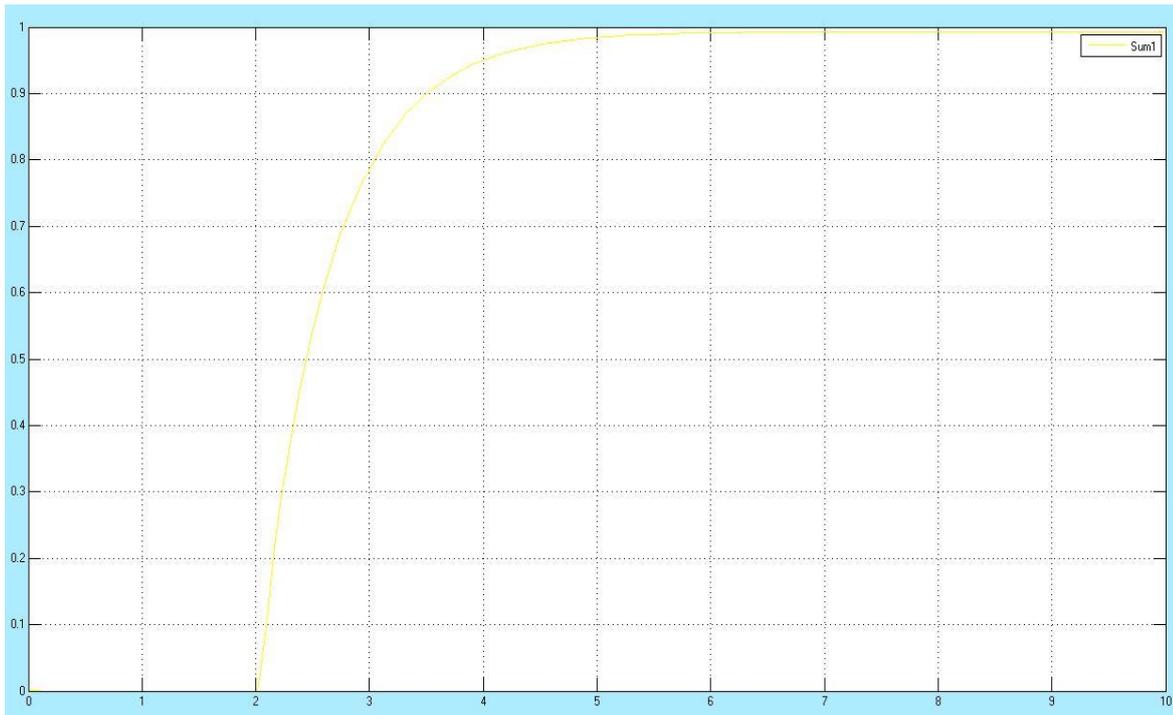
L'uscita del sistema di controllo ad un riferimento a gradino è riportata nei seguenti grafici.

Velocità lungo l'asse z





Velocità d' imbardata





Capitolo V – Allocazione dei poli

Dato un sistema LTI a tempo continuo di ordine n con m ingressi:

$$\dot{x} = A \underline{x} + B \underline{u}$$

con

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

$$B \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

Il problema della stabilizzazione con retroazione lineare dello stato si può porre come segue:

Trovare, se esiste, una legge di controllo del tipo $u = Kx + r$ con $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$, tale che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile.

Si noti che la linearità e la staticità del controllore rende molto semplice la sua implementazione.

Il sistema a ciclo chiuso potrà essere scritto nella forma: $\dot{x} = (A + BK)x + Br$

Dalla teoria sulla stabilità dei sistemi LTI si ha che il sistema a ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile se e solo se esiste una matrice $P > 0$ tale che risulti valida la disequaglianza di Lyapunov:

$$(A + BK)P + P(A + BK)^T < 0$$

Effettuando un cambio di variabile $L = KP$, s'ottiene un'espressione in cui le variabili di ottimizzazione non sono moltiplicate fra di loro.

Pertanto la precedente può essere riscritta come

$$AP + BL + PA^T + L^T B^T < 0$$

Quindi il problema della stabilizzazione può essere riformulato come segue:

Trovare $P > 0$, $L > 0$ tali che la LMI precedente sia soddisfatta.

Se il problema ammette una soluzione ammissibile allora

$$K = LP^{-1}$$

In genere, la semplice stabilizzazione del sistema a ciclo chiuso non è l'unico obiettivo che si prefigge ad un sistema di controllo con retroazione di stato.

In particolare per il sistema di controllo a ciclo chiuso oltre alla asintotica stabilità deve garantire i seguenti requisiti:

- Precisione a regime
- Comportamento in transitorio

Per quanto riguarda le specifiche riguardanti il comportamento a regime occorre introdurre un certo numero di poli nell'origine.



Per quanto riguarda il comportamento in transitorio, esso può essere modificato se si riescono ad assegnare poli e zeri del sistema a ciclo chiuso.

Ricordando, dalla espressione esplicita dello stato e dell'uscita, che la posizione dei poli determina l'andamento dei modi di evoluzione del sistema, mentre la locazione degli zeri rispetto ai poli influenza il coefficiente di ampiezza di ciascun modo di evoluzione possiamo affermare che:

- Per sistemi MIMO l'assegnamento di POLI e ZERI può essere fatto con tecniche di *assegnamento dell'autostruttura*
- Non è facile tradurre le specifiche sul transitorio in specifiche su posizioni di poli e zeri
- Non esistono metodologie di carattere generale che permettono di assegnare in modo arbitrario poli e zeri del sistema

Quindi possiamo dire che per sistemi MIMO, con tecniche di *allocazione dei poli*, che di fatto si riconducono a risoluzione di LMI con opportuni vincoli, possiamo imporre vincoli di carattere generale sulla posizione dei poli e quindi sulla velocità di risposta del sistema

§ 2 – Allocazione dei poli per il sistema verticale

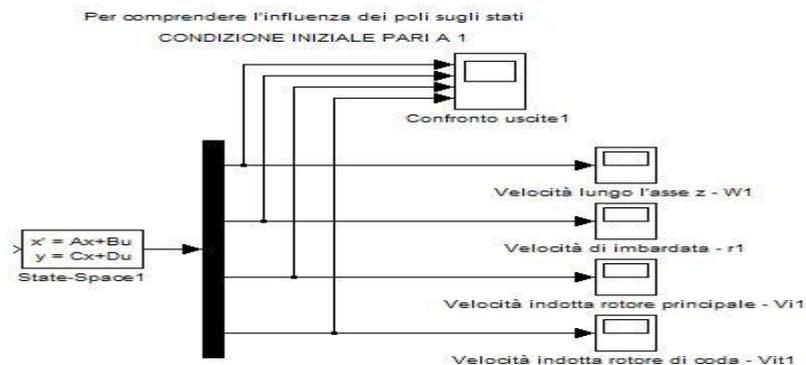
Per affrontare il problema dell'allocazione dei poli per il modello verticale sono stati valutati dapprima i modi di evoluzioni naturali del sistema.

Ovvero, è stata fatta una simulazione con il sistema in evoluzione libera a partire da uno stato iniziale

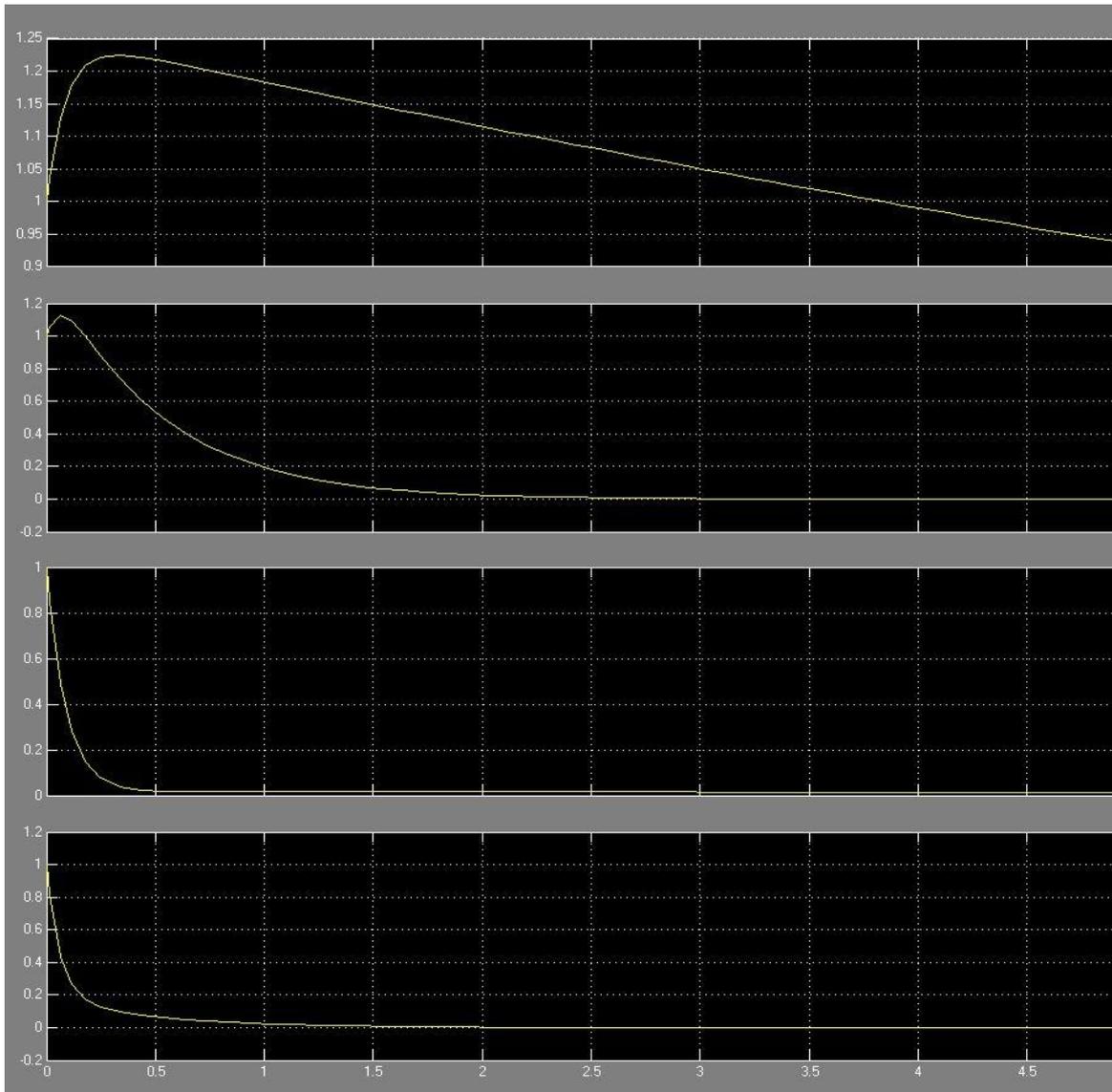
$$\underline{x}_{over} = \begin{pmatrix} \omega = 1 \text{ m/s} \\ r = 1 \text{ rad/s} \\ V_l = 1 \text{ m/s} \\ V_{IT} = 1 \text{ m/s} \end{pmatrix}$$

e sono state valutati i tempi di risposta del sistema sulle varie uscite.

A tale scopo si fa riferimento ad un file Simulink *Allocazione_Poli_Ver.mdl*



Le evoluzioni dello stato del sistema, a partire dalla condizione iniziale esposta è la seguente:



Il problema dell'allocazione dei poli per il modello verticale è stato risolto con l'ausilio delle LMI, piazzando i poli in determinate zone del piano complesso in particolare sono state considerate le seguenti zone:

1. L'intersezione di una striscia verticale con margini $[-6, -1.5]$, con un cono centrato nell'origine e ampiezza 20° (File Matlab: AllocazionePoli_verR.m)

In tal caso il controllore K determinato risulta avere la seguente matrice dei guadagni

$$K_{ver} = \begin{bmatrix} -0.0119 & -0.0000 & -0.0276 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0026 & -0.0000 & 0.0259 \end{bmatrix}$$

2. Un cerchio centrato in -2 e raggio 0.25 (File Matlab: AllocazionePoli_ver.m)

In tal caso il controllore K determinato risulta avere la seguente matrice dei guadagni

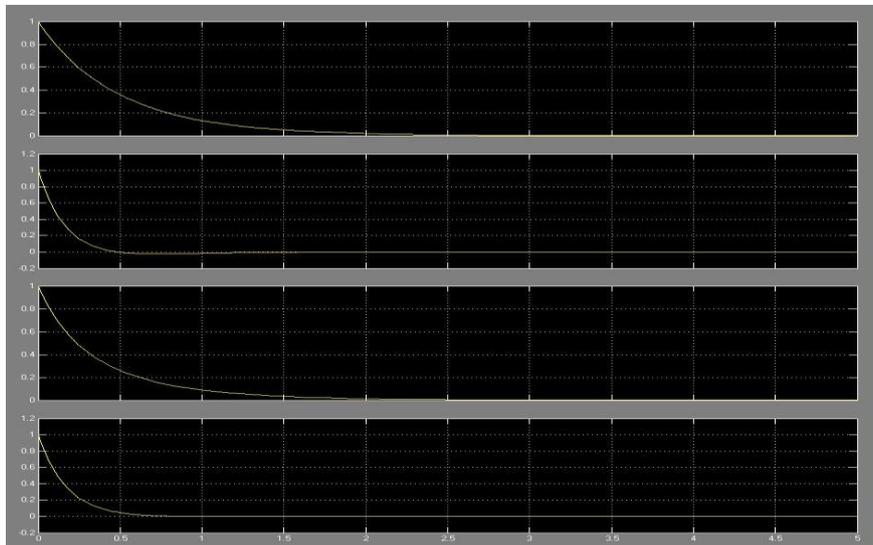


$K_{ver} =$

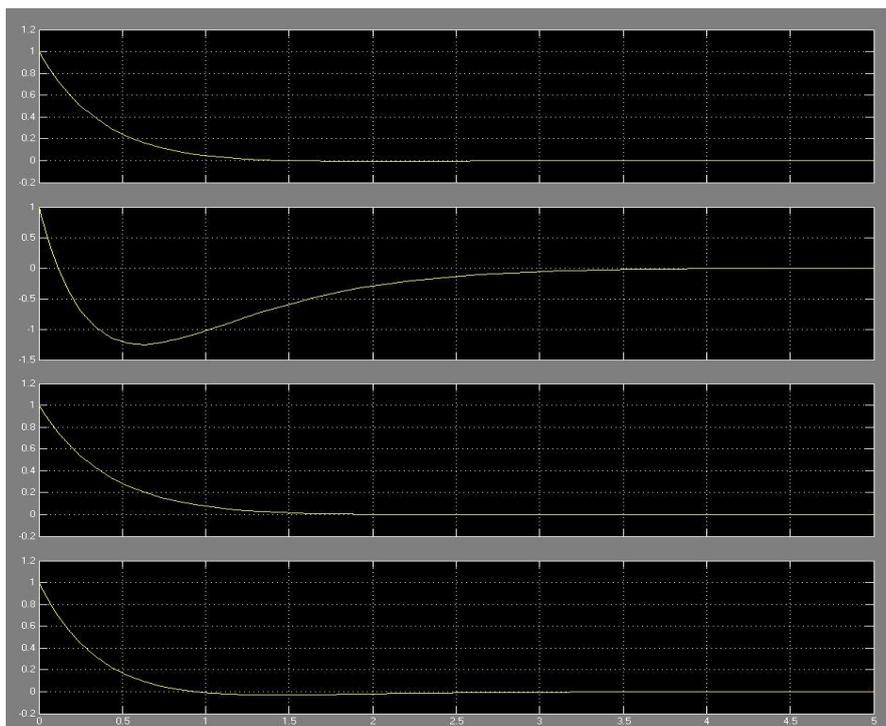
-0.0039	-0.0000	-0.0396	0.0000
-0.0000	-0.0045	0.0000	0.0358

I risultati ottenuti sono i seguenti

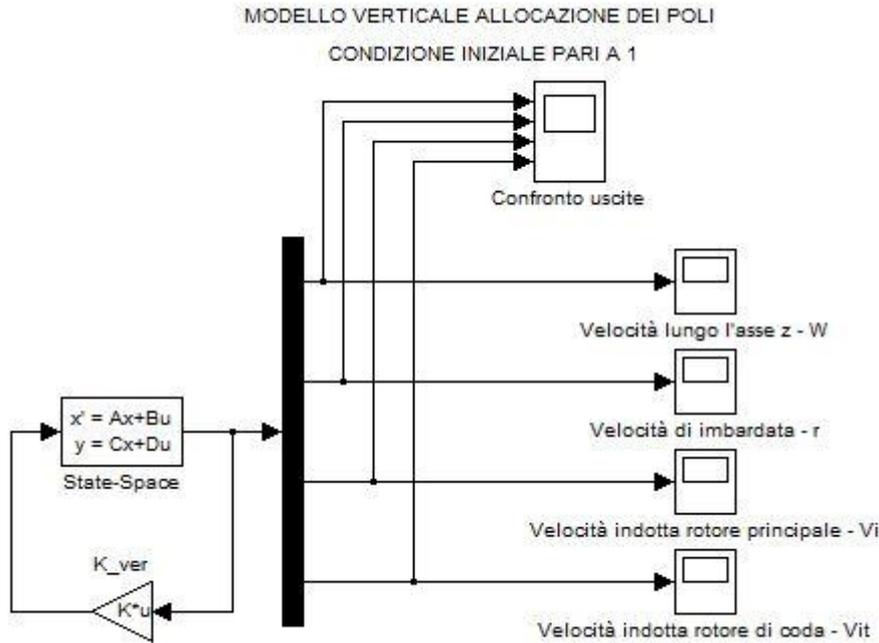
Caso 1



Caso 2



Lo schema in retroazione di stato utilizzato per avere tali risultati è presente nel file Simulink `Allocazione_Poli_Ver.mdl` ed è il seguente:



Anche se apparentemente il controllo sembra buono, questa tecnica non consente di moderare la variabile di controllo, la quale raggiunge valori inaccettabili.

§ 3 – *Allocazione dei poli per il sistema orizzontale*

Il problema dell'allocazione dei poli per il modello orizzontale è stata risolto con l'ausilio delle LMI, piazzando i poli nella seguente zona:

1. L'intersezione di una striscia verticale con margini $[-1000, -1.4]$, con un cono centrato nell'origine e ampiezza 40.01° (File Matlab: *AllocazionePoli_verR.m*)

In tal caso il controllore K_{hor} determinato risulta avere la seguente matrice dei guadagni

$$K_{hor} = \begin{bmatrix} -27.5384 & 3.4672 & 4.0627 & 0.5100 & -3.8957 & 0.4958 & -1.7849 & -0.0488 \\ -8.7423 & -10.7367 & 1.2909 & -1.5296 & -1.2539 & -1.5062 & -0.0482 & -1.6485 \end{bmatrix}$$

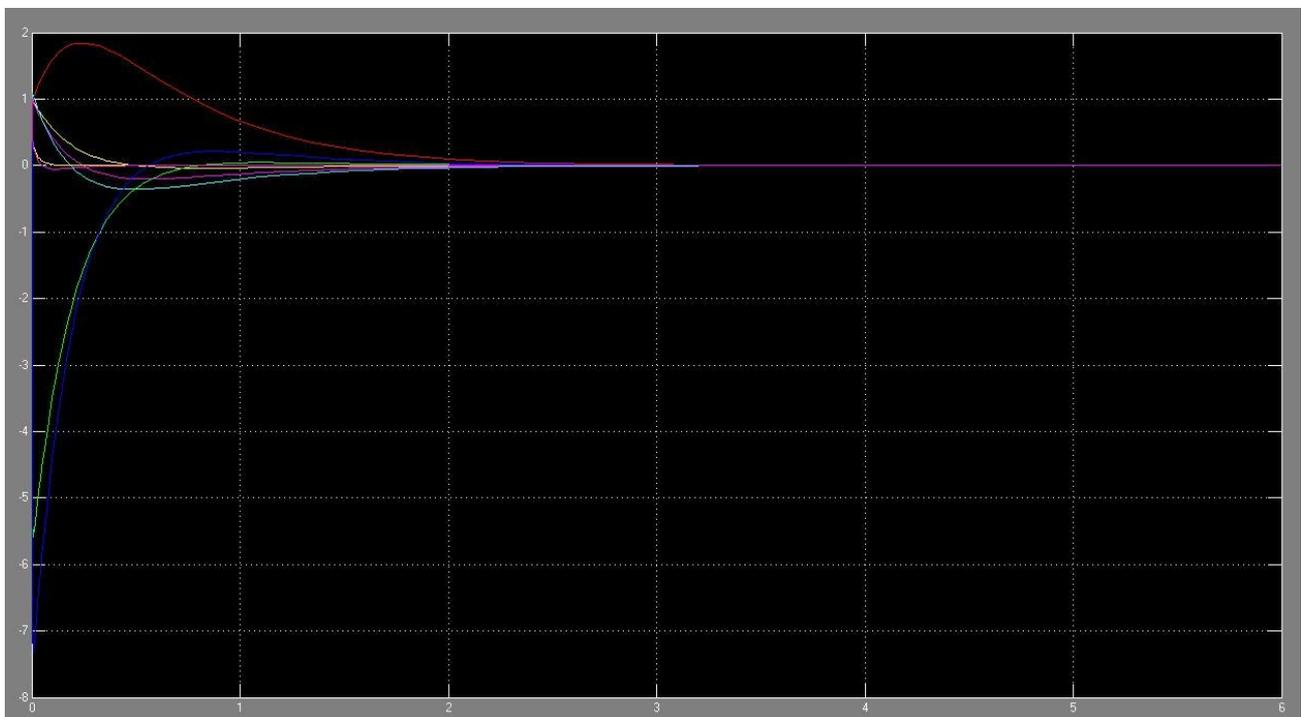
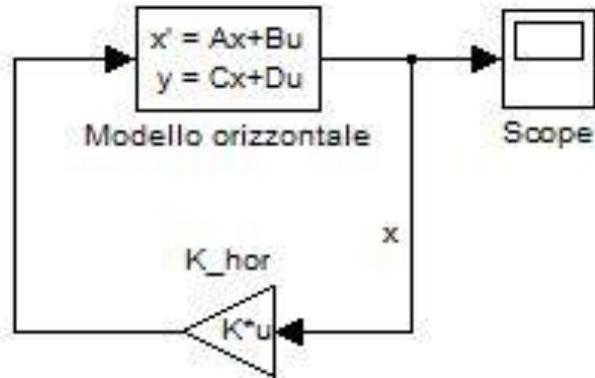
Per visionare come è stata determinata la matrice K_{hor} far riferimento al file Matlab *AllocazionePoli_hor.m*

Per valutare le prestazioni ottenute è stato realizzato uno schema Simulink (File: *Allocazione_Poli_hor.mdl*)



STABILIZZAZIONE DEL MODELLO ORIZZONTALE

evoluzione libera a partire da stato iniziale pari a 1



Come possiamo notare il controllore in retroazione di stato progettato è capace di stabilizzare il sistema e di avere un tempo di assestamento massimo di 3 secondi.

Ove per tempo di assestamento massimo si intende il tempo di assestamento del modo di evoluzione più lento. Ancora una volta, però, si deve dire che le variabili di controllo non sono moderate.



Capitolo VII – Controllo ottimo LQR su orizzonte finito

§ 1 – Controllo LQR su orizzonte finito

In generale il problema del controllo LQR su orizzonte finito è un problema di ottimizzazione del tipo:

$$\min_{u_{[t_0, T]}} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) M x(T)$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{con } x(t_0) \text{ assegnato}$$

Dove Q ed M sono opportune matrici di peso semidefinite positive e simmetriche, mentre R è una matrice di peso definita positiva e simmetrica.

È possibile dimostrare che l'ingresso di controllo $u(\cdot)$ che minimizza il funzionale, e quindi risolve il problema posto è una retroazione lineare dello stato tempo variante del tipo:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P^*(t) x$$

Dalla quale è chiaro il motivo per cui R deve essere definita positiva. Il valore ottimo dell'ingresso (tempo variante) dipende da una funzione a valori matriciali $P(t)$, il cui valore ottimo, è possibile dimostrare, è espresso, in forma analitica chiusa dalla relazione:

$$P^*(t) = \{U_{21} + U_{22} e^{-\Lambda_u(T-t)} G e^{-\Lambda_s(T-t)}\} \{U_{11} + U_{12} e^{-\Lambda_u(T-t)} G e^{-\Lambda_s(T-t)}\}$$

Con $G = -\{U_{22} - M U_{12}\}^{-1} \{U_{21} - M U_{11}\}$

Nell'espressione di $P^*(t)$ le matrici $U_{11}, U_{12}, U_{21}, U_{22}$ raccolte come:

$$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix}$$

sono gli auto vettori della matrice Hamiltoniana relativi, rispettivamente, alla forma di Jordan Λ_s della matrice H diagonalizzata relativamente agli autovalori stabili di H, ed alla forma di Jordan Λ_u della matrice H diagonalizzata relativamente agli autovalori instabili di H.

La trasformazione di similitudine che porta H nella forma diagonale a blocchi con Λ_s ed Λ_u sulla diagonale principale è data proprio da:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$



Quindi:

$$\hat{H} = U^{-1}HU = \begin{pmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{pmatrix} .$$

In pratica per risolvere il problema di controllo LQR su orizzonte finito, si è ricorso al seguente algoritmo eseguito al calcolatore:

✚ Si scelgono (ponendole magari identità in prima istanza) le matrici di peso Q,R ed M;

✚ Si costruisce la matrice Hamiltoniana definita come:

$$H = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}$$

✚ Si calcolano autovalori ed auto vettori dell'Hamiltoniana.

✚ Si estraggono gli auto vettori relativi alla parte stabile U_s e quelli relativi alla parte instabile U_u ; e si scrive U.

✚ Si calcola \hat{H} attraverso la trasformazione di similitudine.

✚ Si estraggono da \hat{H} i blocchi Λ_s e Λ_u .

✚ Si calcola G.

✚ Si costruisce una function che calcola $P^*(t)$ e restituisce il guadagno tempo variante:

$$K(t) = -R^{-1}B^T P^*(t).$$

✚ Si simula il sistema retro azionato (con una perturbazione dello stato) e si aggiustano i pesi Q, R ed M nel listato, facendo ricalcolare tutti i parametri al calcolatore, per ottenere prestazioni migliori.

§ 2 – Controllo ottimo LQR su orizzonte finito per il modello verticale

Il problema del controllo ottimo LQR nel caso del Modello Verticale del piccolo elicottero si specifica come segue:

$$\min_{u_{(t_0,T)}} \int_{t_0}^T (x_{ver}^T Q x_{ver} + u_{ver}^T R u_{ver}) dt + x_{ver}^T(T) M x_{ver}(T)$$

s.a

$$\dot{x}_{ver} = Ax_{ver} + Bu_{ver} \text{ con } x_{ver}(t_0) \text{ assegnato}$$

Si rammenti che lo stato di questo sistema è rappresentato da:

$$x_{ver} = \begin{pmatrix} w \\ r \\ V_I \\ V_{IT} \end{pmatrix}$$

Le prime due variabili sono la velocità verticale e quella di imbardata, le altre due sono velocità indotte.



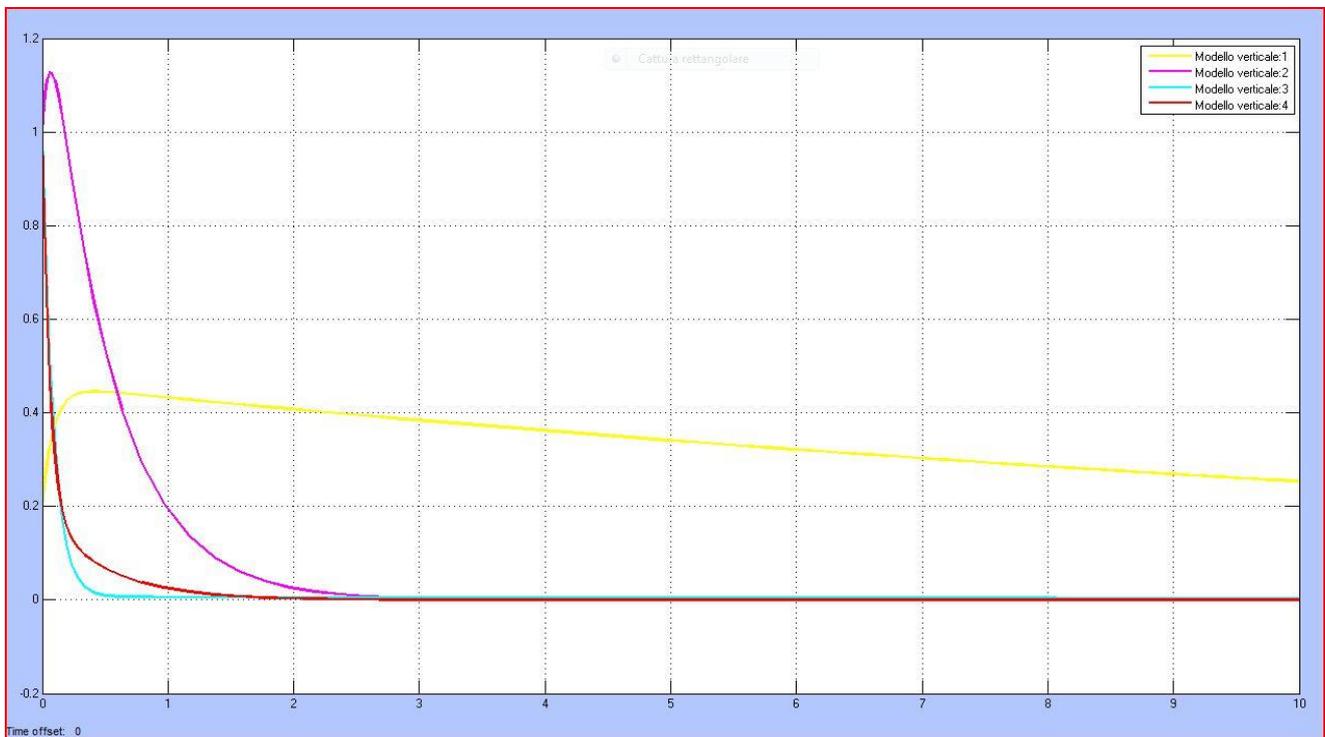
Si è visto, nell'analisi del sistema, che le ultime due variabili di stato sono influenzate da poli molto veloci e smorzati, che quindi rendono l'evoluzione di tali stati a fronte di perturbazioni convergenti e rapide. Non vi è dunque la necessità di moderare tali variabili.

Al contrario, a partire da uno stato perturbato rispetto all'equilibrio, che, verosimilmente, potrebbe assumere i seguenti valori:

$$x_{ver0} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ossia, rispetto all'hovering, immaginiamo una perturbazione dello stato di 0.2 m/s per la velocità verticale, 1 m/s per la velocità di imbardata, e di altrettanti m/s per le velocità indotte.

Il sistema non controllato, a fronte di questo disturbo mostra il seguente andamento per le variabili di stato:



Si vede che la velocità di imbardata ha un andamento che, sebbene è convergente (il sistema è asintoticamente stabile) risulta caratterizzato da un modo di evoluzione molto lento che deve essere smorzato. La velocità di imbardata (linea viola) mostra invece una sovra elongazione.

Dunque si procede con il controllo ottimo LQR su orizzonte finito, seguendo l'algoritmo definito al paragrafo 1.



Tale algoritmo è stato implementato sul file .m seguente.

```

%% CONTROLLO LQR SU ORIZZONTE FINITO: MODELLO VERTICALE

clear all
close all
clc

global T U11 U12 U21 U22 Q R M Lambda_u Lambda_s G_ver B_ver Ptver

Modello_verticale

T=10;                %%orizzonte temporale finito

%Matrici di peso

q1=100;              %%peso w velocità ascesa
q2=8;                %%peso r velocità imbardata
q3=1;                %%peso VI
q4=1;                %%peso VIT

r1=1000;             %%peso AM
r2=1000;             %%peso AT

m1=1e-10;           %%pesi terminali
m2=1e-10;
m3=1e-10;
m4=1e-10;

Q=diag([q1 q2 q3 q4],0);
R=diag([r1 r2],0);
M=diag([m1 m1 m3 m4],0);

%Hamiltoniana

H=[A_ver -B_ver*inv(R)*B_ver'
  -Q      -A_ver'];

%Calcolo autovalori/autovettori della matrice di Hamilton

[V A]=eig(H);        %%V contiene gli autovettori disposti per colonne
                    %%corrispondenti agli autovalori sulla diagonale di A

%Selezione degli indici

s=[];                %%si prealloca il vettore degli indici stabili
u=[];                %%si prealloca il vettore degli indici instabili

for i=1:2*size(A_ver,1)

    if real(A(i,i))<0

        s=[s i];

    end

```



```

if real(A(i,i))>0
    u=[u i];
end

if real(A(i,i))==0
    error('Attenzione l"Hamiltoniana ha poli sull"asse immaginario');
end

end

Us=[];
for i=1:length(s)
    Us=[Us V(:,s(i))]; %%matrice degli autovettori associati alla parte stabile
end

Uu=[];
for i=1:length(u)
    Uu=[Uu V(:,u(i))]; %%matrice degli autovettori associati alla parte instabile
end

U=[Us Uu];
disp('Hamiltoniana in forma di Jordan diagonale a blocchi');
H_cappuccetto=inv(U)*H*U
Lambda_s=H_cappuccetto(1:4,1:4);
Lambda_u=H_cappuccetto(5:8,5:8);

U11=Us(1:4,:);
U21=Us(5:8,:);
U12=Uu(1:4,:);
U22=Uu(5:8,:);

G_ver=-inv(U22 - M*U12)*(U21-M*U11);

```

La scelta dei pesi (concettualmente giustificata in precedenza) è stata affinata col metodo descritto nel paragrafo 1.

Chiaramente, per poter implementare il controllore tempo variante il guadagno $K(t)$ deve essere calcolato ad ogni istante di tempo. Ciò è stato fatto con la seguente Matlab function.



```

%% Function K(t)_ver

% Calcola il guadagno del controllore LQR su orizzonte finito per il modello
% verticale. I parametri possono essere modificati nel file LQRtempofinitover.m.

function v=Kt_ver(in)

global T U11 U12 U21 U22 Lambda_u Lambda_s G_ver B_ver Ptver R

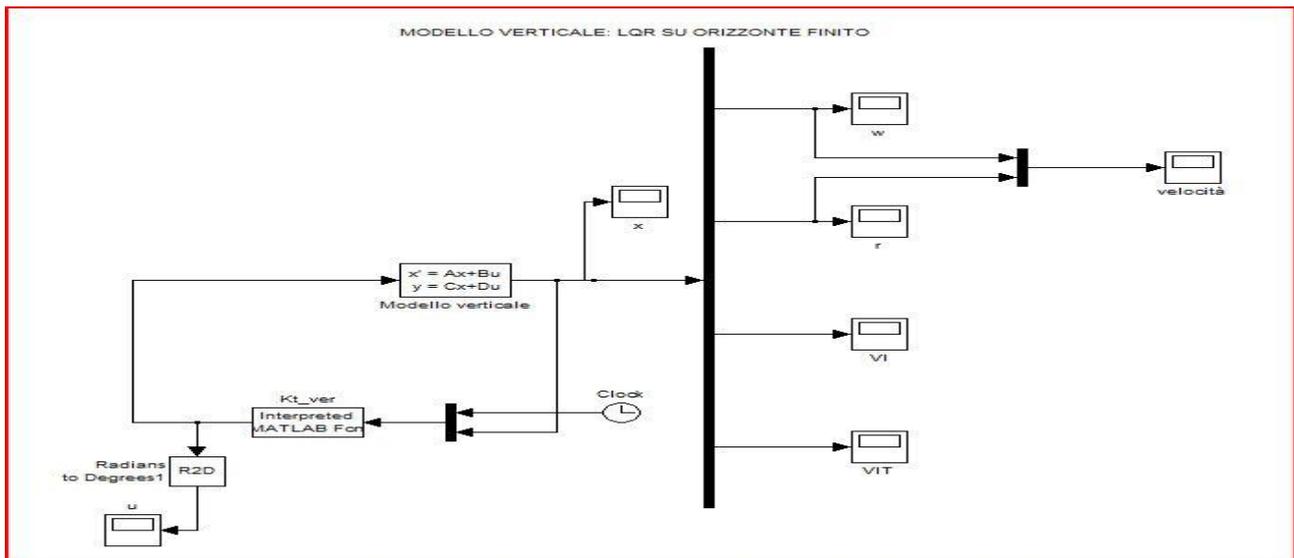
t=in(1);
x1=in(2);
x2=in(3);
x3=in(4);
x4=in(5);

Ptver = (U21 + U22*expm(-(Lambda_u)*(T-t))*G_ver*expm(Lambda_s.*(T-t)))*(U11 + U12*expm(-
Lambda_u.*(T-t))*G_ver*expm(Lambda_s.*(T-t)));

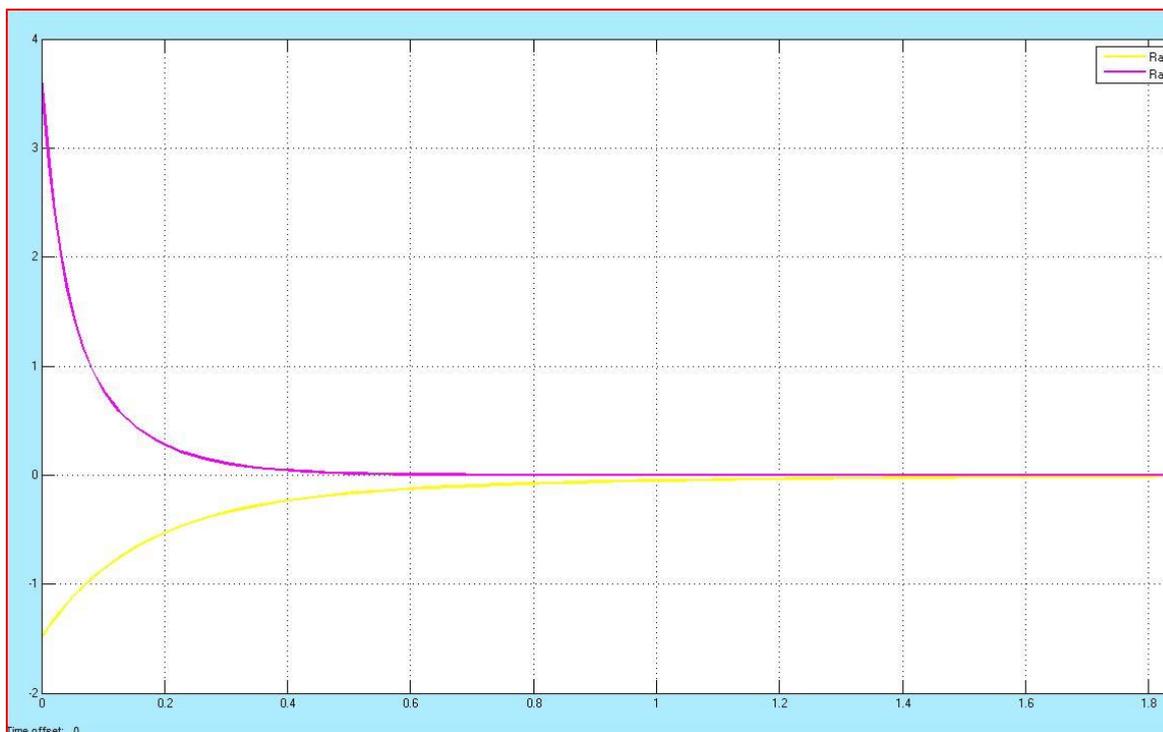
v =-inv(R)*(B_ver')*Ptver*[x1;x2;x3;x4];

return
    
```

Simulando sull'orizzonte temporale scelta (10 secondi, tempo sufficiente per annullare completamente la perturbazione dello stato del sistema), con il seguente schema simulink:

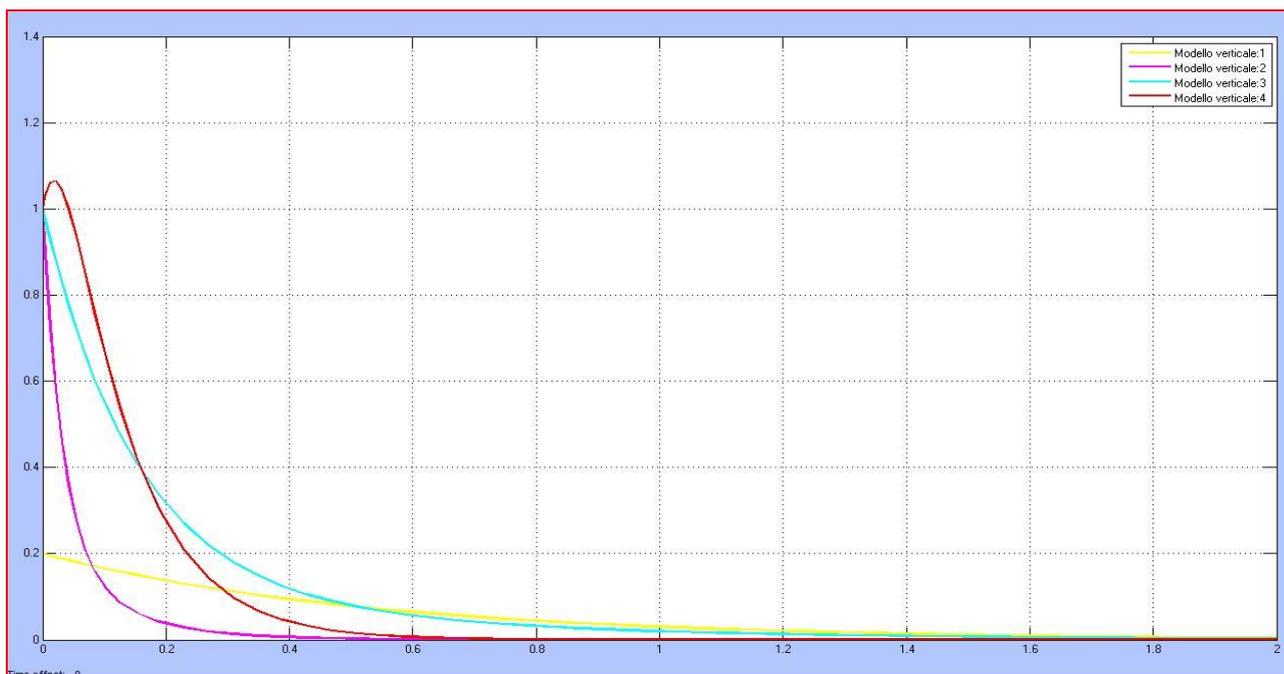


si ottengono i seguenti andamenti per l'ingresso di controllo:



Si vede che questi (in gradi) non superano i 3.5 gradi, valore che effettivamente può essere realizzato per il beccheggio collettivo delle pale del rotore principale e quello di coda.

Le variabili di stato mostrano il seguente comportamento:



Si vede che l'andamento delle velocità w ed r è molto buono (linee gialla e viola rispettivamente). La piccola sovra elongazione (del 5% circa) è presente sull'andamento della velocità indotta dell'aria nel rotore di coda V_{IT} per la quale non si ha interesse ad ottenere un comportamento migliore.



§ 3 – Controllo ottimo LQR su orizzonte finito per il modello orizzontale

Il problema del controllo ottimo LQR nel caso del Modello Orizzontale del piccolo elicottero si specifica come segue:

$$\min_{u_{[t_0, T]}} \int_{t_0}^T (x_{hor}^T Q x_{hor} + u_{hor}^T R u_{hor}) dt + x_{hor}^T(T) M x_{hor}(T)$$

s.a

$$\dot{x}_{hor} = A x_{hor} + B u_{hor} \text{ con } x_{hor}(t_0) \text{ assegnato}$$

Si rammenti che lo stato di questo sistema è rappresentato da:

$$x_{hor} = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \\ u \\ v \\ q \\ p \\ a_{1p} \\ b_{1p} \end{pmatrix}$$

Le prime due variabili sono la gli angoli di beccheggio e rollio, la terza e la quarta sono le velocità lineari di avanzamento e laterale, seguono le velocità di beccheggio e rollio e le ultime due variabili sono le ampiezze delle componenti armoniche che descrivono la posizione angolare delle aste della barra stabilizzatrice.

Si è visto, nell'analisi del sistema orizzontale, che le ultime due variabili di stato sono influenzate da poli molto veloci e smorzati, che quindi rendono l'evoluzione di tali stati, a fronte di perturbazioni, convergenti e rapide. Non vi è dunque la necessità di moderare tali variabili.

Al contrario, a partire da uno stato perturbato rispetto all'equilibrio, che, verosimilmente, potrebbe assumere i seguenti valori:

$$x_{hor0} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

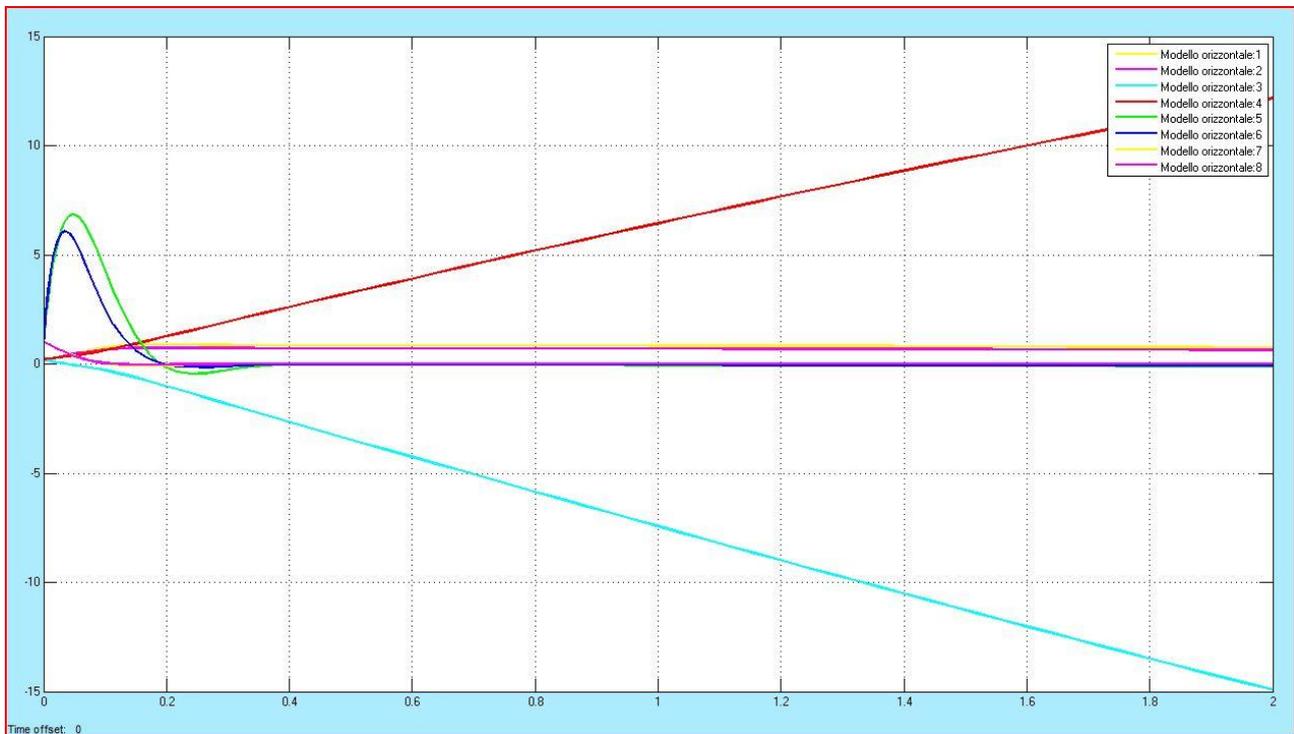
Ossia, rispetto all'equilibrio, immaginiamo una perturbazione dello stato di:

- 0.2 rad (11.5 gradi) per il beccheggio ed il rollio;
- 0.2 m/s per le velocità lineari sul piano orizzontale;



- 1 m/s per le velocità di beccheggio e di rollio;
- 1 rad per gli angoli della barra stabilizzatrice

Il sistema non controllato, a fronte di questo disturbo mostra il seguente andamento per le variabili di stato:



In primo luogo (come già visto in sede di analisi del sistema) si noti che il sistema è instabile, infatti le variabili di stato x_3 ed x_4 hanno un andamento sempre crescente nei 2 secondi riportati in figura, e su di un periodo di tempo più lungo si nota che esse oscillano con ampiezza sempre crescente. Il rollio ed il beccheggio (x_1 ed x_2) invece tendono ad assumere un valore costante non divergente ma comunque non vanno asintoticamente a zero. Le velocità di beccheggio e rollio (in verde e in blu in figura) hanno un andamento convergente ma mostrano un'ampia sovra elongazione (500%), infine le ultime due variabili di stato hanno andamenti asintotici a zero in brevissimo tempo; sono queste variabili che non interessa pesare nel funzionale di ottimizzazione.

Come già visto per il modello verticale, mediante un file .m si segue l'algoritmo definito al principio, ritornando più volte, a valle della simulazione, a modificare i pesi per ottenere prestazioni migliori.

```
%% CONTROLLO LQR SU ORIZZONTE FINITO: MODELLO ORIZZONTALE

clear all
close all
clc

global T U11 U12 U21 U22 Q R
global M Lambda_u Lambda_s G_hor B_hor
```



Modello_orizzontale

```

T=1000; %%orizzonte temporale finito

%Matrici di peso

q1=1000;      %%peso th beccheggio
q2=1000;      %%peso fi rollio
q3=1e18;      %%peso u velocità avanzamento
q4=1e18;      %%peso v velocità laterale
q5=1000;      %%peso q velocità beccheggio
q6=1000;      %%peso p velocità rollio
q7=1;         %%peso a1p angolo barra
q8=1;         %%peso b1p angolo barra

r1=0.0001;    %%peso B1s angolo piatto oscillante
r2=0.0001;    %%peso A1s angolo piatto oscillante

m1=10;        %%pesi terminali
m2=10;
m3=1e10;
m4=1e10;
m5=10;
m6=10;
m7=10;
m8=10;

Q=diag([q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8],0);
R=diag([r1 r2],0);
M=diag([m1 m1 m3 m4 m5 m6 m7 m8],0);

%Hamiltoniana

H=[A_hor -B_hor*inv(R)*B_hor'
  -Q      -A_hor'];

%Calcolo autovalori/autovettori della matrice di Hamilton

[V A]=eig(H);    %%V contiene gli autovettori disposti per colonne
                %%corrispondenti agli autovalori sulla diagonale di A

%Selezione degli indici
s=[];           %si prealloca il vettore degli indici stabili
u=[];           %si prealloca il vettore degli indici instabili
for i=1:2*size(A_hor,1)
    if real(A(i,i))<0
        s=[s i];
    end
    if real(A(i,i))>0
        u=[u i];
    end
    if real(A(i,i))==0
        error('Attenzione l"Hamiltoniana ha poli sull"asse immaginario');
    end
end
    
```



end

```

Us=[];

for i=1:length(s)
Us=[Us V(:,s(i))]; %%matrice degli autovettori associati alla parte stabile
end

Uu=[];

for i=1:length(u)
Uu=[Uu V(:,u(i))]; %%matrice degli autovettori associati alla parte instabile
end

U=[Us Uu];

disp('Hamiltoniana in forma di Jordan diagonale a blocchi');
H_cappuccetto=inv(U)*H*U

Lambda_s=zeros(8,8);
for i=1:8

Lambda_s(i,i)=H_cappuccetto(i,i);

end

Lambda_u=zeros(8,8);
for i=9:16

Lambda_u(i-8,i-8)=[H_cappuccetto(i,i)];

end

U11=Us(1:8,:);
U21=Us(9:16,:);
U12=Uu(1:8,:);
U22=Uu(9:16,:);

G_hor=-inv(U22 - M*U12)*(U21-M*U11);
    
```

Anche qui poter implementare il controllore tempo variante, il guadagno $K(t)$ deve essere calcolato ad ogni istante di tempo. Ciò è stato fatto con la seguente Matlab function.

```

%% Function K(t)_hor
%Calcola il guadagno del controllore LQR su orizzonte finito per il modello
%orizzontale.I parametri possono essere modificati nel file LQRtempofinitohor.m

function v=Kt_hor(in)

global T U11 U12 U21 U22 Lambda_u
global Lambda_s G_hor B_hor Pthor R
    
```



```

t=in(1);
x1=in(2);
x2=in(3);
x3=in(4);
x4=in(5);
x5=in(6);
x6=in(7);
x7=in(8);
x8=in(9);

Pthor = (U21 + U22*expm(-(Lambda_u).*(T-t))*G_hor*expm(Lambda_s.*(T-t)))*(U11 + U12*expm(-
Lambda_u.*(T-t))*G_hor*expm(Lambda_s.*(T-t)));

v =real(-inv(R)*(B_hor')*Pthor*[x1;x2;x3;x4;x5;x6;x7;x8]);

return
    
```

Si deve dire che, per il modello orizzontale, data la numerosità delle variabili di stato, ed il loro accoppiamento la scelta dei pesi risulta difficile. Il controllo a tempo finito, pur variando in vario modo con diversi ragionamenti questi pesi, non riesce a fornire buone prestazioni. Per questo motivo non si riportano le simulazioni fatte con uno schema del tutto simile a quello del caso verticale.



Capitolo VIII – Controllo ottimo LQR su orizzonte infinito

§ 1 – Controllo LQR su orizzonte infinito

In generale il problema del controllo LQR su orizzonte infinito è un problema di ottimizzazione del tipo:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{con } x(0) \text{ assegnato}$$

Dove Q è un' opportuna matrice di peso semidefinita positiva e simmetrica, mentre R è una matrice di peso definita positiva e simmetrica.

È possibile dimostrare che l'ingresso di controllo $u(\cdot)$ che minimizza il funzionale, e quindi risolve il problema posto è una retroazione lineare dello stato tempo variante del tipo:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P^* x$$

Dalla quale è chiaro il motivo per cui R deve essere definita positiva. Il valore ottimo dell'ingresso non è più una matrice tempo variante, bensì, facendo tendere T all'infinito nell'espressione valida nel caso LQR a tempo finito:

$$P^*(t) = \{U_{21} + U_{22} e^{-A_u(T-t)} G e^{-A_s(T-t)}\} \{U_{11} + U_{12} e^{-A_u(T-t)} G e^{-A_s(T-t)}\}^{-1}$$

Con $G = -\{U_{22} - M U_{12}\}^{-1} \{U_{21} - M U_{11}\}$, si ottiene che $P^*(t)$ tende al valore costante dato da:

$$P^*(t) = U_{21} U_{11}^{-1}$$

Ora poiché P non è altro che la soluzione dell'equazione matriciale di Riccati:

$$Q + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = -\dot{P}$$

Essendo P^* costante, l'equazione di Riccati diviene semplicemente algebrica (ARE):

$$Q + A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = 0$$

La soluzione di questa equazione è la matrice P^* cercata che consente il calcolo dell'ingresso di controllo ottimo $u^*(t)$.



In pratica per risolvere il problema di controllo LQR su orizzonte infinito mediante l'uso del calcolatore, il programma Matlab mette a disposizione il comando `lqr(A,B,Q,R)` che restituisce, oltre agli autovalori a ciclo chiuso del sistema retro azionato e la matrice P^* che risolve l'ARE, anche direttamente il guadagno del regolatore: $K=R^{-1}B^T P^*$.

§ 2 – Controllo LQR su orizzonte infinito per il modello verticale

Il problema del controllo LQR su orizzonte infinito per il modello verticale si scrive:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} (x_{ver}^T Q x_{ver} + u_{ver}^T R u_{ver}) dt$$

s.a

$$\dot{x} = A_{ver}x + B_{ver}u \quad \text{con } x_{ver}(0) \text{ assegnato}$$

Dove Q è un'opportuna matrice di peso semidefinita positiva e simmetrica, mentre R è una matrice di peso definita positiva e simmetrica.

Come preannunciato, la soluzione di questo problema, con la potenza degli elaboratori a nostra disposizione e del software di cui sono dotati è molto semplificata. Infatti, scelti i pesi (inizialmente posti come matrici identità, e poi via via affinati con successive simulazioni) si calcola il guadagno del regolatore che retroaziona lo stato con il seguente programma:

```
%% CONTROLLO OTTIMO SU ORIZZONTE INFINITO MODELLO VERTICALE

clear all
close all
clc

Modello_verticale

% Peso stato

q1=30;          %%modera x1=w (var. attesa 0.2 m/s)
q2=2.25;       %%modera x2=r (var. attesa 1 rad/s)
q3=0.50;       %%modera x3=VI (var. attesa 1 m/s)
q4=7.75;       %%modera x4=VIT (var. attesa 1 m/s)

Q_ver=diag([q1 q2 q3 q4],0);

% Peso ingresso

r1=4400;       %%modera AM (max 14 deg)
r2=50;         %%modera AT (max 14deg)

R_ver=diag([r1 r2],0);

[K_ver_inf P_ver_inf E_ver_inf]=lqr(eli_sys_ver,Q_ver,R_ver);

disp('Il guadagno K è:');
```



```
K_ver_inf
disp('La soluzione dell"ARE di Riccati è:');
P_ver_inf
disp('Gli autovalori del sistema ad anello chiuso sono:');
E_ver_inf
```

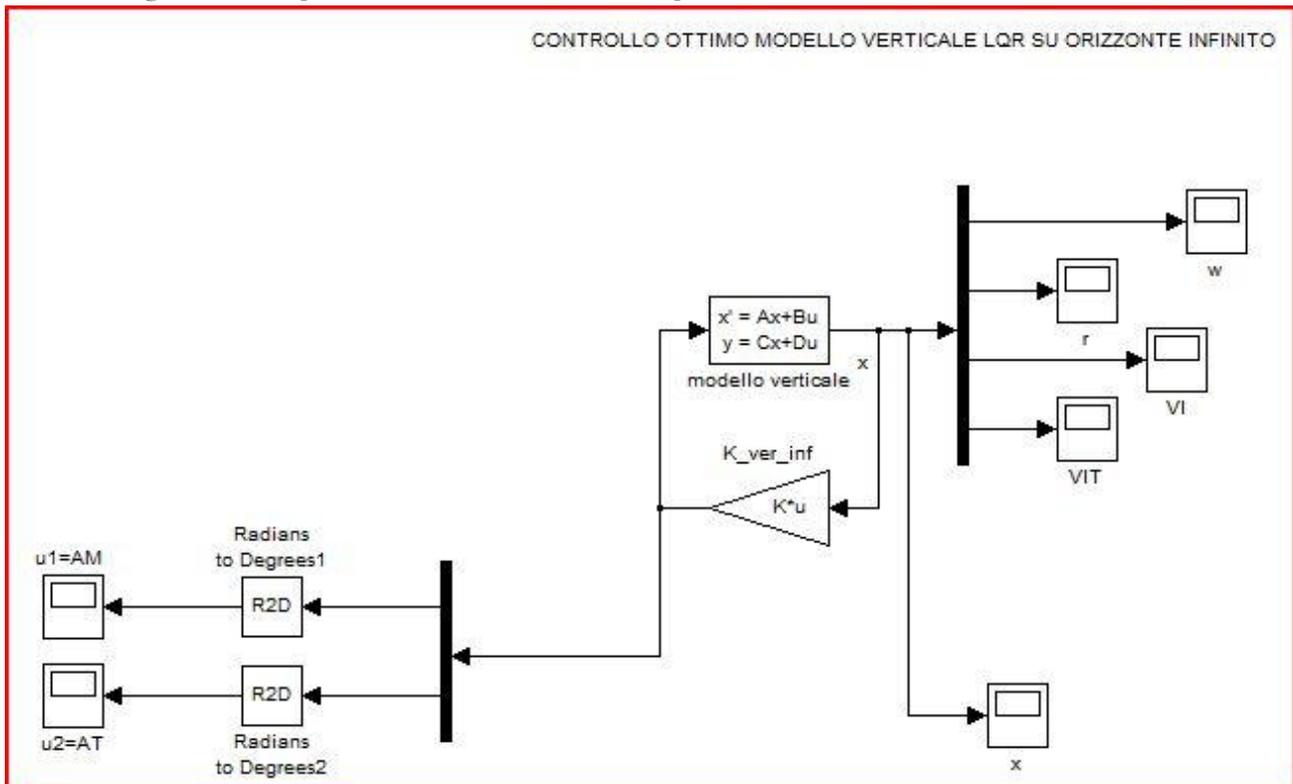
Il guadagno che si ottiene in questo modo è dato da:

```
K_ver_inf =
    0.0818    0.0000    0.0110    0.0000
    0.0002   -0.1988   -0.0000    0.1802
```

E gli autovalori del sistema a ciclo chiuso, con retroazione di stato vengono posti in:

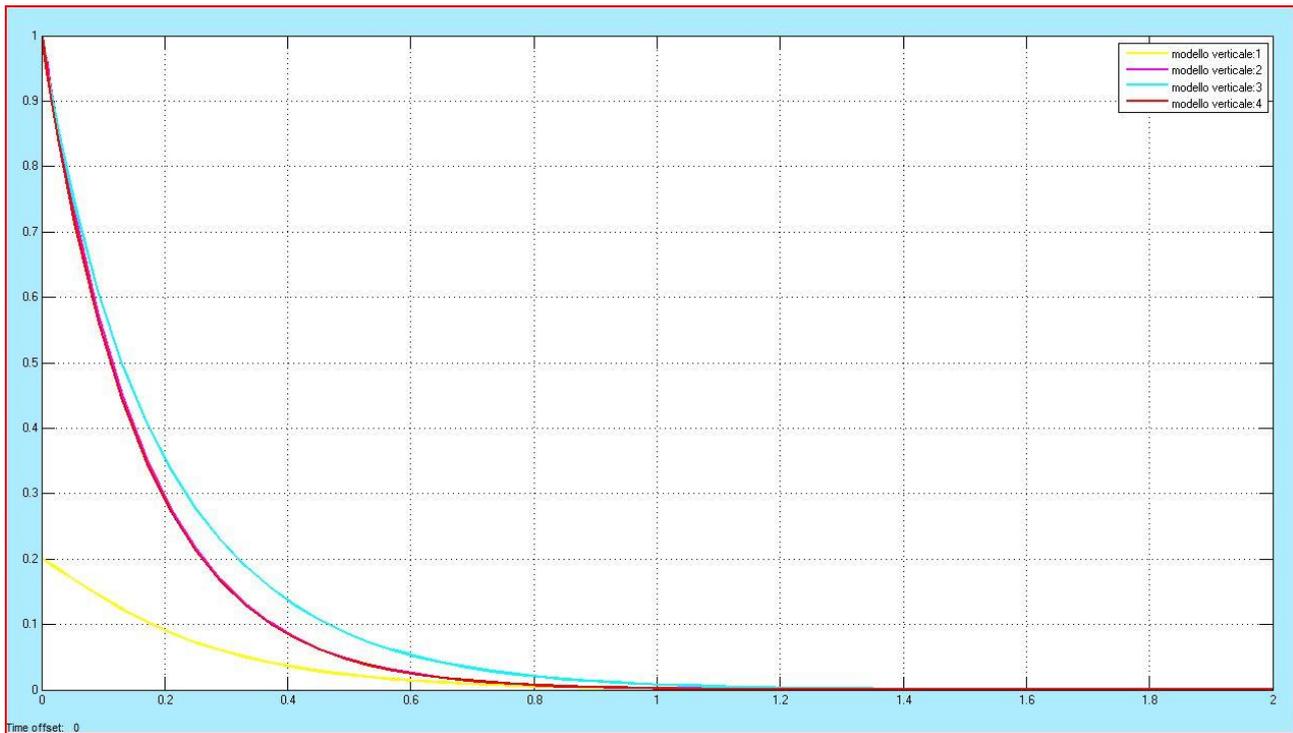
```
E_ver_inf =
-173.4534
-14.8073
-4.6953
-6.1445
```

Con il seguente semplice schema Simulink è possibile simulare il sistema retro azionato:



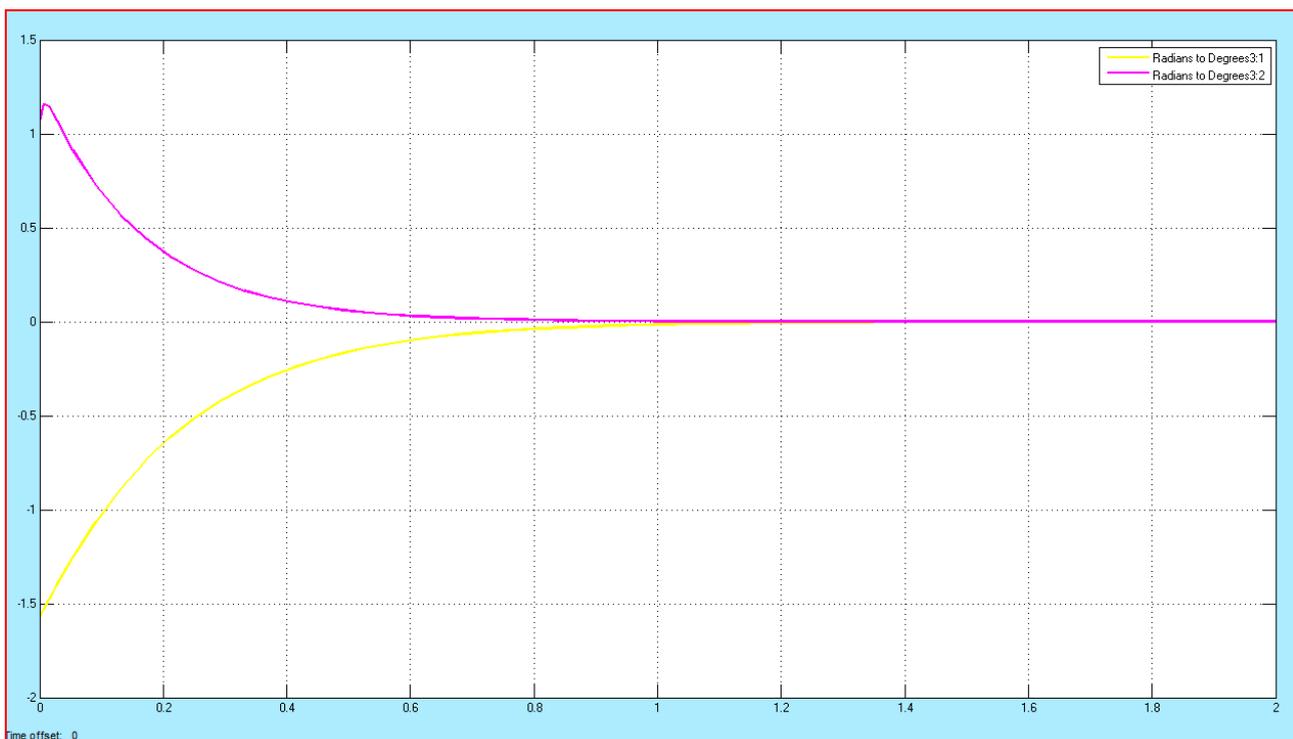


Effettuando una simulazione su un intervallo di 2 secondi, a partire dalle stesse condizioni iniziali considerate per il controllo LQR su orizzonte finito (si tratta di una perturbazione coerente con le condizioni di volo (hovering) del sistema), si ottengono le seguenti evoluzioni:



Gli andamenti raggiungono lo stato zero in circa 1 secondo, ed assenza di sovra elongazione.

Le variabili di controllo hanno il seguente andamento:



Esse risultano ancora più moderate rispetto al controllo su orizzonte finito visto in precedenza.



§ 3 – Controllo LQR su orizzonte infinito per il modello orizzontale

Il problema del controllo LQR su orizzonte infinito per il modello orizzontale si scrive:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} (x_{hor}^T Q x_{hor} + u_{hor}^T R u_{hor}) dt$$

s.a

$$\dot{x} = A_{hor} x_{hor} + B_{hor} u_{hor} \quad \text{con } x_{hor}(0) \text{ assegnato}$$

Dove Q è un'opportuna matrice di peso semidefinita positiva e simmetrica, mentre R è una matrice di peso definita positiva e simmetrica.

La soluzione è sempre quella definita al paragrafo 1. Pertanto è stato scritto il seguente listato:

```
%% CONTROLLO OTTIMO SU ORIZZONTE INFINITO MODELLO ORIZZONTALE
clear all
close all
clc

Modello_orizzontale

%%Peso stato
q1=0.15;          %%modera x1=th (beccheggio)(var. attesa 0.2 rad (11.5 deg))
q2=400;          %%modera x2=fi (rollio)(var. attesa 0.2 rad (11.5deg))
q3=10;           %%modera x3=u velocità avanzamento (var. attesa 0.2 m/s)
q4=30;           %%modera x4=v velocità laterale (var. attesa 0.2 m/s)
q5=0.2;          %%modera x5=q velocità di beccheggio (var. attesa 1 rad/s)
q6=2;            %%modera x6=p velocità di rollio (var. attesa 1 rad/s)
q7=1e-20;        %%modera x7=a1p angoli barra stabilizzatrice ( var attesa 1 rad) (57deg)
q8=1e-20;        %%modera x8=bip idem
Q_hor=diag([q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7 q8],0);

%%Peso ingresso
r1=10;  %%modera B1s
r2=10;  %%modera A1s

R_hor=diag([r1 r2],0);

[K_hor_inf P_hor_inf E_hor_inf]=lqr(eli_sys_hor,Q_hor,R_hor);

disp('Il guadagno K è:');
K_hor_inf
disp('La soluzione dell"ARE di Riccati è:');
P_hor_inf
disp('Gli autovalori del sistema ad anello chiuso è:');
E_hor_inf
```

In questo modo si ottiene il seguente valore per il guadagno



$K_{hor_inf} =$

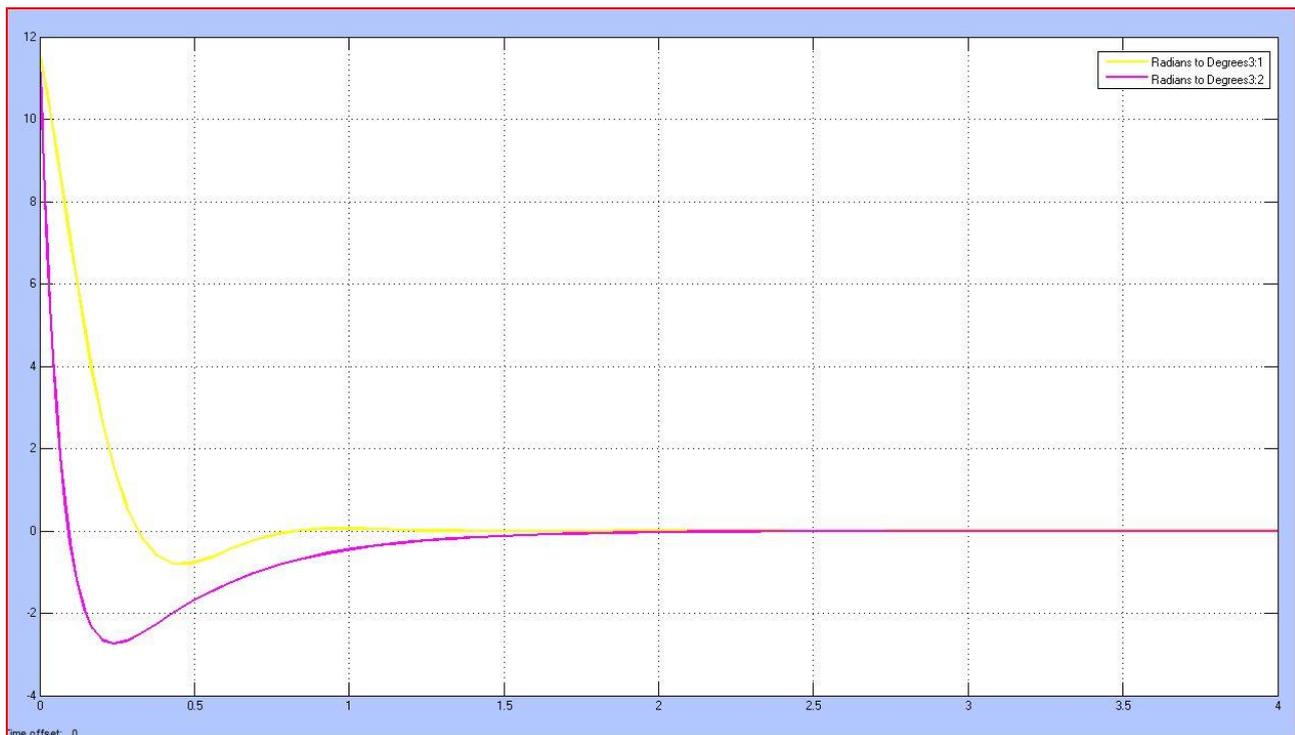
46.6016 -69.7345 -30.1518 -16.0629 3.6737 -4.1423 1.5362 -0.0105
 14.6301 221.0884 -9.5218 50.7428 1.1796 13.0270 -0.0154 1.5765

E gli autovalori del sistema retro azionato sono in:

$E_{hor_inf} =$

-5510.2
 -700.2
 -36.6
 -36.5
 -13.8
 -5.3 + 6.1i
 -5.3 - 6.1i
 -2.6

Utilizzando uno schema di simulazione in tutto simile a quello per il modello verticale (è quindi inutile riportarlo) si ottengono i seguenti andamenti per le variabili di stato in conseguenza alla stessa perturbazione (verosimile) utilizzata per il controllo LQR a tempo finito.



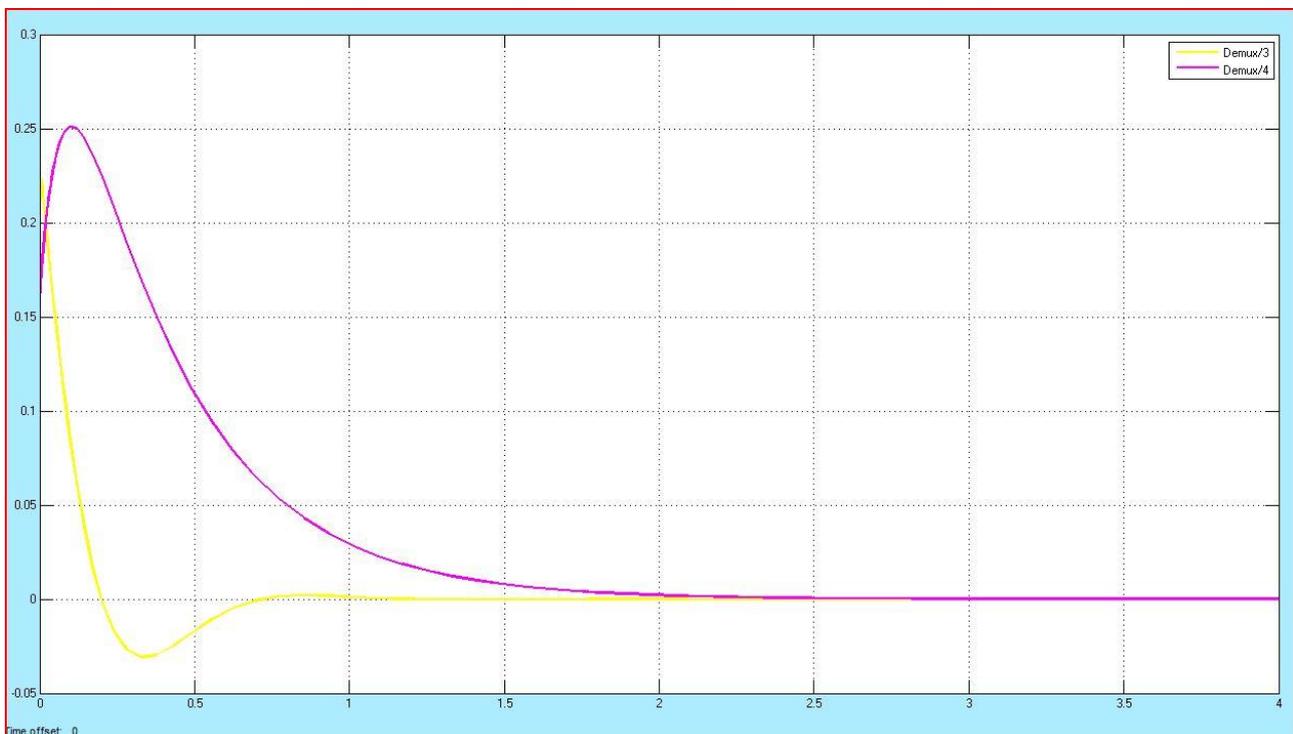
In giallo è il beccheggio, mentre in viola è il rollio (entrambi in gradi).



Si ricordi che questo sistema era instabile. Mediante la retroazione di stato il sistema è stato stabilizzato, ed inoltre si riescono ad ottenere anche andamenti delle variabili di stato, a fronte di una perturbazione dello stesso, abbastanza accettabili. Si deve evidenziare che la scelta dei pesi, se si vuole moderare il controllo ed avere buone prestazioni non è per niente semplice. Infatti facilmente il controllo raggiunge valori inaccettabili, oppure si ha un'azione di controllo sufficiente moderata, ma delle prestazioni eccessivamente degradate. Inoltre sussiste un forte accoppiamento tra le variabili di stato del sistema, per cui, moderando una variabile, può accadere che un'altra risulti poco moderata, il che provoca un degrado delle prestazioni, magari, anche di una terza variabile.

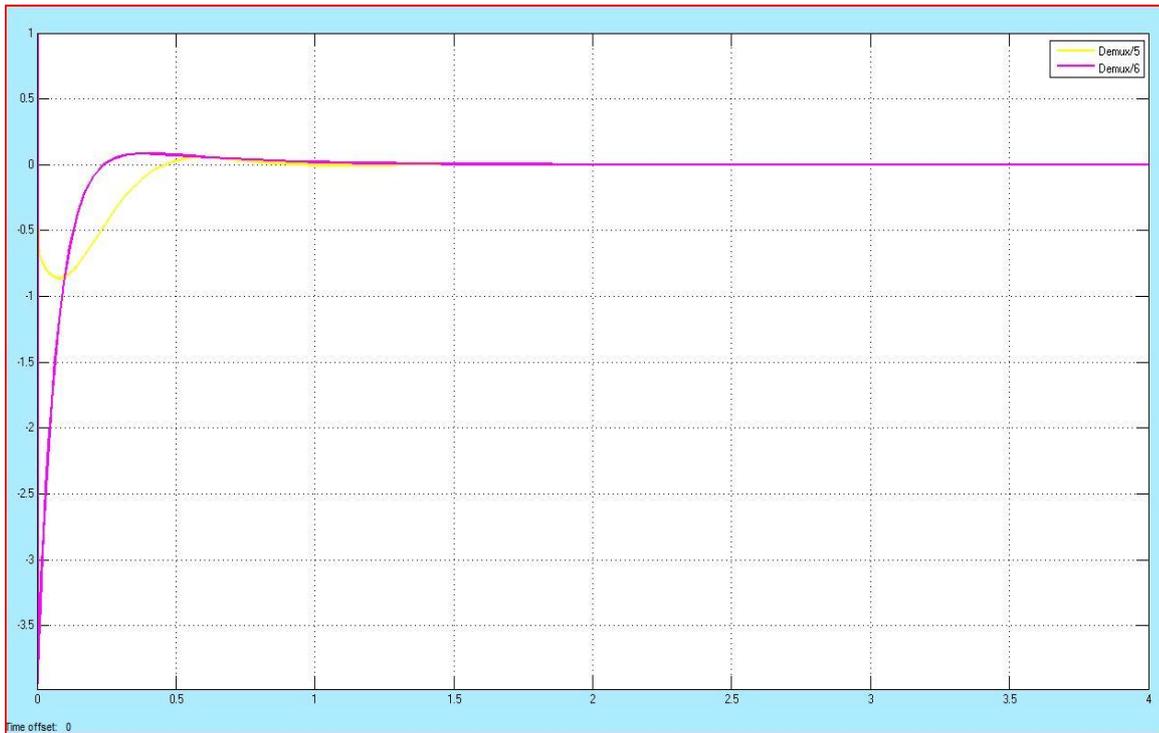
Per risolvere questo problema, per esempio, si potrebbe pensare di calcolare diversi valori per il guadagno K che consentono di avere prestazioni differenti sulle diverse variabili di stato. Per esempio, si potrebbe progettare un K_1 che fa ottenere un buon transitorio per il rollio ed il beccheggio (ma un transitorio non altrettanto buono per le variabili di velocità lineari) ed un K_2 che invece consente di ottenere buoni transitori per le velocità (meno buoni per le variazioni angolari); in una seconda fase si potrebbe pensare di realizzare un controllo di supervisione che schedula l'uno o l'altro guadagno a seconda che la manovra da effettuare preveda, prevalentemente, una variazione delle velocità lineari (guadagno K_2) oppure una variazione degli angoli di beccheggio/rollio (guadagno K_1).

Con l'unico K calcolato, le velocità lineari mostrano il seguente andamento:



In giallo è la velocità di avanzamento u , mentre in viola è la velocità laterale v .

Le velocità di rollio e di beccheggio hanno il seguente andamento:



In giallo è la velocità di beccheggio, mentre in viola è quella di rollio. Il loro andamento non deve preoccupare eccessivamente, poiché queste rappresentano nient'altro che le derivate del beccheggio e del rollio viste prima, il cui andamento è accettabile.

Si noti, già dal primo grafico, che il rollio si comporta peggio del beccheggio a fronte di una perturbazione analoga: ciò si spiega con il fatto che il momento di inerzia di massa dell'elicottero rispetto all'asse di rollio è minore rispetto a quello longitudinale, e quindi le dinamiche risultano naturalmente meno smorzate.



Capitolo IX – Tracking ottimo su orizzonte infinito

§ 1 – Il problema del tracking ottimo su orizzonte infinito

Il problema del tracking consiste nel minimizzare un indice di qualità del tipo:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} ((\xi - \tilde{\xi})^T Q (\xi - \tilde{\xi}) + u^T R u) dt$$

s.a

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu \quad \text{con } \xi(0) \text{ assegnato}$$

Questo problema, si presenta, per esempio, se si vuole inseguire una traiettoria $\tilde{\xi}$ nello spazio di stato. Esso può essere ricondotto ad un problema di controllo LQR su orizzonte infinito se si pone:

$$x = \xi - \tilde{\xi}$$

Infatti calcolando la derivata di x , si ha:

$$\dot{x} = \dot{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt}$$

Dalla quale si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu + A\tilde{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt}$$

Ed il problema di tracking ottimo su orizzonte infinito si può riscrivere come:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu + A\tilde{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt} \quad \text{con } x(0) = \xi(0) - \tilde{\xi}(0) \text{ assegnato}$$

posto: $w = A\tilde{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt}$ il problema si può riscrivere come:

$$\min_{u_0} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu + w \quad \text{con } x(0) \text{ assegnato}$$



In questa forma si comprende che il problema del tracking ottimo su orizzonte infinito (ma anche su orizzonte finito, non c'è alcuna differenza) è equivalente al problema di risolvere un problema di controllo ottimo LQR su orizzonte infinito nel quale il sistema è soggetto anche all'azione di un disturbo additivo deterministico che agisce sullo stato.

Vale la pena di ricordare che, nel caso l'obiettivo sia l'inseguimento di una traiettoria nello spazio di stato, allora se tale traiettoria è scelta tra le traiettorie "contenute" nel sistema, ossia tra le traiettorie che vengono generate spontaneamente dalla matrice dinamica A, allora, essendo: $\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = A\tilde{\xi}$ risulta $w=0$, ed il problema è esattamente quello del controllo ottimo LQR su orizzonte infinito.

Poiché ciò non è vero in generale, se la traiettoria scelta (ad esempio, un gradino di ampiezza a) non è una traiettoria presente nel sistema, si dimostra che il problema riformulato ha come soluzione:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(P^*x + b(t))$$

Dove P^* non è altro che la soluzione della equazione algebrica di Riccati (ARE), mentre $b(t)$ è dato dal prodotto di un guadagno K_{ff} per il segnale additivo $w(t)$:

$$b(t) = K_{ff}w(t)$$

Dove K_{ff} può essere calcolato risolvendo un'equazione "di Lyapunov":

$$A_c^T K_{ff} + K_{ff} A_c = -P^*$$

che va quindi risolta dopo aver calcolato P^* (e cioè aver risolto il problema LQR ottimo su orizzonte infinito classico).

Per la sua struttura, $u^*(t)$ è di fatto costituita da:

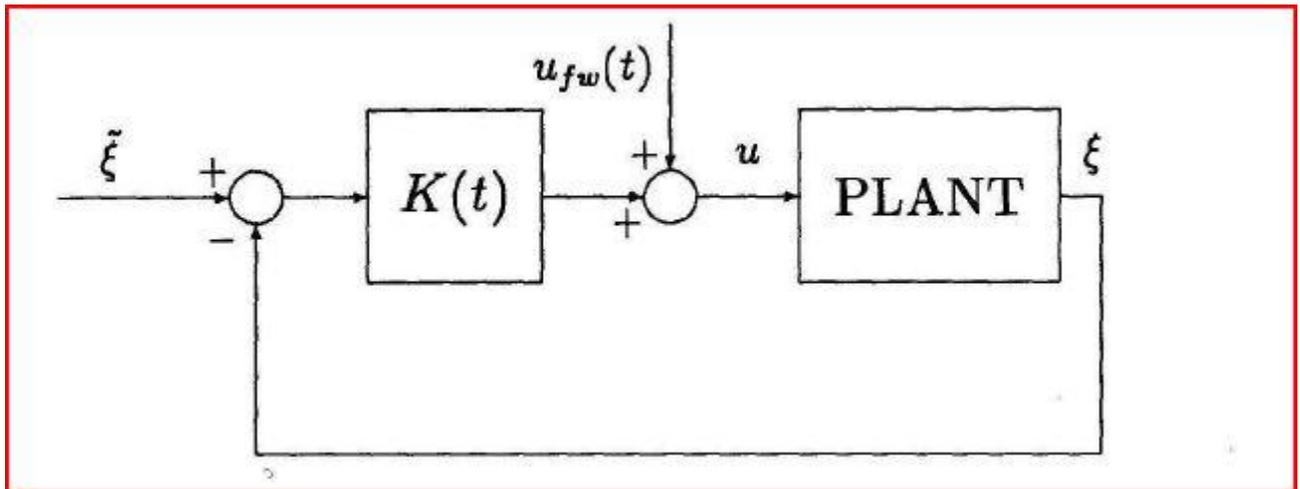
- un termine in feedback $-R^{-1}B^T P^* x$
- un termine in feedforward $-R^{-1}B^T K_{ff} w(t)$

Volendo, come detto all'inizio, intendere il problema del tracking ottimo nel senso dell'inseguimento di una traiettoria nello spazio di stato, si andrà ad implementare il seguente algoritmo in Matlab.

- ✚ Si calcola la legge di controllo ottima LQR su orizzonte infinito con riferimento al sistema che si desidera controllare, ottenendo il guadagno ottimo K e la soluzione dell'ARE di Riccati P^* .
- ✚ Si valuta la matrice dinamica a ciclo chiuso corrispondente al sistema con retroazione dello stato con guadagno calcolato al passo precedente.
- ✚ Si risolve l'equazione di Lyapunov ricavando il K_{ff} .
- ✚ Si ricava il guadagno in feedforward che premoltiplica $w(t) - R^{-1}B^T K_{ff}$
- ✚ Si sceglie il riferimento $\tilde{\xi}$ nello spazio di stato.



✚ Si implementa il seguente schema di controllo:



§ 2 – Inseguimento di traiettoria con LQR infinito per il modello verticale

Il problema di tracking ottimo su orizzonte infinito per il modello verticale è:

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{\infty} ((\xi_{ver} - \tilde{\xi}_{ver})^T Q (\xi_{ver} - \tilde{\xi}_{ver}) + u_{ver}^T R u_{ver}) dt$$

s.a

$$\dot{\xi}_{ver} = A_{ver} \xi_{ver} + B_{ver} u_{ver} \quad \text{con } \xi_{ver}(0) \text{ assegnato}$$

Dove con ξ_{ver} si è inteso (con un mero scambio di simboli) proprio lo stato del modello verticale (velocità di beccheggio, rollio e velocità indotte). Sia $x = \xi_{ver} - \tilde{\xi}_{ver}$ allora il problema risulta nella forma vista al paragrafo precedente con: $w(t) = A \tilde{\xi}_{ver} - \frac{d\tilde{\xi}_{ver}}{dt}$.

Seguendo l'algoritmo esposto alla fine del paragrafo 1 di questo capitolo, è possibile calcolare i guadagni delle azioni in feedback ed in feedforward che consentono di inseguire la traiettoria. Ciò è stato fatto con il seguente listato Matlab riportato a pagina seguente. In esso l'equazione di Lyapunov viene risolta (come per il piazzamento degli autovalori) col comando solvesdp che ha come vincoli proprio l'equazione di Lyapunov e come incognita K_{ff} .



```

%% TRACKING OTTIMO SU ORIZZONTE INFINITO PER IL MODELLO VERTICALE:
%       Inseguimento di un riferimento

clear all
close all
clc

%Si carica l'azione in feedback di stato
LQRinfinito_ver

%Matrice dinamica ad anello chiuso
Ac_ver=A_ver-B_ver*K_ver_inf;

%Guadagno in feedforward incognito
Kff_ver=sdpvar(size(B_ver,1),size(A_ver,1),'full');

%Equazione di Lyapunov per il calcolo di Kff
vincolo=[Ac_ver' * Kff_ver + Kff_ver*Ac_ver == - P_ver_inf]

solvesdp(vincolo);

Kff_ver=double(Kff_ver);
disp('Il guadagno del controllore in anello aperto per w costante vale:');

```

A questo punto è necessario definire la traiettoria che si desidera inseguire. Visto il significato delle variabili di stato, per questo modello può essere interessante provare ad inseguire una traiettoria che fa variare le velocità verticale. Si desidera cioè scegliere una *“legge del moto”* per il sistema modello verticale.

Le traiettorie in linea di principio, possono essere le più disparate, si è scelto di provare 2 casi:

- 1) Inseguimento di un riferimento costante.
- 2) Inseguimento di una legge del moto di tipo trapezoidale.

♣ Inseguimento di un riferimento costante

Il riferimento costante che si è scelto di inseguire è quello che porta la velocità verticale dell'elicottero a 10 m/s. Si deve dire che questa è la velocità massima limite di validità del modello matematico sviluppato, che è per un volo a punto fisso e non ad alta velocità.

Si potrebbe mettere un riferimento costante anche all'imbardata e verificare (con la simulazione) che il sistema risponde bene all'inseguimento di entrambe le traiettorie. Supponiamo di voler raggiungere una velocità di imbardata costante per l'elicottero di 0.2 rad/s. Dunque:

$$\tilde{\xi}_{ver} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

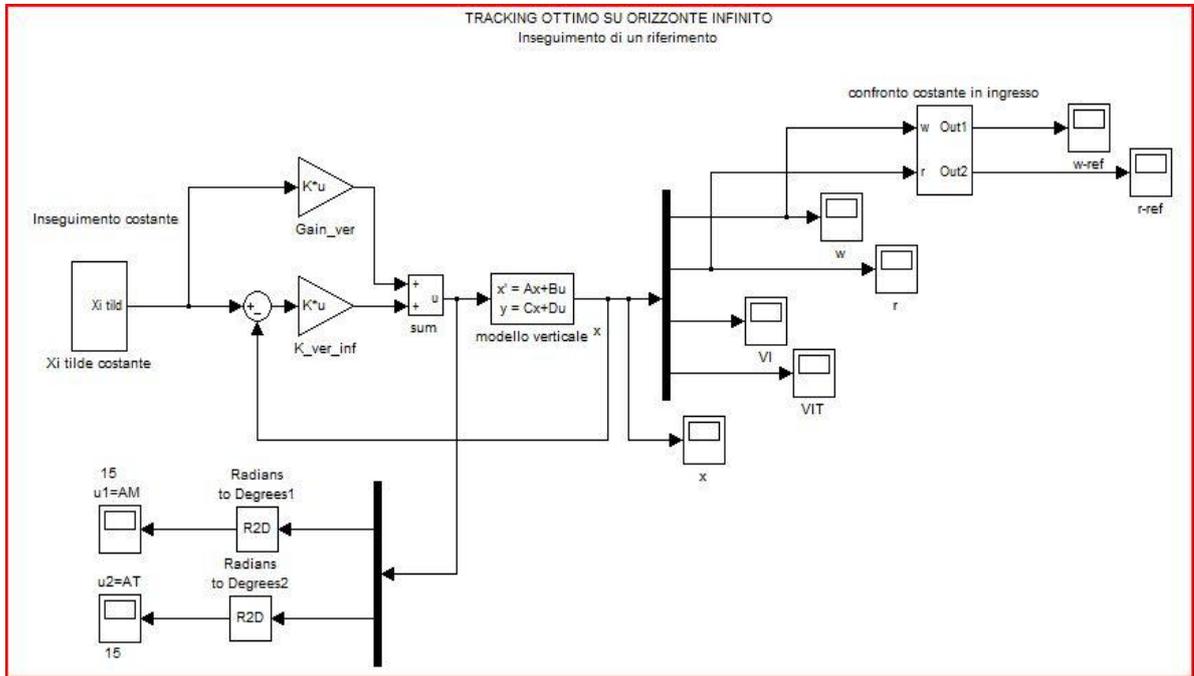


Essendo $\tilde{\xi}_{ver}$ costante risulterà chiaramente $w(t)=A_{ver}\tilde{\xi}_{ver}$ e quindi il guadagno in feedforward vale:

$$\text{Gain_ver} = -\text{inv}(R_ver) * B_ver' * Kff_ver * A_ver$$

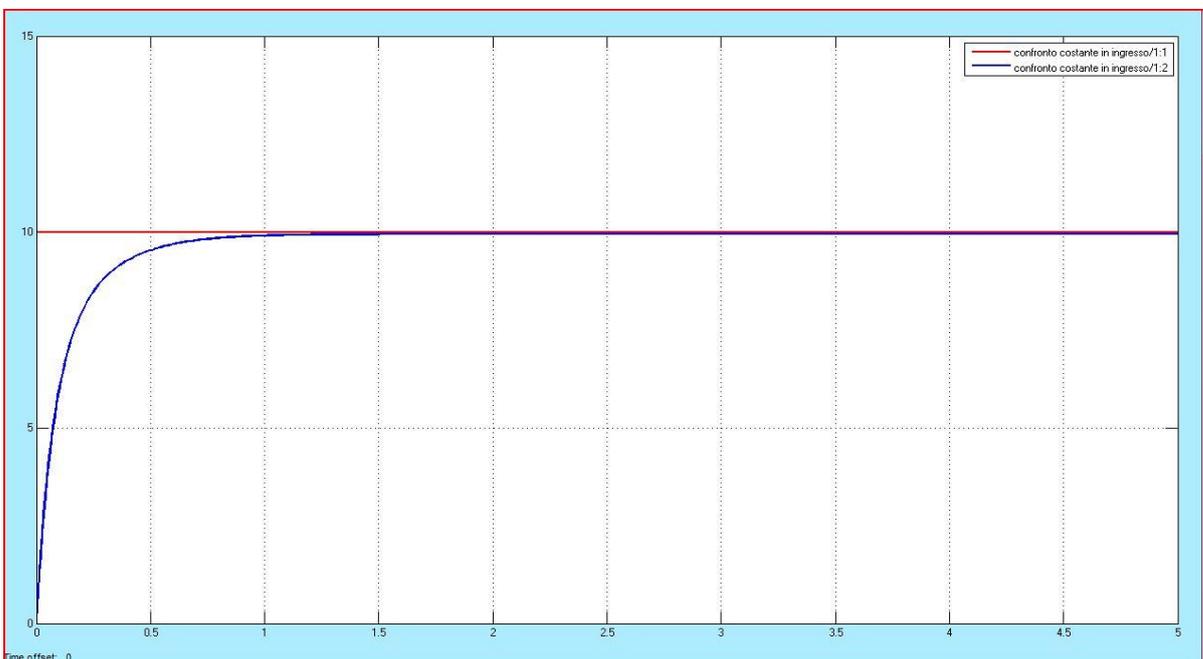
Eseguito nel listato precedente.

A questo punto è possibile realizzare lo schema per inseguimento di traiettoria in simulink come segue:



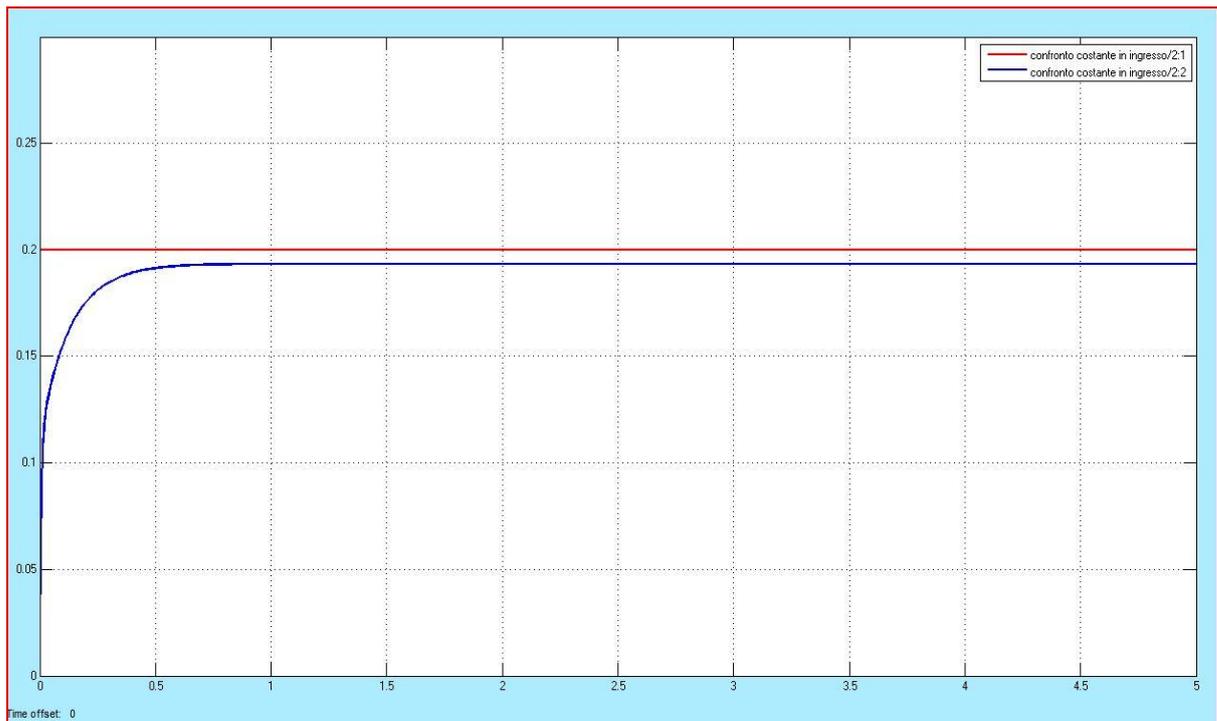
Dove si nota la compresenza di un'azione in feedback ed una in feedforward.

Il risultato di questa simulazione, per la velocità w è:





Mentre per la velocità r è:



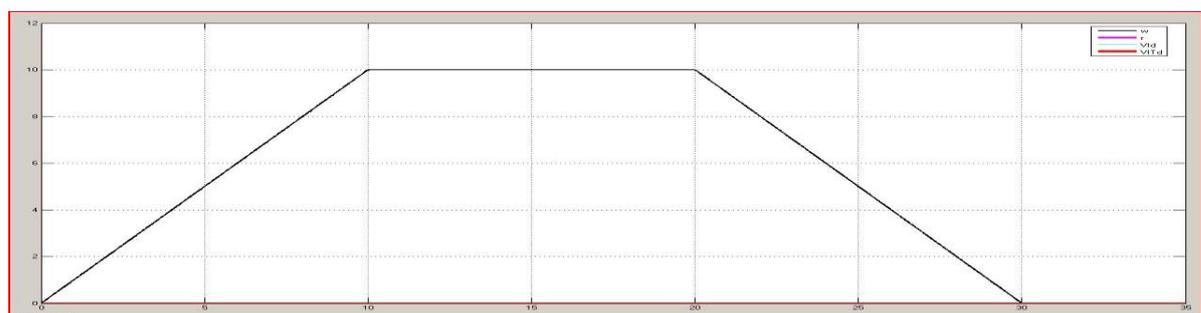
Le risposte non mostrano errore a regime nullo, questo problema verrà risolto con l'aggiunta di un'azione integrale (cambiando leggermente l'approccio al problema) nel prossimo capitolo.

♣ Inseguimento di una legge trapezoidale

Poiché le uscite sono delle velocità, potrebbe essere interessante comprendere come si comporta il sistema di controllo progettato quando la traiettoria da inseguire è una particolare legge del moto che realizza un certo spostamento per l'elicottero. Ad esempio, supponiamo di voler effettuare una traslazione in verticale dell'elicottero di 200 metri con una velocità massima che non deve superare i 10 m/s (per il tipo di modello che si è considerato). Per realizzare tale spostamento a questa velocità costante con una legge del moto di tipo trapezoidale, è necessario un intervallo di tempo pari a:

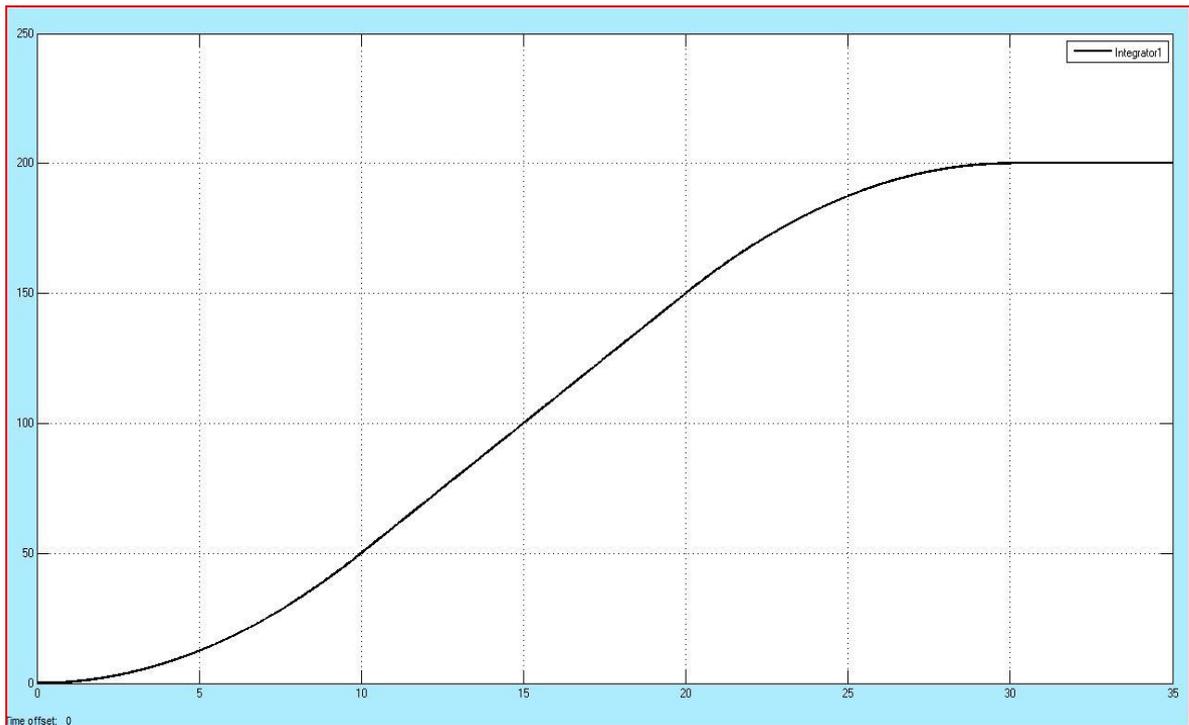
$$T=30 \text{ s}$$

Avendo supposto il tempo di salita al valore massimo della velocità pari ad un terzo dell'intervallo T ed uguale al tempo di azzeramento della velocità. In altre parole, il riferimento ha il seguente andamento:

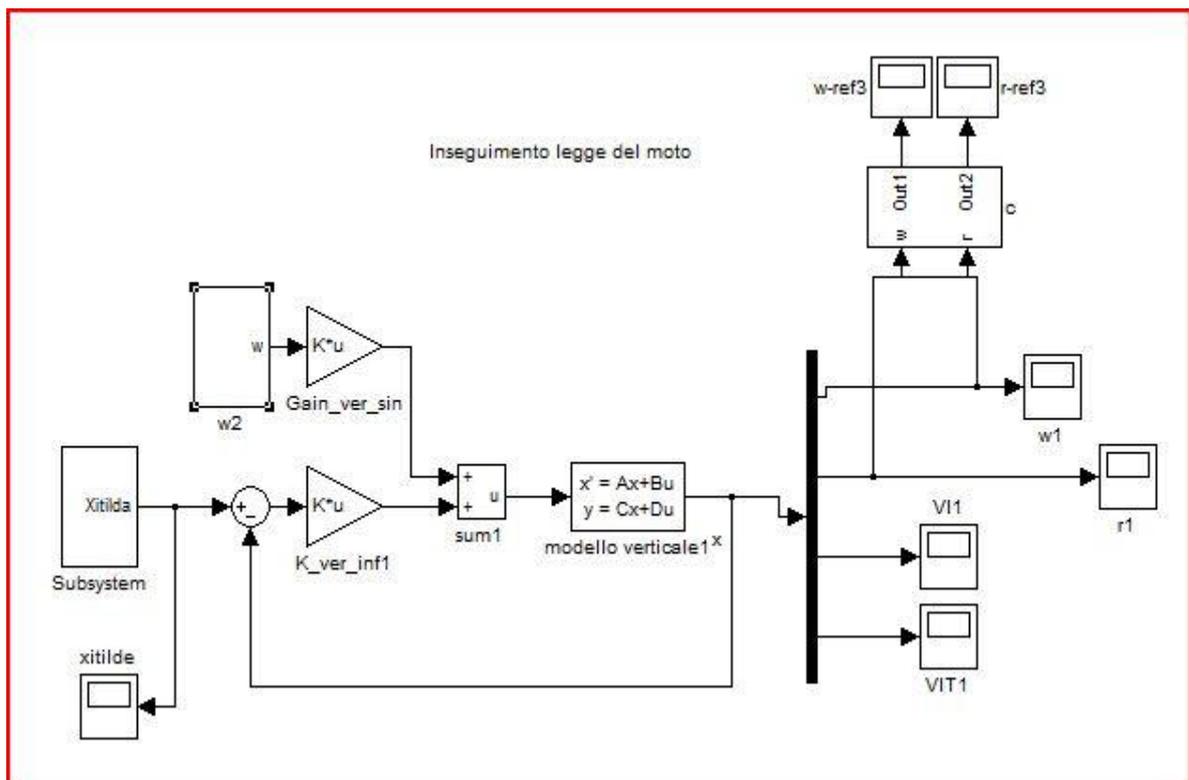




Il riferimento per la velocità di imbardata è nullo, così come quello per le velocità indotte. La legge del moto che si desidera ottenere con questo riferimento, è dunque la seguente:

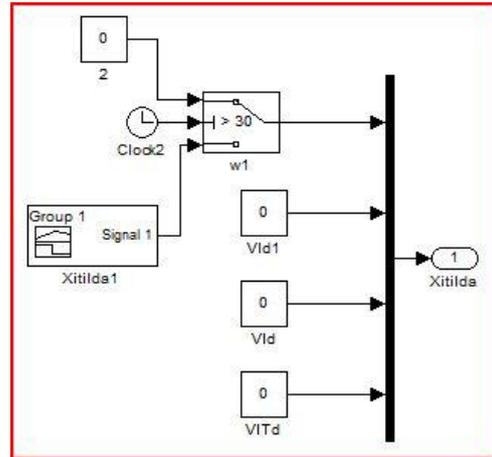
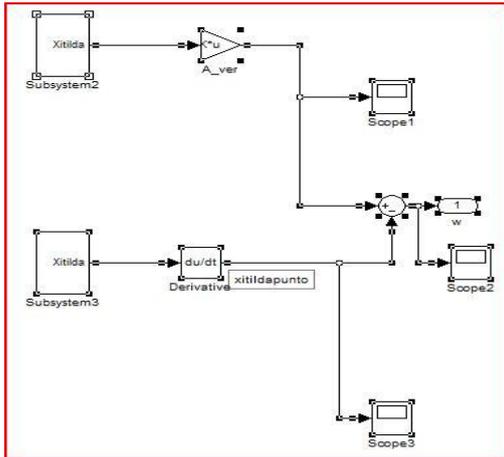


Poiché $\tilde{\xi}_{ver}$ non è costante, in questo caso $w = A \tilde{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt}$, lo schema di simulazione si modifica come segue:



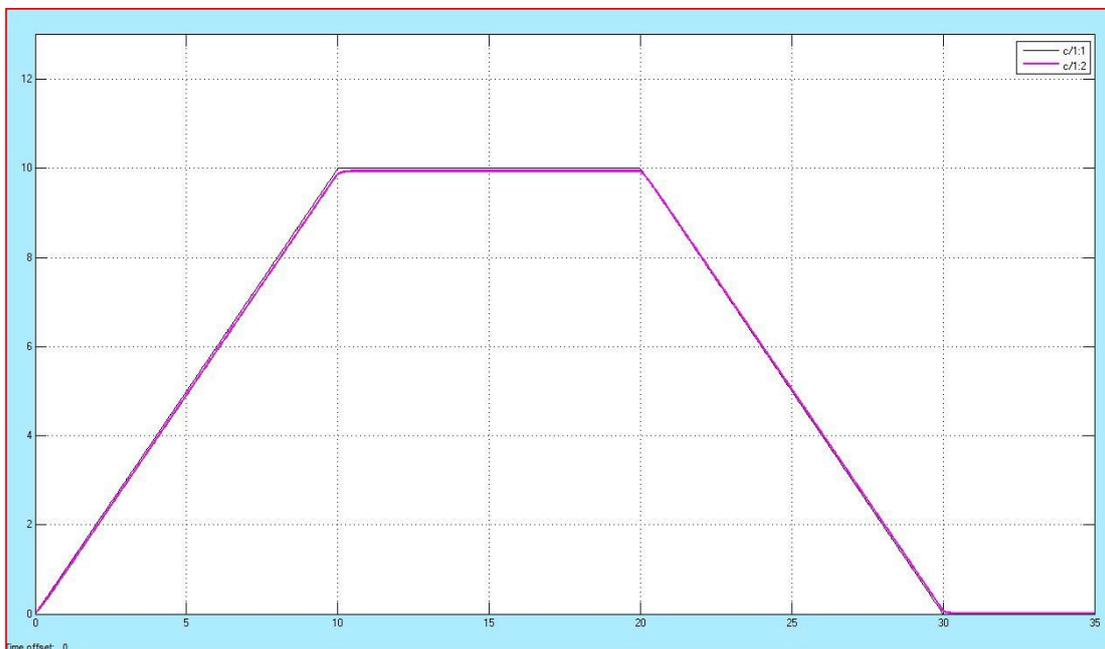


Il blocco w calcola appunto $w(t)$, mentre il blocco Xitilda contiene il riferimento. Essi sono realizzati come segue:

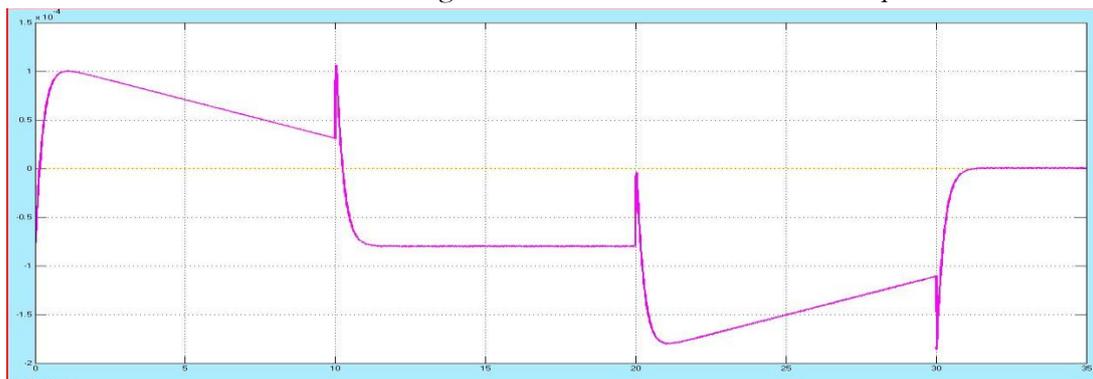


La simulazione fornisce i seguenti risultati:

- La velocità u ha il seguente andamento:

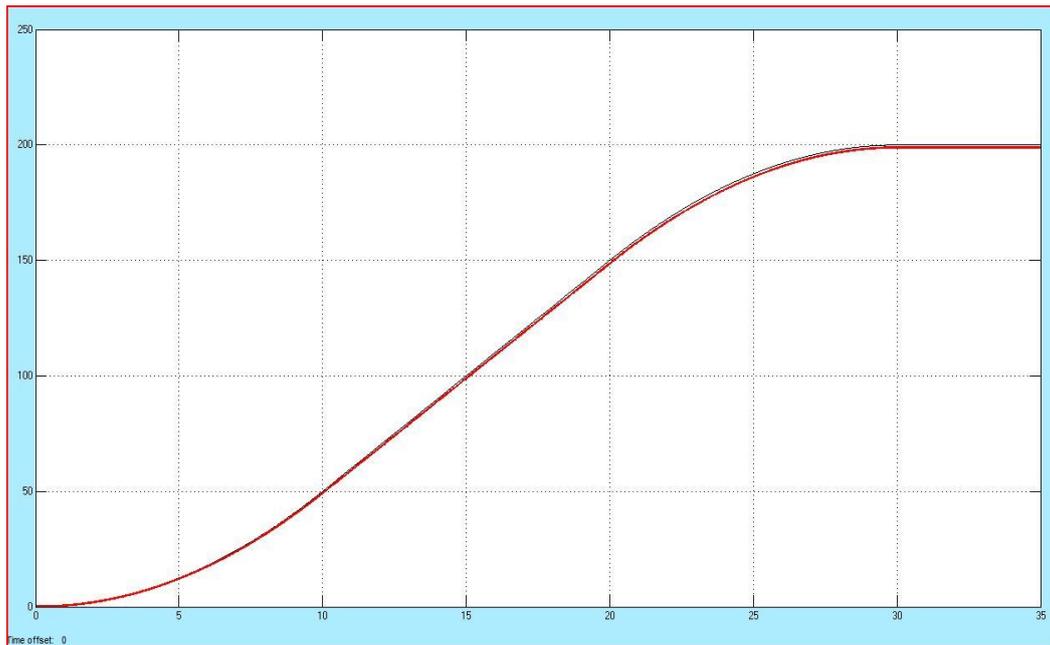


- La velocità di imbardata mostra il seguente andamento, che si discosta di poco dallo zero:

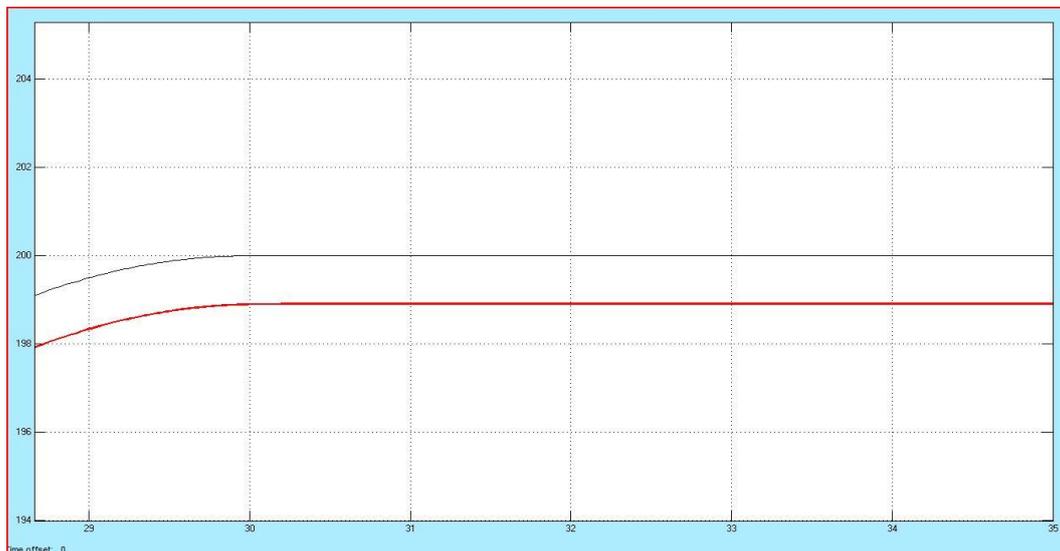




Il conseguente andamento della posizione, confrontato con quello desiderato è mostrato dalla figura seguente.



Osservando bene il grafico si vede ancora che l'errore a regime non è nullo:



Questo problema si potrà risolvere con l'aggiunta di un'azione integrale.



§ 3 – Inseguimento di traiettoria con LQR infinito per il modello orizzontale

Il problema di tracking ottimo su orizzonte finito per il modello orizzontale è:

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{\infty} ((\xi_{hor} - \tilde{\xi}_{hor})^T Q (\xi_{hor} - \tilde{\xi}_{hor}) + u_{hor}^T R u_{hor}) dt$$

s.a

$$\dot{\xi}_{hor} = A_{hor} \xi_{hor} + B_{hor} u_{hor} \quad \text{con } \xi_{hor}(0) \text{ assegnato}$$

Dove con ξ_{hor} si è inteso (con un mero scambio di simboli) proprio lo stato del modello orizzontale. Sia $x = \xi_{hor} - \tilde{\xi}_{hor}$ allora il problema risulta nella forma vista al paragrafo precedente con: $w(t) = A \xi_{hor} - \frac{d\tilde{\xi}_{hor}}{dt}$.

Seguendo l'algoritmo esposto alla fine del paragrafo 1 di questo capitolo, è possibile calcolare i guadagni delle azioni in feedback ed in feedforward che consentono di inseguire la traiettoria. Ciò è stato fatto con il seguente listato Matlab seguente. In esso l'equazione di Lyapunov viene risolta (come per il piazzamento degli autovalori) col comando `solvesdp` che ha come vincoli proprio l'equazione di Lyapunov e come incognita K_{ff} .

```
%% TRACKING OTTIMO SU ORIZZONTE INFINITO PER IL MODELLO ORIZZONTALE:
%      Inseguimento di un riferimento costante

clear all
close all
clc

%Carichiamo l'azione in feedback di stato
LQRinfinito_hor

%Matrice dinamica ad anello chiuso
Ac_hor=A_hor-B_hor*K_hor_inf;

%Guadagno in feedforward incognito
Kff_hor=sdpvar(size(B_hor,1),size(A_hor,1),'full');

%Equazione di Lyapunov per il calcolo di Kff
vincolo=[Ac_hor' * Kff_hor + Kff_hor*Ac_hor == - P_hor_inf]

solvesdp(vincolo);
```

A questo punto è necessario definire la traiettoria che si desidera inseguire. Visto il significato delle variabili di stato, per questo modello può essere interessante provare ad inseguire una traiettoria che fa



variare le velocità di avanzamento e laterale. Si desidera cioè scegliere una "legge del moto" per il sistema modello orizzontale.

Le traiettorie in linea di principio, possono essere le più disparate, si è scelto di provare 2 casi:

- 1) Inseguimento di un riferimento costante.
- 2) Inseguimento di una legge del moto di tipo trapezoidale.

♣ Inseguimento di un riferimento costante

Il riferimento costante che si è scelto di inseguire è quello che porta la velocità di avanzamento dell'elicottero a 10 m/s. Si deve dire che questa è la velocità massima limite di validità del modello matematico sviluppato, che è per un volo a punto fisso e non ad alta velocità.

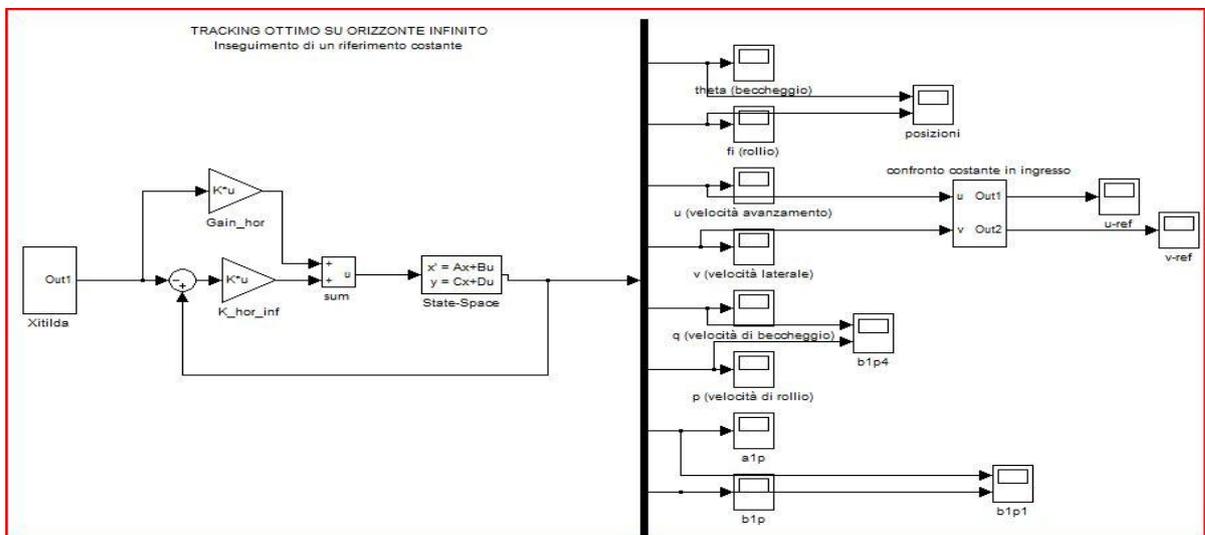
La traiettoria nello stato desiderata è:

$$\tilde{\xi}_{hor} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essendo $\tilde{\xi}_{hor}$ costante risulterà chiaramente $w(t)=A_{hor}\tilde{\xi}_{hor}$ e quindi il guadagno in feedforward vale:

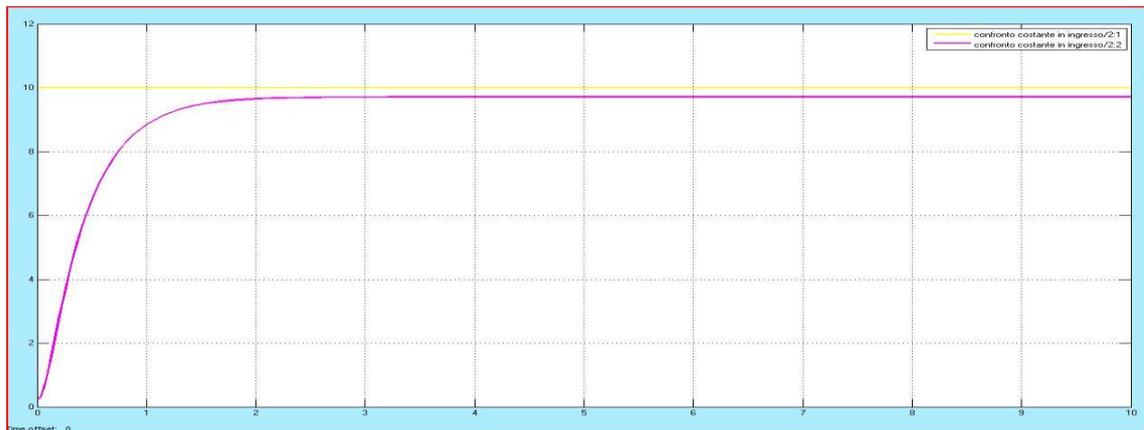
$$Gain_hor = -inv(R_hor) * B_hor' * Kff_hor * A_hor$$

Lo schema per la simulazione è del tutto simile a quello usato per il modello verticale:

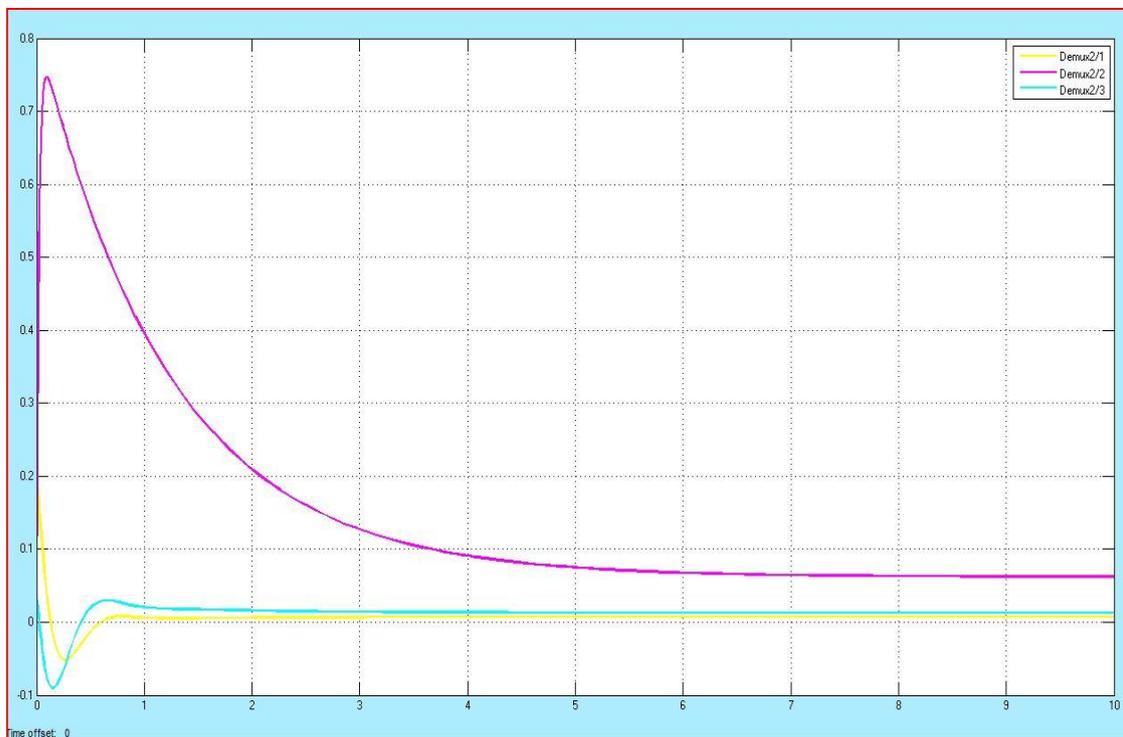




La velocità laterale in uscita ha il seguente andamento:



Le prestazioni sembrano buone, tuttavia, per via dell'accoppiamento dei canali si verifica anche una Variazione della velocità di avanzamento del rollio e del beccheggio, come evidenzia il seguente grafico:



Salta immediatamente all'occhio che quando l'elicottero si sposta lateralmente, con il controllore progettato, esso effettua anche un rollio che raggiunge un picco massimo di circa 40 gradi!

Anche in questo caso, come per il modello verticale, non si ha errore a regime nullo. Prestazioni migliori si otterranno sotto tutti i punti di vista con il controllo PI.

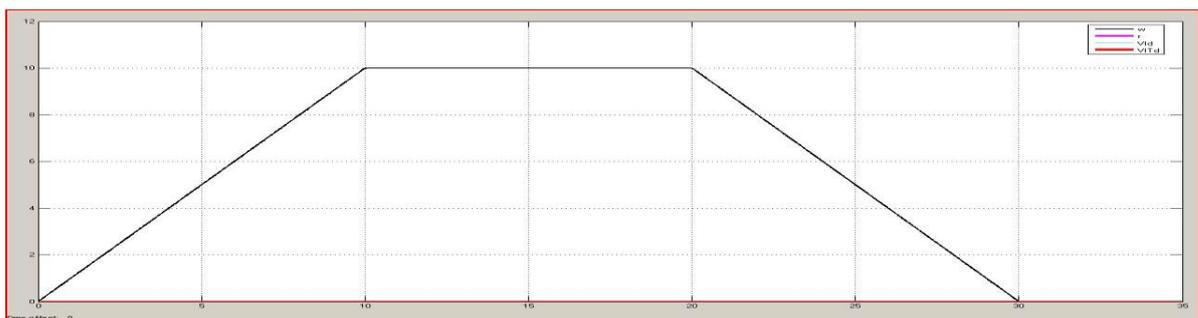
♣ Inseguimento di una legge trapezoidale



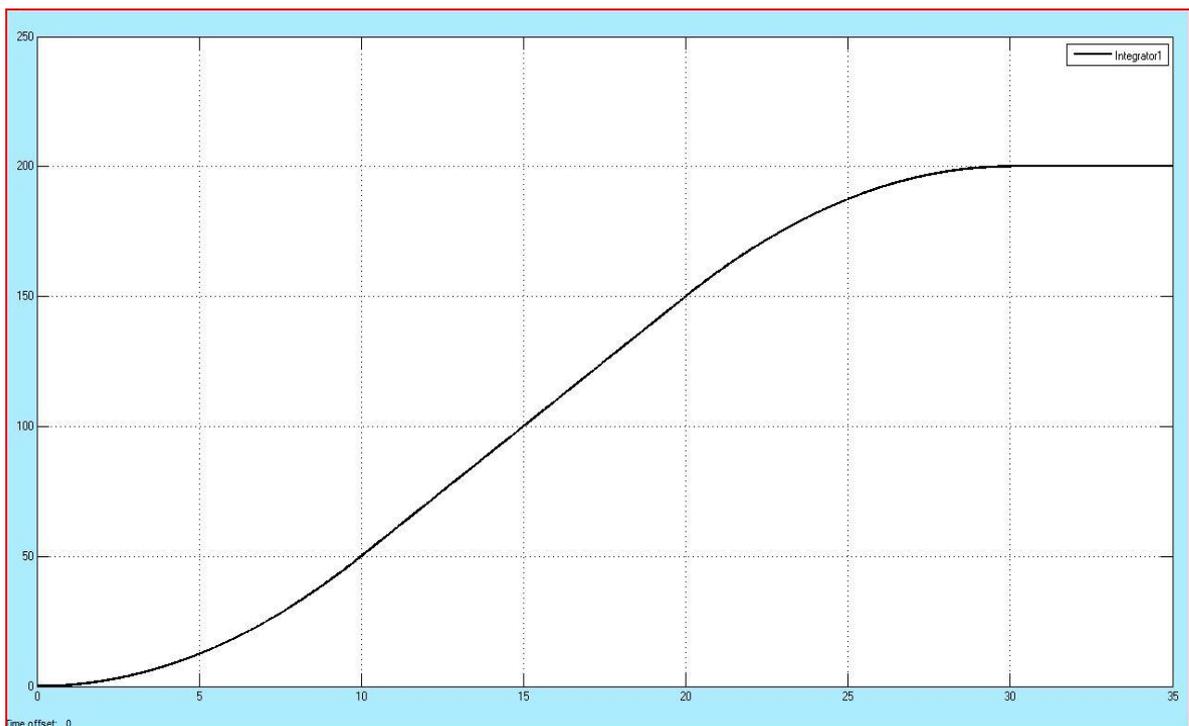
Poiché le uscite sono delle velocità, potrebbe essere interessante comprendere come si comporta il sistema di controllo progettato quando la traiettoria da inseguire è una particolare legge del moto che realizza un certo spostamento per l'elicottero. Ad esempio, supponiamo di voler effettuare un avanzamento dell'elicottero di 200 metri con una velocità massima che non deve superare i 10 m/s (per il tipo di modello che si è considerato). Per realizzare tale spostamento a questa velocità costante con una legge del moto di tipo trapezoidale, è necessario un intervallo di tempo pari a:

$$T=30 \text{ s}$$

Avendo supposto il tempo di salita al valore massimo della velocità pari ad un terzo dell'intervallo T ed uguale al tempo di azzeramento della velocità. In altre parole, il riferimento ha il seguente andamento:

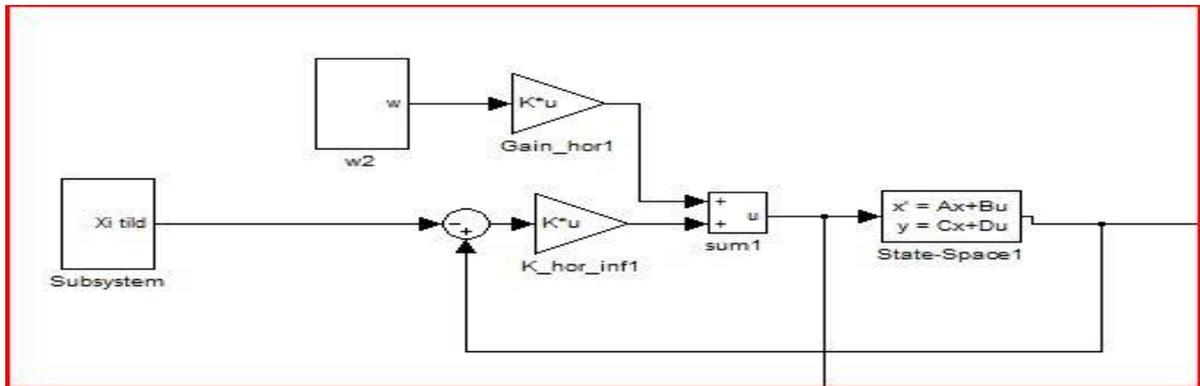


Il riferimento per gli altri stati è nullo. La legge del moto che si desidera ottenere con questo riferimento, è dunque la seguente:



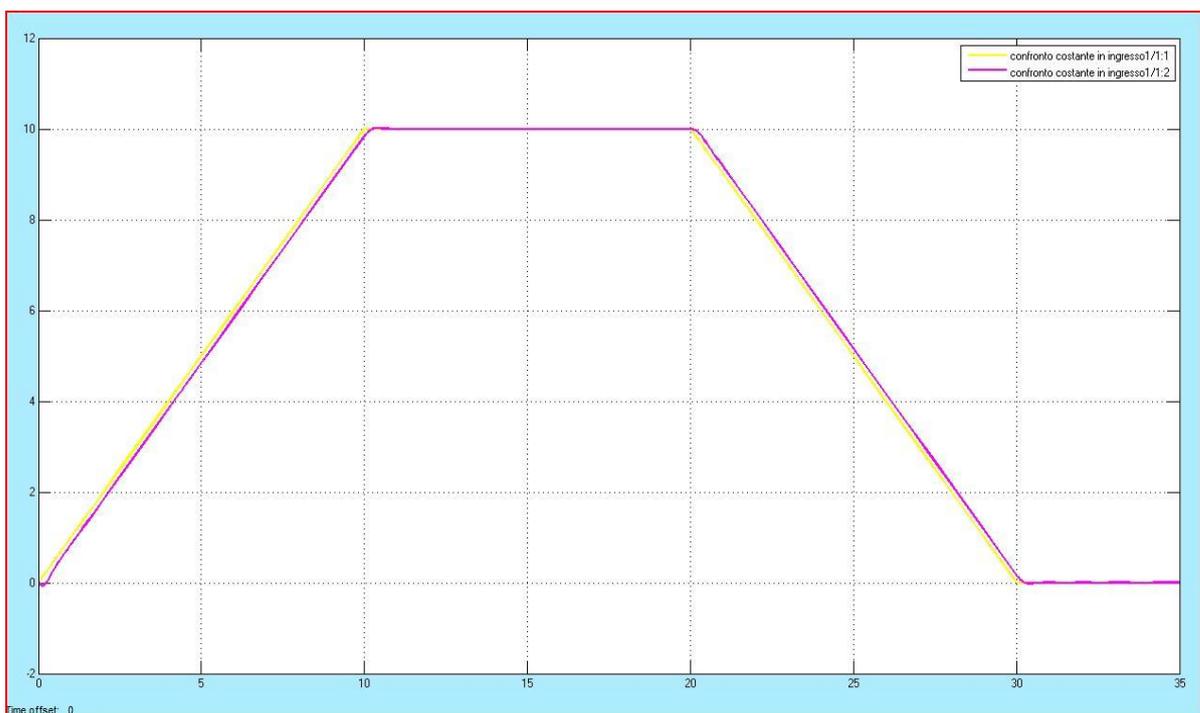


Poiché $\tilde{\xi}_{hor}$ non è costante, in questo caso $w = A \tilde{\xi} - \frac{d\tilde{\xi}}{dt}$. Lo schema di simulazione si modifica come segue:

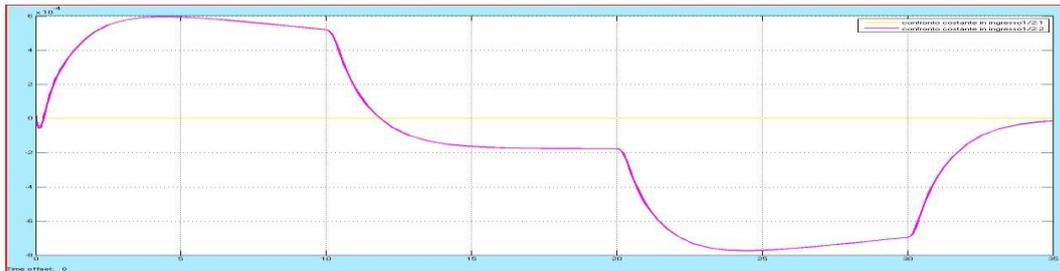


Che è stato rappresentato nel particolare di interesse. I sottosistemi "Xi tild" e "w" sono identici a quelli visti per il modello orizzontale.

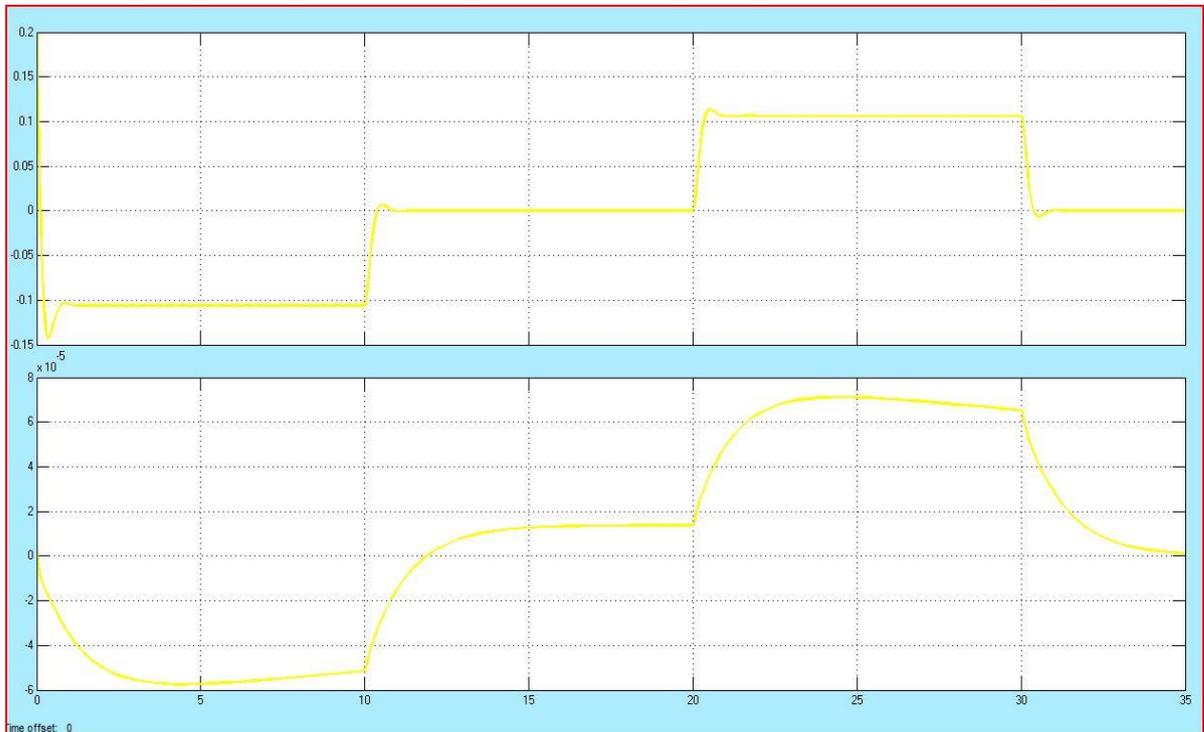
La velocità di avanzamento u ha il seguente andamento:



La velocità (a meno di una piccolissima sottoelongazione iniziale) segue molto bene la traiettoria desiderata.



L'ultimo grafico rappresenta la variazione di velocità verticale che non supera (come valore massimo) i 0.0006 metri (l'ordinata è moltiplicata per 10^{-4}), è dunque praticamente nulla.



Il primo grafico dei due grafici testè riportati rappresenta il beccheggio, che per un avanzamento dell'elicottero subisce delle variazioni durante le fasi di accelerazione, nelle quali raggiunge un picco massimo di circa 7 gradi. Invece il rollio, per un avanzamento dell'elicottero, non subisce variazioni sostanziali (l'ordinata del secondo grafico è scalata per 10^{-5}).



Capitolo X – Tracking PI

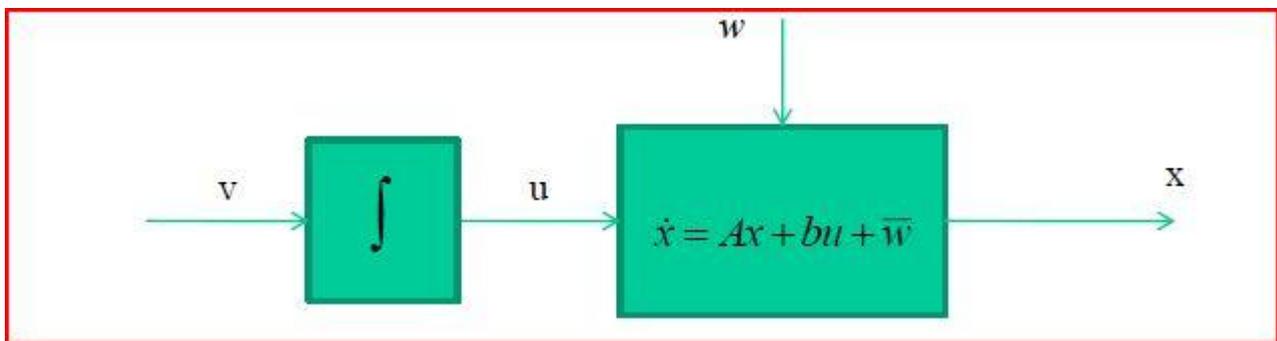
In questo capitolo si progetterà un controllore ancora per l'inseguimento di traiettorie nello spazio di stato, aggiungendo al controllore un'azione integrale che garantisca, in questo modo, errore a regime nullo. Il problema viene presentato pensando al caso generale in cui al sistema si addiziona un "disturbo" costante non deterministico; successivamente il problema sarà interpretato per gli scopi testè dichiarati.

§ 1 – Il problema del tracking per la reiezione di disturbi non deterministici

Si supponga che sul sistema agisca un segnale costante di ampiezza ignota, ossia:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \bar{w}$$

Con $\bar{w} \in \mathbb{R}$. Per reiettare asintoticamente il disturbo a regime è possibile inserire nello schema di controllo un'azione integrale come segue:



Il problema di controllo ottimo aumentato diventa:

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q} z + v^T R v) dt$$

s.a

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$

ove $\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \geq 0, R > 0$, ed $z = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ Ex \end{bmatrix}$ dove E è la matrice che determina gli stati che vanno minimizzati dall'operazione di ottimizzazione. Si noti che il guadagno che si ottiene risolvendo questo problema di ottimizzazione ha dimensioni $[m \times (n + \dim(E))]$ dove $\dim(E)$ indica il numero di righe della matrice E. In altre parole, la legge di controllo ottimo sarà:

$$\dot{v} = -[K_1 \ K_2] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ Ex \end{bmatrix} = -K_1 \dot{x} - K_2 Ex$$

Essendo v l'ingresso dell'integratore il vero ingresso al sistema sarà:



$$u = -K_1 x - K_2 \int_0^t E x(\tau) d\tau$$

Che è proprio la legge di tipo proporzionale integrale cercata.

Quindi per trovare la legge *PI* desiderata si seguirà il seguente algoritmo:

- ✚ Si sceglie l'uscita del sistema da controllare, fissando la matrice E .
- ✚ Si calcolano le matrici del modello allargato ponendo.
- ✚ Si definiscono le matrici di peso del problema allargato in maniera che esso descriva proprio il sistema originario posto a valle di un integratore (come visto).
- ✚ Si calcola il guadagno ottimo con la tecnica di ottimizzazione LQR si orizzonte infinito.
- ✚ Si suddivide il guadagno ottenuto in quello relativo all'azione integrale e quello relativo all'azione proporzionale K_1 e K_2 .

§ 2 – Controllo *PI* per il modello verticale

Come già visto in precedenza il sistema da controllare è descritto da:

$$\dot{\xi}_{ver} = A_{ver} \xi_{ver} + B_{ver} u_{ver} \text{ con } \xi_{ver}(0) \text{ assegnato}$$

Cui aggiungiamo l'equazione di uscita:

$$y_{ver} = C_{ver} \xi_{ver}$$

Dove $C_{ver} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mette in uscita gli stati che si desiderano controllare (velocità d'ascesa ed imbardata).

La traiettoria che si desidera inseguire è:

$$y_{ver} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per ricondursi al problema di reiezione del disturbo deterministico w , si pone come al solito: $x = \xi_{ver} - \tilde{\xi}_{ver}$ dove $\tilde{\xi}_{ver} = [10 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Con la posizione fatta: $\xi_{ver} = x + \tilde{\xi}_{ver}$ ed il sistema verticale diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \bar{w}$$

Dove $\bar{w} = A_{ver} \tilde{\xi}_{ver}$. Poiché si vuole minimizzare l'uscita y_{ver} nel caso in esame $E=C_{ver}$, allora il sistema allargato diventa:

*Come riportato in [7] la traiettoria nello stato corrispondente all'uscita desiderata si può trovare con la relazione: $C_{ver}^{-1}(C_{ver} C_{ver}^{-1})^{-1} y_{ver}$.



$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_{ver} & 0 \\ C_{ver} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_{ver} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Il problema di controllo viene risolto col comando lqr() in Matlab. Il programma è il seguente:

```
%% CONTROLLO PI PER IL MODELLO VERTICALE
```

```
Modello_verticale
```

```
%%Uscita desiderata
```

```
C_y=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
```

```
y_d=[10 0]';
```

```
%%Matrici del modello allargato
```

```
A_all=[A_ver zeros(4,2)
        C_y zeros(size(C_y,1),2)];
```

```
B_all=[B_ver ; zeros(2,2)];
```

```
%%Problema di ottimizzazione allargato: matrici di peso
```

```
Q_z=[zeros(4,4) zeros(4,2); zeros(2,4) eye(2,2)];
```

```
R_z=[1000 0; 0 1];
```

```
%%Calcolo del guadagno
```

```
K=lqr(A_all,B_all,Q_z,R_z);
```

```
disp('Il guadagno complessivo del controllo PI è:');
```

```
K=double(K)
```

```
disp('Guadagno dell'azione proporzionale:');
```

```
K1=K(:,1:4)
```

```
disp('Guadagno dell'azione integrale:');
```

```
K2=K(:,5:6);
```

Il guadagno dell'azione proporzionale è:

K1 =

```
0.0267  0.0000  0.0062  0.0000
```

```
0.0000 -0.0606 -0.0000 -0.0131
```

Il guadagno dell'azione integrale è:

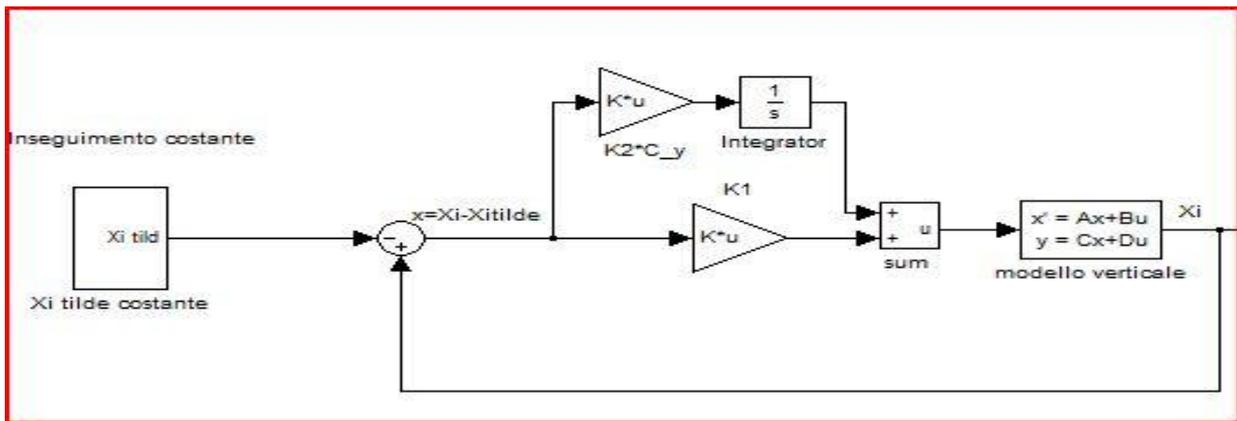
K2 =

```
0.0316  0.0000
```

```
0.0000 -1.0000
```

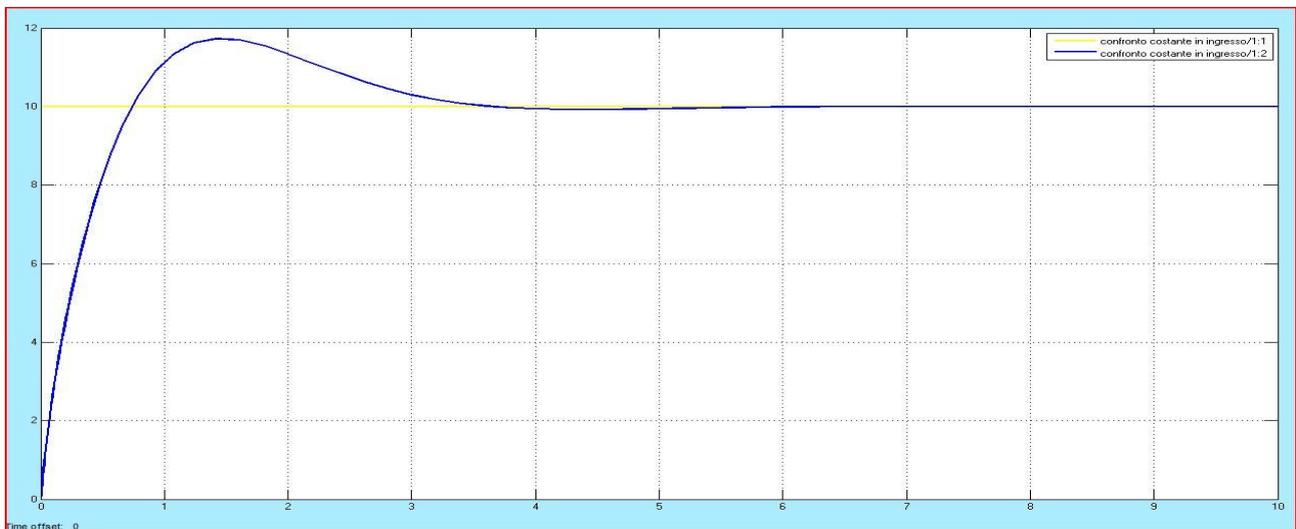


Lo schema di simulazione è il seguente:



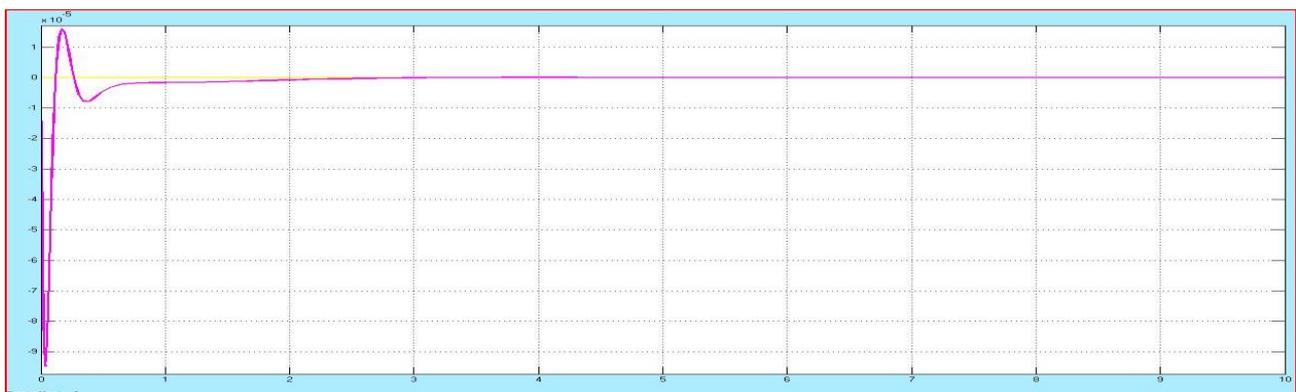
Osservando lo schema si vede che viene calcolata la differenza tra traiettoria effettiva e traiettoria desiderata (errore) e viene inviata al controllore per il calcolo dell'azione proporzionale e dell'azione integrale: questo approccio è del tutto simile a quello classico usato per i sistemi SISO.

L'uscita del sistema ha il seguente andamento:



Si noti la presenza di una sopraelongazione del 15% (circa) a fronte, però, di assenza di errore a regime.

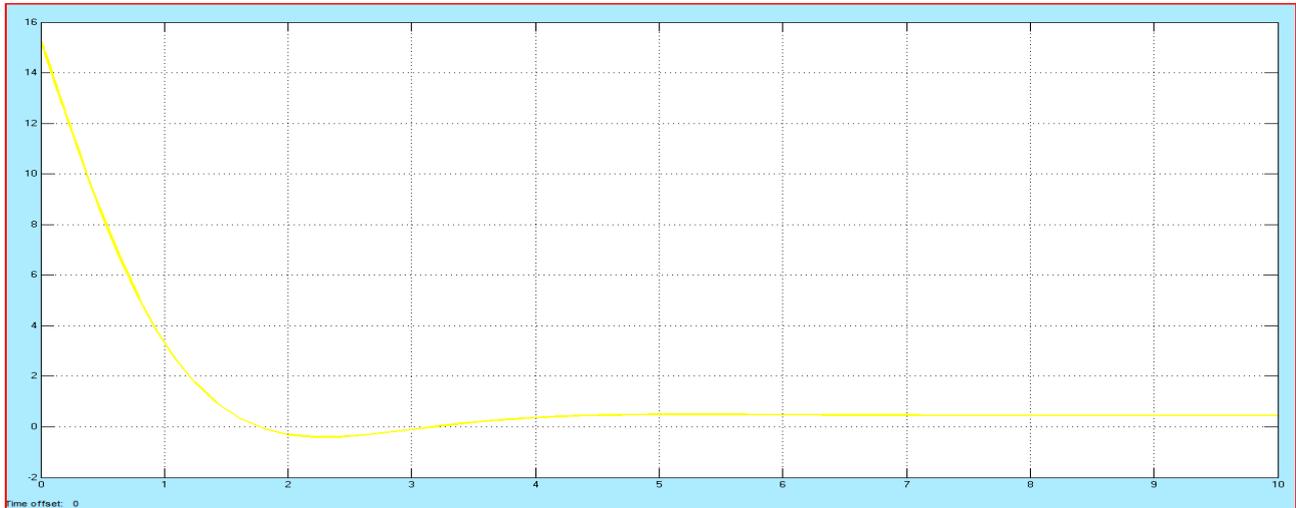
La velocità di imbardata ha il seguente andamento:



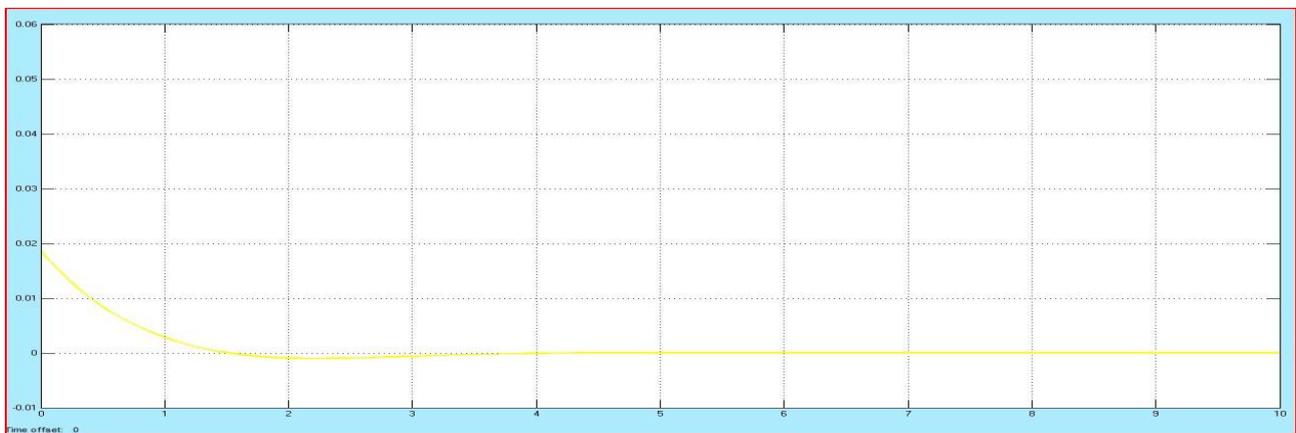


L'ordinata è scalata per 10^{-5} dunque la variazione della velocità dell'imbardata è trascurabile.

L'azione di controllo, infine, si mantiene entro limiti accettabili, come evidenziano i seguenti grafici (ove l'ascissa è riportata in gradi):



L'angolo A_M si mantiene moderato entro valori effettivamente realizzabili.



Come si vede l'ingresso A_T molto poco sollecitato, coerentemente col fatto che l'imbardata subisce solo piccole variazioni quindi è necessario variare di poco la spinta T_T esercitata dal rotore di coda per variare l'orientamento della carlinga.



§ 2 – Controllo PI per il modello orizzontale

Il sistema da controllare è descritto da:

$$\dot{\xi}_{hor} = A_{hor}\xi_{hor} + B_{hor}u_{hor} \quad \text{con } \xi_{hor}(0) \text{ assegnato}$$

Cui aggiungiamo l'equazione di uscita:

$$y_{hor} = C_{hor}\xi_{hor}$$

Dove $C_{hor} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mette in uscita gli stati che si desiderano controllare (velocità d'avanzamento e laterale).

La traiettoria che si desidera inseguire è:

$$y_{hor} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per ricondursi al problema di reiezione del disturbo deterministico w , si pone come al solito: $x = \xi_{hor} - \tilde{\xi}_{hor}$ dove $\tilde{\xi}_{hor} = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Con la posizione fatta: $\xi_{hor} = x + \tilde{\xi}_{hor}$ ed il sistema verticale diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \bar{w}$$

Dove $\bar{w} = A_{hor}\tilde{\xi}_{hor}$. Poiché si vuole minimizzare l'uscita y_{hor} nel caso in esame $E=C_{hor}$, allora il sistema allargato diventa:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A_{hor} & 0 \\ C_{hor} & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_{hor} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Il problema di controllo viene risolto col comando `lqr()` in Matlab. Il programma è il seguente:

```
%% CONTROLLO PI PER IL MODELLO ORIZZONTALE
```

```
Modello_orizzontale
```

```
%%Uscita desiderata
```

```
C_y=[0 0 1 0 0 0 0 0  
0 0 0 1 0 0 0 0]; %%velocità lineari
```

```
y_d=[0.2 0.2]';
```

```
%%Matrici del modello allargato
```

```
A_all=[A_hor zeros(8,size(C_y,1))  
C_y zeros(size(C_y,1),size(C_y,1))];
```



```

B_all=[B_hor ; zeros(size(C_y,1),2)];

%%Problema di ottimizzazione allargato: matrici di peso
Q=[1 0;0 1];

Q_z=[zeros(8,8) zeros(8,size(C_y,1)); zeros(size(C_y,1),8) Q]; %%l'identità mi sembra pesi l'uscita
R_z=[1000 0; 0 5]; %%modificabile

%%Calcolo del guadagno

K=lqr(A_all,B_all,Q_z,R_z);

disp('Il guadagno complessivo del controllo PI è:');
K=double(K)

disp('Guadagno dell'azione proporzionale:');
K1=K(:,1:8)
disp('Guadagno dell'azione integrale:');
K2=K(:,9:10)
    
```

Il guadagno dell'azione proporzionale è:

```

K1 =

    0.2453  -0.0282  -0.0391  -0.0042  0.0056  -0.0008  0.1288  0.0001

    0.1547  0.6014  -0.0426  0.2357  0.0064  0.0049  0.0342  0.2969
    
```

Il guadagno dell'azione integrale è:

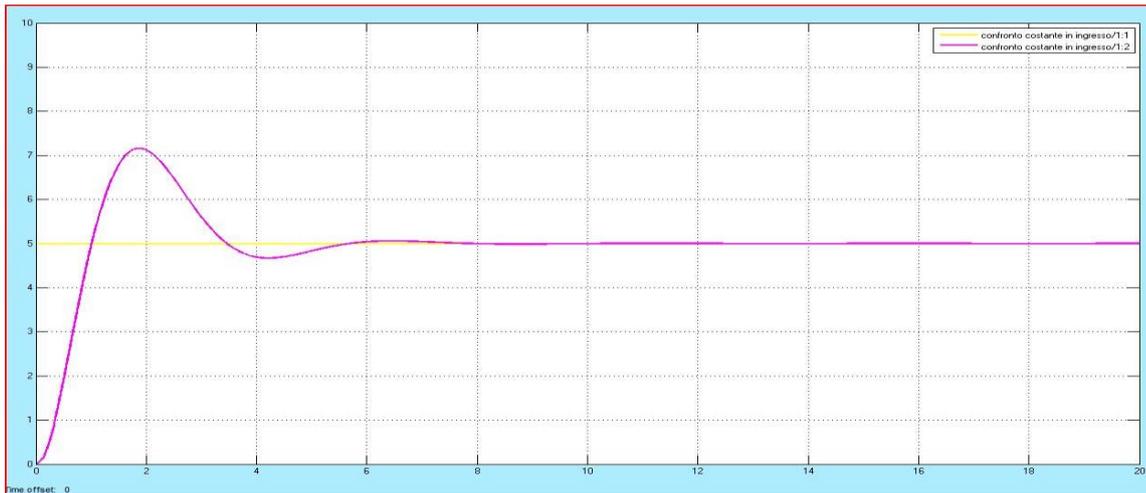
```

K2 =

   -0.0313  -0.0045

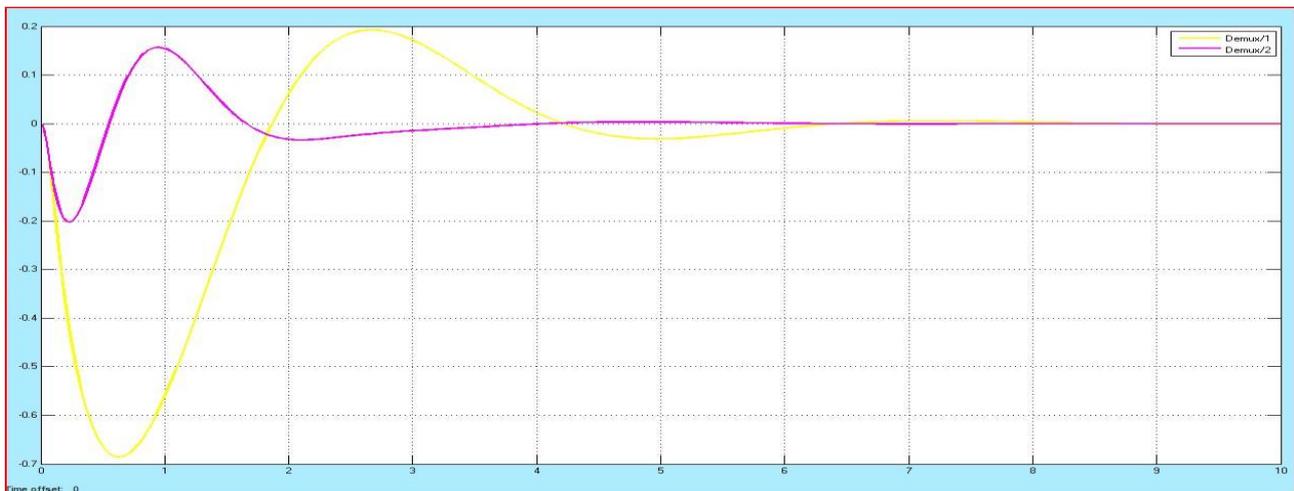
   -0.0632  0.4427
    
```

Il comportamento in uscita è rappresentato dai seguenti grafici:



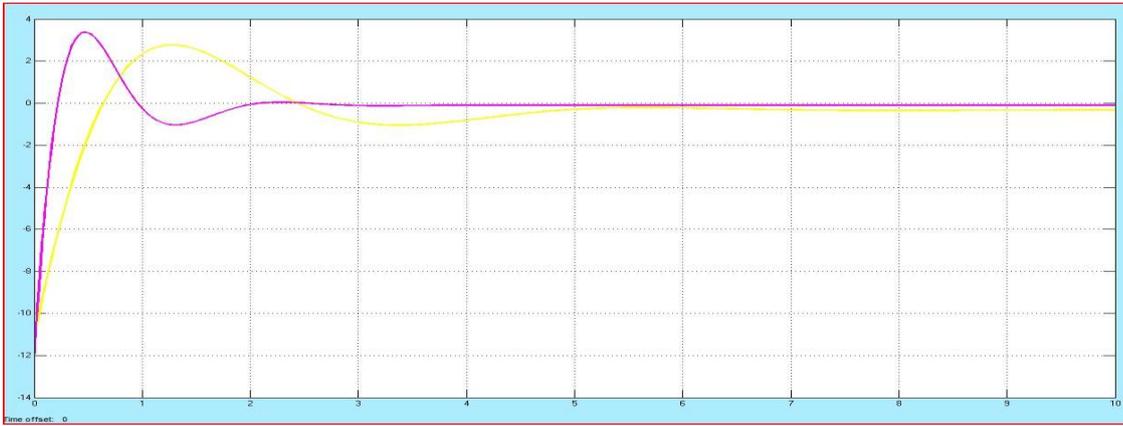
Nonostante vari tentativi di pesare maggiormente lo stato x_3 la velocità di risposta si restringe ma le oscillazioni (sovra elongazione di circa il 35%) non si attenuano. Allora, per mantenere l'ingresso moderato, si è preferito lasciare ad 1 i pesi dello stato (come anche per il modello verticale, dove però le cose vanno meglio).

Il beccheggio ed il rollio mostrano le seguenti variazioni:



Come al solito beccheggio e rollio subiscono delle variazioni. In particolare, per un avanzamento dell'elicottero il beccheggio è di quasi 40 gradi (transitorio). Con questo controllore si verifica anche un notevole rollio durante il transitorio di circa 12 gradi.

L'azione di controllo risulta ben moderata:





Capitolo X – Osservatori dello stato

Un osservatore è un sistema che, ricevendo in input i segnali di ingresso ed uscita di un dato sistema, deve fornire una stima dello stato del sistema stesso.

E' ovvio che, non essendo noto lo stato iniziale del sistema bisognerà accettare un errore di stima diverso da zero.

Tuttavia vedremo che, sotto opportune ipotesi, è possibile garantire che l'errore di stima tende asintoticamente a zero.

Considerando il sistema LTI nella forma

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$$

$$y = C \underline{x}$$

Come osservatore consideriamo il sistema (osservatore di Luenberger)

$$\dot{\underline{\xi}} = A \underline{\xi} + B \underline{u} + L(y - C\underline{\xi})$$

$$y = I \underline{x}$$

ove I è la matrice identità

Si noti che l'osservatore è una replica del sistema con in aggiunta un termine che pesa l'errore di stima secondo una matrice L

Avendo definito l'errore di stima come $e = \underline{x} - \underline{\xi}$ si avrà che l'evoluzione dell'errore sarà data da

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Ovviamente se, come spesso accade il sistema è già asintoticamente stabile, si potrebbe in linea di principio scegliere $L = 0$.

Tuttavia, in questo caso l'errore tenderebbe a zero con le stesse dinamiche del sistema osservato, facendo peggiorare di molto le prestazioni del sistema di controllo che si erano garantite considerando che tutto lo stato fosse misurabile.

Pertanto, noi siamo interessati ad avere una dinamica dell'osservatore almeno un ordine di grandezza più veloce della dinamica più lenta del sistema a ciclo chiuso controllato con tutto lo stato disponibile.

Quindi possiamo dire, in altri termini, che il sistema dinamico errore di stima deve essere:

- Asintoticamente stabile
- Con autovalori sufficientemente lontani dall'origine del piano complesso rispetto ai poli del sistema

Pertanto, anche in questo caso, il problema è riconducibile a quello di determinare una matrice L tale che la matrice A-LC abbia propri autovalori in una regione desiderata del piano complesso.

In virtù del teorema di stabilità di Lyapunov per un dato sistema S, il sistema errore di stima risulterà asintoticamente stabile se e solo se esiste una matrice $Q > 0$ tale che



$$(A - LC)^T Q + Q(A - LC) < 0$$

Siccome nella disuguaglianza matriciale precedente compare il prodotto delle variabili di ottimizzazione, per ricondurla ad una LMI si pone $V = QL$, pertanto la precedente può essere riscritta come

$$A^T Q + QA - VC - C^T V^T < 0$$

Se il problema ammette una soluzione ammissibile, allora $L = Q^{-1}V$

Per garantire anche la seconda specifica sulla velocità di convergenza dell'errore di stima si impone una regione alla LMI

Quando si riuniscono la teoria della retroazione di stato e dell'osservazione è opportuno capire come si comporta il sistema complessivo

A tale scopo, sfruttando il teorema della separazione possiamo affermare che:

I poli del sistema complessivo a ciclo chiuso coincidono con quelli dell'osservatore e quelli che si avrebbero supponendo lo stato completamente disponibile e realizzando la legge di controllo $u=kx$

Dunque il progetto di un controllore con retroazione di stato può essere effettuato in due fasi:

- Si progetta un controllore con retroazione di stato
- Si progetta un osservatore di Luenberger ponendo i poli del sistema in una regione sufficientemente lontana dall'origine rispetto ai poli del sistema da controllare

§ 3 – Osservatori per i sottosistemi dell'elicottero

L'osservatore che è stato progettato per il sottosistema verticale è stato dimensionato in base al guadagno del regolatore ottimo LQ su orizzonte infinito.

Ricordiamo che per i poli del sistema a ciclo chiuso del sistema con retroazione di stato e guadagno calcolato con tecnica LQ sono dati dagli autovalori della matrice

$$A_{ver} - B_{ver} * K_{ver_inf}$$

che risultano:

	-173.4534
	-12.8817
	-3.4910
	-6.1445

Il piazzamento dei poli dell'osservatore è stato fatto grazie all'ausilio della funzione `place()` di Matlab, che di fatto implementa un algoritmo di ottimizzazione e piazza i poli nella posizione più vicina possibile a quella richiesta e ci restituisce la matrice L trasposta.

In definitiva i poli dell'osservatore sono stati locati ad i seguenti valori:

-200.0000



-120.0000
-60.0000
-35.0000

Il codice Matlab, che permette di determinare tale osservatore e di seguito riportato

```

%% OSSERVATORE DI LUENBERGER PER IL MODELLO VERTICALE
CONTROLLATO CON
% GUADAGNO DEL REGOLATORE OTTIMO LQ SU ORIZZONTE INFINITO
clear all
close all
clc
%%Carichiamo i dati del progetto LQR su orizzonte infinito
LQRinfinito_ver
eig(A_ver-B_ver*K_ver_inf)
%%I poli ad anello chiuso risultano
    -173.4534
    -12.8817
    -3.4910
    -6.1445
% K = place(A,B,P) computes a state-feedback matrix K such that
% the eigenvalues of A-B*K are those specified in the vector P.
% No eigenvalue should have a multiplicity greater than the
% number of inputs.
%Noi dobbiamo piazzare i poli di A-L*C_ver e non A-C_ver*L! Allora
%trasponendo A-L*C_ver si ha: (A-L*C_ver)'=(A'-C_ver'L') possiamo usare
%il comando place (la trasposta ha gli stessi autovalori della matrice
%originaria se quadrata) come segue:

modi_errore=[-200 -120 -35 -60];

L_ver_T=place(A_ver',C_ver',modi_errore); %%ottenendo il vettore L_ver trasposto

disp('Il vettore L_ver che definisce l'osservatore di Luenberger per il modello verticale
controllato LQR su orizzonte infinito è:');
L_ver=L_ver_T'

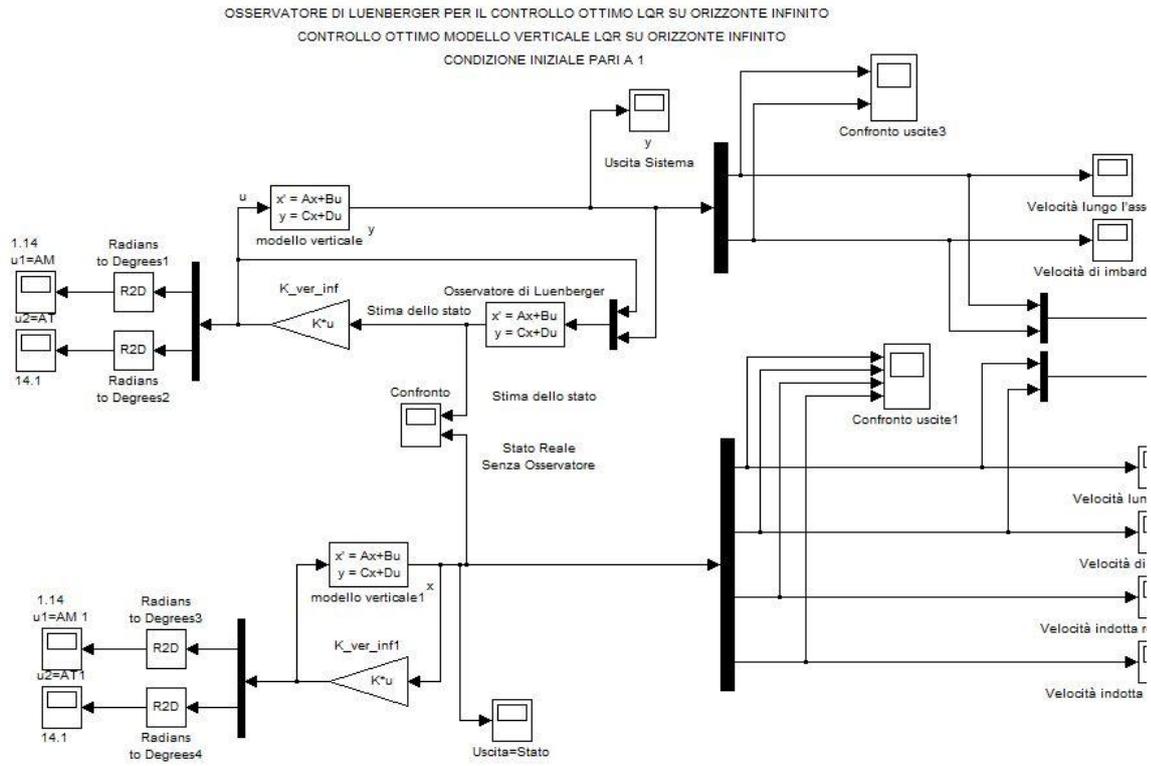
disp('Difatti con tale vettore si ha che la matrice A_ver-L_ver*C_ver ha autovalori in:');
eig(A_ver-L_ver*C_ver)

%%Per aver un osservatore che abbia in ingresso solo y (cosa fattibile se K
%%è costante)

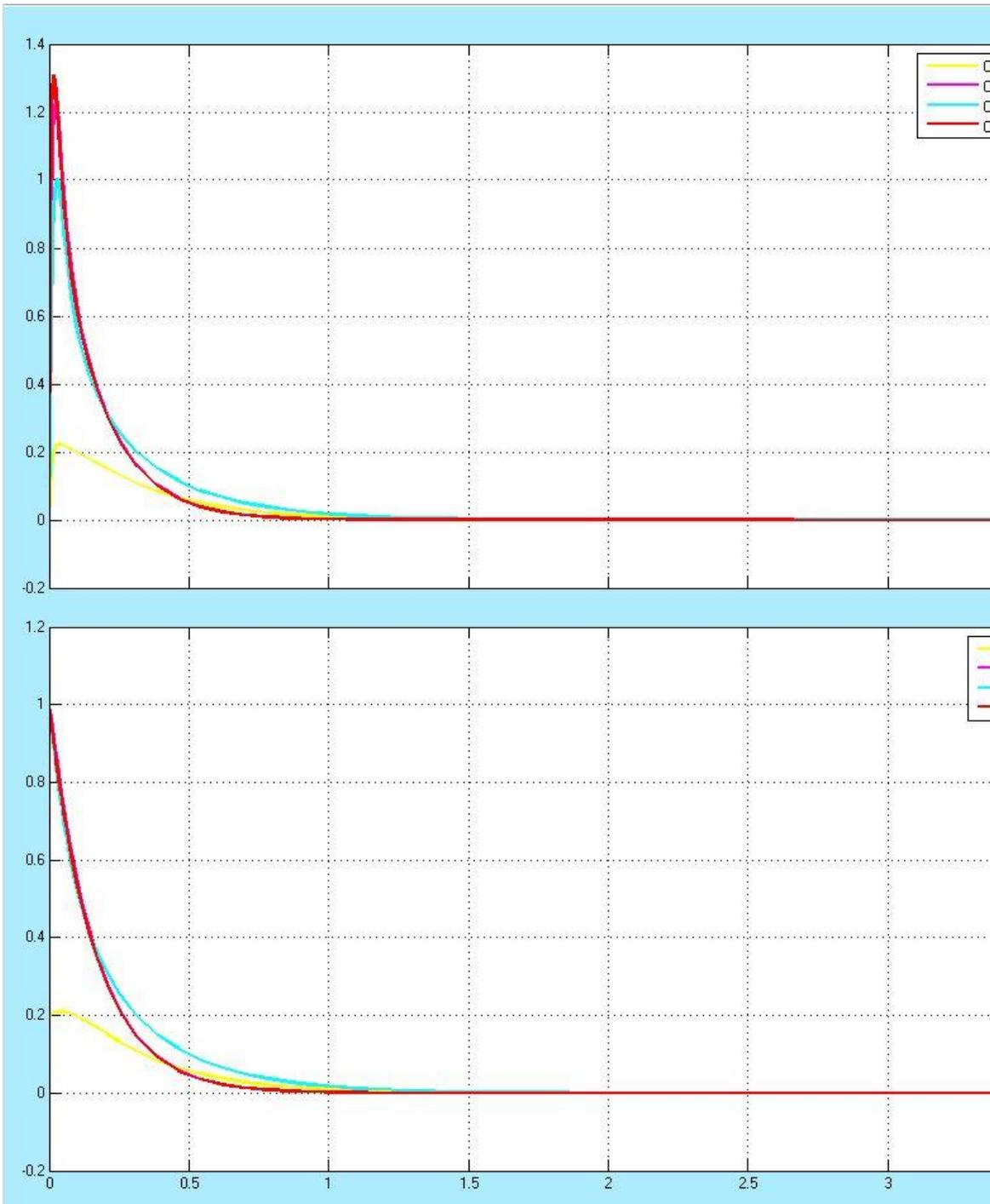
A_oss_ver=A_ver-L_ver*C_ver-B_ver*K_ver_inf;

```

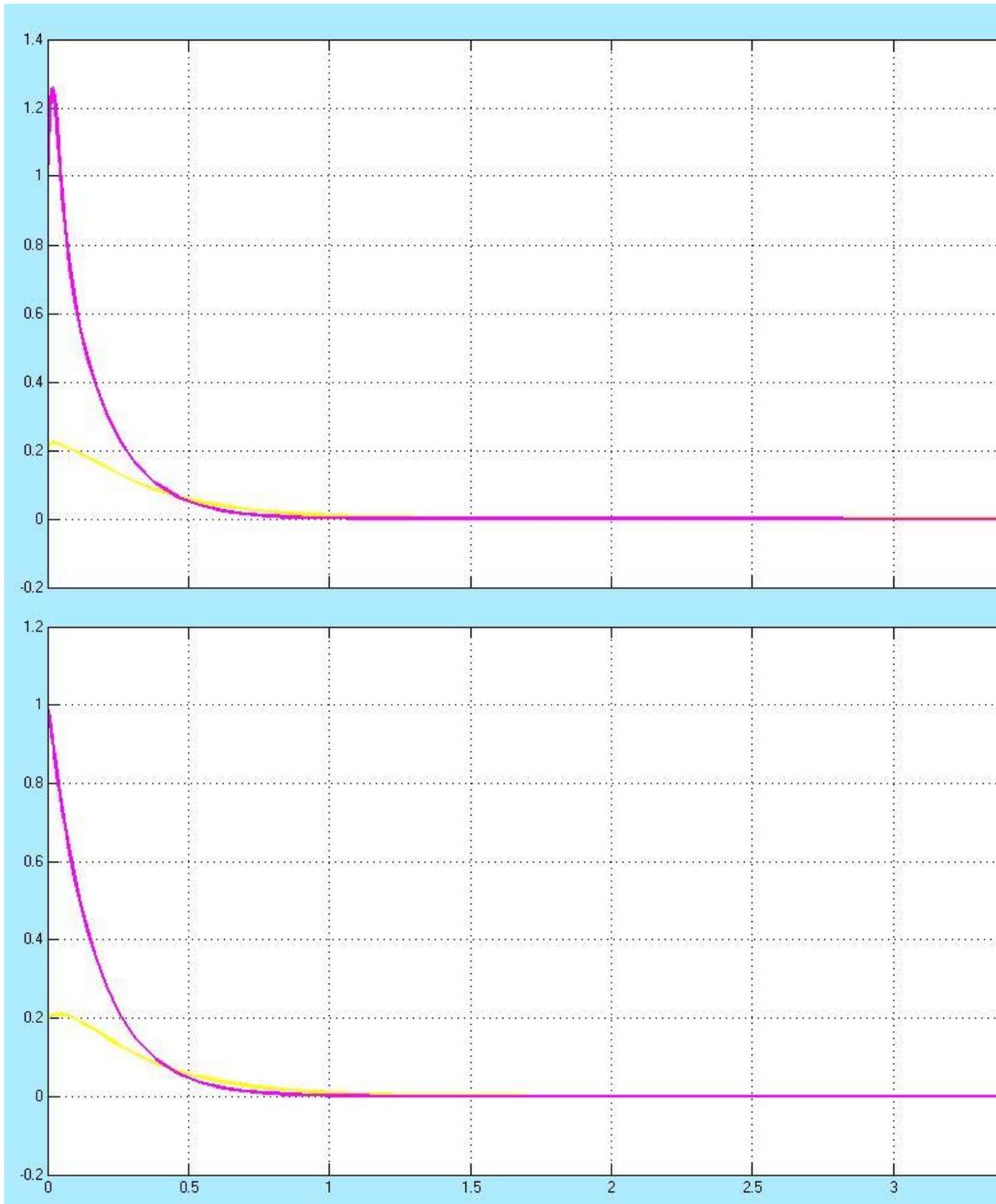
Per determinare le prestazioni ottenute, e confrontarle con quelle che si ottengono nel caso in cui in uscita fosse disponibile tutto lo stato è stato realizzato un apposito schema Simulink:



Di seguito plot del confronto stato-stimato/stato reale



Di seguito plot del confronto uscita del sistema con stato-stimato/ uscita del sistema con stato reale



Osservatore per il sottosistema orizzontale

L'osservatore che è stato progettato per il sottosistema orizzontale è stato dimensionato in base al guadagno del regolatore ottimo LQ su orizzonte infinito

`K_hor_inf =`

46.6016	-69.7345	-30.1518	-16.0629	3.6737	-4.1423	1.5362	-0.0105
14.6301	221.0884	-9.5218	50.7428	1.1796	13.0270	-0.0154	1.5765

Ricordiamo che per i poli del sistema a ciclo chiuso del sistema con retroazione di stato e guadagno calcolato con tecnica LQ sono dati dagli autovalori della matrice



$$A_{hor} - B_{hor} * K_{hor_inf}$$

che risultano:	-25.6988+19.1862i
	-25.6988-19.1862i
	-16.2296+13.6344i
	-16.2296-13.6344i
	-7.7472+13.6826i
	-7.7472-13.6826i
	-6.4034+6.8499i
	-6.4034-6.8499i

Il piazzamento dei poli dell'osservatore è stato fatto grazie all'ausilio della funzione place di Matlab, che di fatto implementa un algoritmo di ottimizzazione e piazza i poli nella posizione più vicina possibile a quella richiesta e ci restituisce la matrice L trasposta.

In definitiva i poli dell'osservatore sono stati locati ad i seguenti valori:

-250.0000
-160.0000
-250.0000
-160.0000
-80.0000
-80.0000
-70.0000
-70.0000

Il codice Matlab, che permette di determinare tale osservatore e di seguito riportato

```
%% OSSERVATORE DI LUENBERGER PER IL MODELLO ORIZZONTALE
CONTROLLATO CON
% GUADAGNO DEL REGOLATORE OTTIMO LQ SU ORIZZONTE INFINITO
clear all
close all
clc

%%Carichiamo i dati del progetto LQR su orizzonte infinito
LQRinfinito_hor
eig(A_hor-B_hor*K_hor_inf)
%%I poli ad anello chiuso risultano:
%-25.6988 +19.1862i
%-25.6988 -19.1862i
%-16.2296 +13.6344i
%-16.2296 -13.6344i
% -7.7472 +13.6826i
% -7.7472 -13.6826i
% -6.4034 + 6.8499i
% -6.4034 - 6.8499i
%Si devono piazzare i poli di A-L*C_hor e non A-C_hor*L! Allora
%trasponendo A-L*C_ver si ha: (A-L*C_hor)'=(A'-C_hor'L') possiamo usare
%il comando place (la trasposta ha gli stessi autovalori della matrice
%originaria se quadrata) come segue:

modi_errore=[-250 -250 -160 -160 -80 -80 -70 -70];
L_hor_T=place(A_hor',C_hor',modi_errore); %%ottenendo il vettore L_ver trasposto
```



```

disp('Il vettore L_ver che definisce l'osservatore di Luenberger per il modello orizzontale
controllato LQR su orizzonte infinito è:');
L_hor=L_hor_T'

disp('Difatti con tale vettore si ha che la matrice A_hor-L_hor*C_hor ha autovalori in:');
eig(A_hor-L_hor*C_hor)

%%Per aver un osservatore che abbia in ingresso solo y (cosa fattibile se K
%%è costante)
A_oss_hor=A_hor-L_hor*C_hor-B_hor*K_hor_inf;

%%SE SI RETROAZIONANO SOLO LE POSIZIONI LE COSE VANNO MALE
%% SUPPONIAMO ORA DI POTER MISURARE SOLO u e v e theta fi (velocità lineari
beccheggio e rollio)

C_hor2=[1 0 0 0 0 0 0
        0 1 0 0 0 0 0
        0 0 1 0 0 0 0
        0 0 0 1 0 0 0];

%Si deve ricalcolare L, lo indico con L_hor2 METTO DEI MODI PIÙ VELOCI
%PERCHÈ LA RICOSTRUZIONE È MENO SEMPLICE

modi_errore2=[-600 -600 -580 -580 -440 -440 -300 -300]; %%ATTENZIONE
FUNZIONA MOLTO MEGLIO CON QUESTI MODI
L_hor2_T=place(A_hor',C_hor2',modi_errore2); %%ottenendo il vettore L_ver trasposto

disp('Il vettore L_ver che definisce l'osservatore di Luenberger per il modello orizzontale
controllato LQR su orizzonte infinito è:');

L_hor2=L_hor2_T'

disp('Difatti con tale vettore si ha che la matrice A_hor-L_hor2*C_hor2 ha autovalori in:');

eig(A_hor-L_hor2*C_hor2)

%%Per aver un osservatore che abbia in ingresso solo y (cosa fattibile se K
%%è costante)
A_oss_hor2=A_hor-L_hor2*C_hor2-B_hor*K_hor_inf;

%% SUPPONIAMO ORA DI POTER MISURARE SOLO u e v e q p (velocità lineari e
velocità angolari)

C_hor3=[0 0 1 0 0 0 0
        0 0 0 1 0 0 0
        0 0 0 0 1 0 0
        0 0 0 0 0 1 0];

%Si deve ricalcolare L, lo indico con L_hor2 METTO DEI MODI PIÙ VELOCI
%PERCHÈ LA RICOSTRUZIONE È MENO SEMPLICE

modi_errore3=[-600 -600 -580 -580 -440 -440 -300 -300]; %%ATTENZIONE FUNZIONA
MOLTO MEGLIO CON QUESTI MODI
L_hor3_T=place(A_hor',C_hor3',modi_errore3); %%ottenendo il vettore L_ver trasposto

```



disp('Il vettore L_{ver} che definisce l'osservatore di Luenberger per il modello orizzontale controllato LQR su orizzonte infinito è:');

$L_{hor3}=L_{hor3_T}$

disp('Difatti con tale vettore si ha che la matrice $A_{hor}-L_{hor2}*C_{hor2}$ ha autovalori in:');

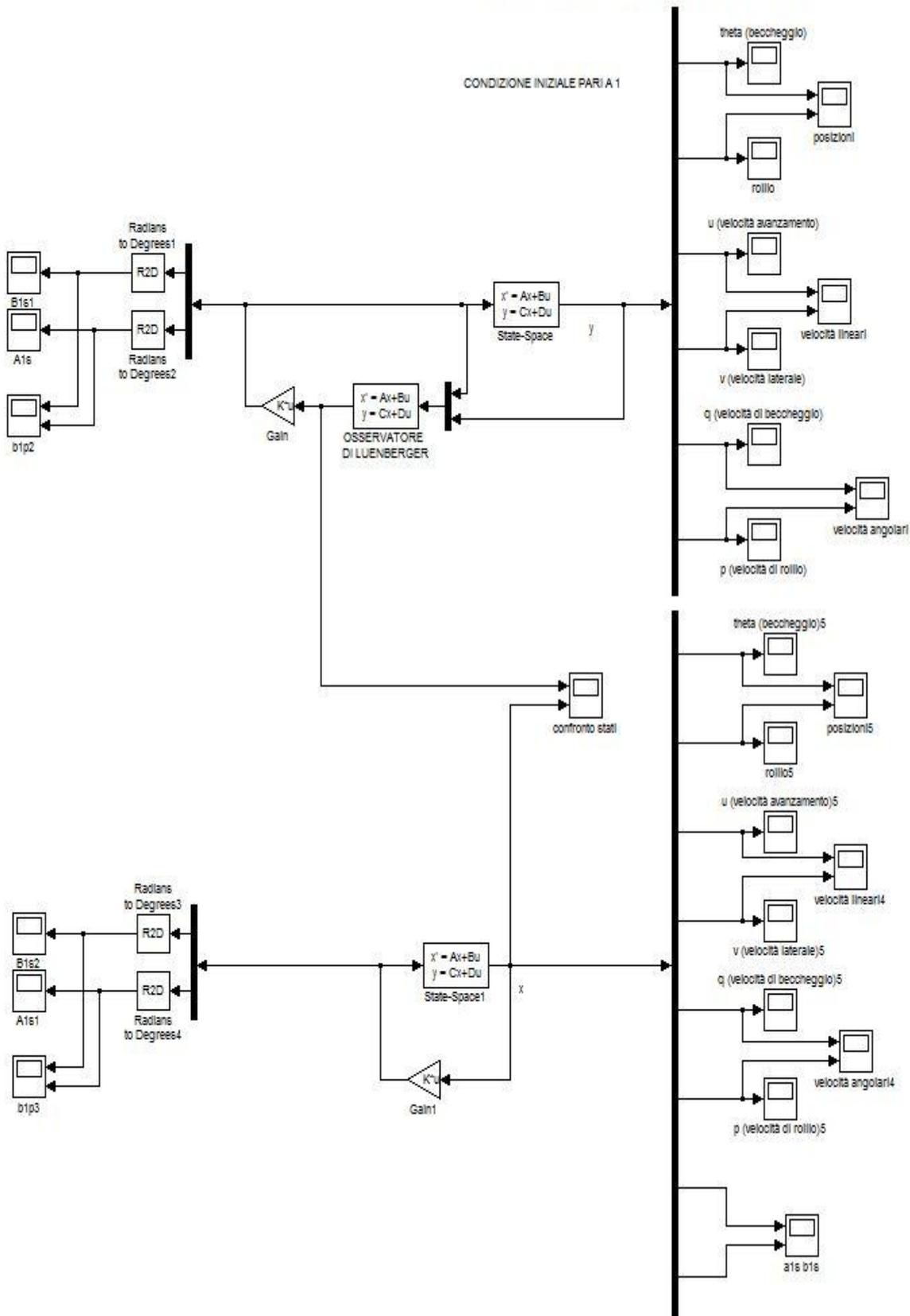
$eig(A_{hor}-L_{hor3}*C_{hor3})$

%%Per aver un osservatore che abbia in ingresso solo y (cosa fattibile se K
%%è costante)

$A_{oss_hor3}=A_{hor}-L_{hor3}*C_{hor3}-B_{hor}*K_{hor_inf}$

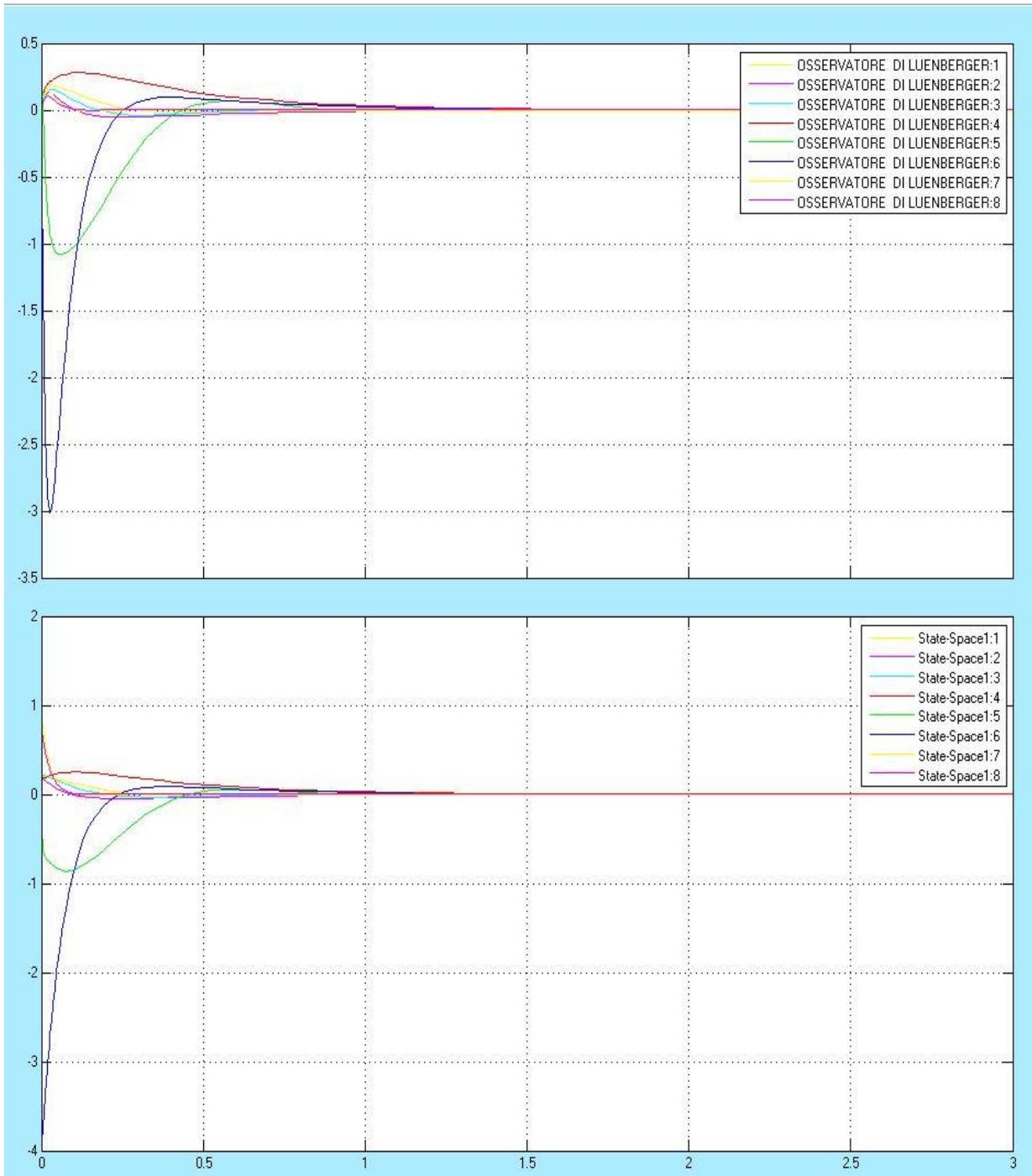


MODELLO ORIZZONTALE LQR SU ORIZZONTE INFINITO
 solo sulle posizioni vanno fatti i discorsi rigorosi sulla sopraelongazione



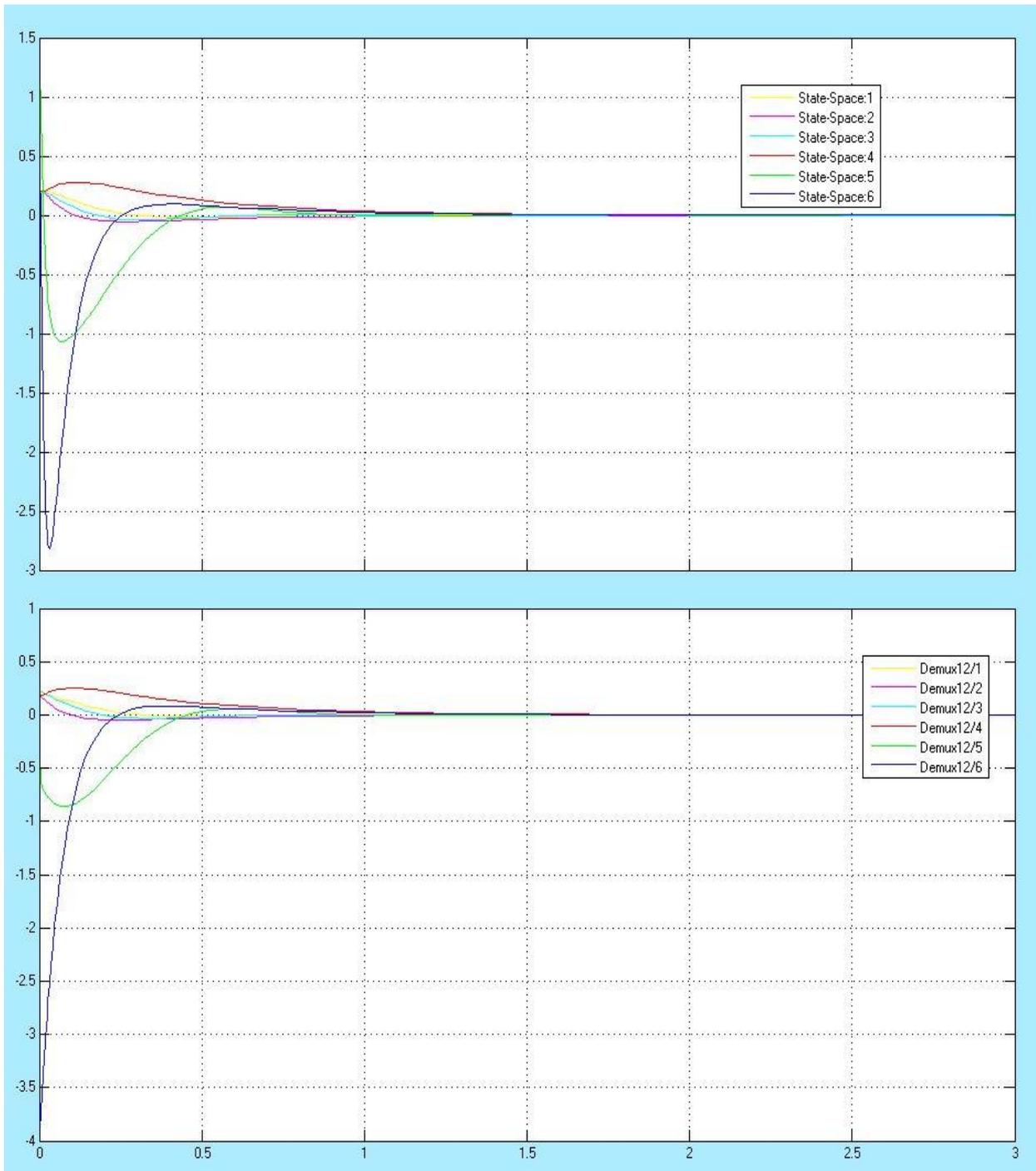


CONFRONTO FRA GLI STATI stato stimato/stato reale





Confronto uscite





Bibliografia

- [1] O. Tanner, "Modeling, Identification and Control of Autonomous Helicopters ", A dissertation submitted to the SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH, ISBN 3-906483-04-5.
- [2] G.Fiore, "Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Aerospaziale".
- [3] Wikipedia, voce "Elicottero", <http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=53437082>.
- [4] Wikipedia, voce "Rotore (Aeronautica)", <http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=53437082>.
- [5] Enciclopedia Rizzoli, vol. 5 ed. RCS -Rizzoli, 1988 voce "Elicottero"
- [6] Wikipedia, voce "Piatto oscillante", <http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=54856113>.
- [7] P. Dorato, C. Abdallah, V. Cerone, Linear-Quadratic Control, An Introduction. Prentice Hall, 1995.