Richiami sui sistemi lineari

Rappresentazione ISU

- Ricordiamo che la rappresentazione ISU di un sistema LTI a tempo-continuo è del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

dove *A*, *B*, *C*, *D* sono matrici opportune la cui dimensione dipende dall'ordine del sistema, dal numero di ingressi e dal numero di uscite.

- Le rappresentazioni ISU si prestano in modo del tutto naturale a rappresentare i sistemi MIMO.
- In particolare se il sistema è di ordine *n* con *m* ingressi e *r* uscite, avremo

$$x(t) \in R^n \qquad u(t) \in R^m \qquad y(t) \in R^r$$

$$A \in R^{nxn} \qquad B \in R^{nxm} \qquad C \in R^{rxn} \qquad D \in R^{rxm}$$

- Un sistema LTI a tempo-discreto si può invece rappresentare come segue

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Nell’ambito di questo corso tratteremo essenzialmente sistemi LTI a tempo-continuo; tuttavia i sistemi a tempo-discreto saranno utili per derivare in maniera semplificata e più intuitiva alcuni risultati validi anche nel tempo-continuo.

Funzione di trasferimento

- Una rappresentazione alternativa di un sistema lineare, nel caso SISO, è costituita dalla funzione di trasferimento (FdT).
- La funzione di trasferimento si presenta sotto forma del rapporto di due polinomi della variabile complessa s.
- Essa è definita come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita e la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Le varie rappresentazioni della fdt

- Per illustrare le varie rappresentazioni di una stessa funzione di trasferimento ricordiamo che un polinomio del secondo ordine avente radici complesse coniugate α±jω può avere le seguenti equivalenti rappresentazioni:

$$s^2 + a_1 s + a_2 = a_2\left(1 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{s^2}{a_2}\right) = a_2\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$$

dove:

$$\omega_n = \sqrt{a_2} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \qquad \text{pulsazione naturale}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \qquad \text{coefficiente di smorzamento}$$

- Consideriamo ad esempio

$$W(s)=\frac{s+2}{s^3+3s^2+5s+3}$$ rapporto di polinomi

$$=\frac{s+2}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$ zeri - poli

$$=\frac{2}{3}\frac{(1+0.5s)}{(1+s)\left(1+\frac{2}{3}s+\frac{s^2}{3}\right)}$$ guadagno e costanti di tempo

$$=\frac{2}{3}\frac{(1+0.5s)}{(1+s)\left(1+\frac{2\cdot 1/\sqrt{3}}{\sqrt{3}}s+\frac{s^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)}$$

guadagno, costanti di tempo, pulsazioni naturali e coefficienti di smorzamento

- Dunque in generale la fdt può mettersi nella forma:

$$W(s) = k\,\frac{\left(1+s\tau_1^{'}\right)\left(1+s\tau_2^{'}\right)\cdots\left(1+\frac{2\xi_1^{'}}{\omega_{n1}^{'}}s+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right)\left(1+\frac{2\xi_2^{'}}{\omega_{n2}^{'}}s+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{'2}}\right)\cdots}{\left(1+s\tau_1\right)\left(1+s\tau_2\right)\cdots\left(1+\frac{2\xi_1}{\omega_{n1}}s+\frac{s^2}{\omega_{n1}^{2}}\right)\left(1+\frac{2\xi_2}{\omega_{n2}}s+\frac{s^2}{\omega_{n2}^{2}}\right)\cdots}$$

k guadagno (statico)

$\tau_i^{'}$ costanti di tempo degli zeri reali

τ_i costanti di tempo dei poli reali

$\xi_i^{'}$ coefficienti di smorzamento degli zeri complessi coniugati

ξ_i coefficienti di smorzamento dei poli complessi coniugati

$\omega_{ni}^{'}$ pulsazione naturale degli zeri complessi coniugati

ω_{ni} pulsazione naturale dei poli complessi coniugati

- I termini notevoli che compaiono nell’espressione di W(s) sono:
  - Poli (zeri) reali semplici $(1+s\tau)^{\pm 1}$, dove τ è detta costante di tempo.
  - Poli (zeri) reali multipli $(1+s\tau)^{\pm 2}$
  - Poli (zeri) complessi semplici $(s^2/\omega_n^2+2\xi/\omega_n s+1)^{\pm 1}$ dove ω_n è detta pulsazione naturale e ξ coefficiente di smorzamento.
  - Poli complessi multipli (raro)

- Un sistema MIMO viene descritto attraverso una Matrice di Trasferimento, cioè una matrice i cui elementi sono FdT.

$$\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \cdots & W_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{r1}(s) & W_{r2}(s) & \cdots & W_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

Legame tra le rappresentazioni

- Il legame tra la rappresentazione ISU e la rappresentazione IU (data dalla FdT) è espressa dalla formula

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ricordiamo che i poli della MdT di un dato sistema rappresentano un sotto-insieme (non necessariamente stretto) degli autovalori della matrice dinamica *A*.

Risposta dei sistemi LTI

- La risposta *nello stato* di un sistema LTI a tempo-continuo, a partire da una data condizione iniziale x_0, può porsi nella forma (evoluzione libera più forzata):

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

La funzione matriciale e^{At} si chiama *Matrice di Transizione* e può essere calcolata sia analiticamente che numericamente.

- In particolare e^{At} può calcolarsi come sommatoria di esponenziali scalari attraverso l'espressione derivante dalla *decomposizione spettrale* (qui si fa l'ipotesi che tutti gli autovalori di A siano distinti):

$$e^{At} = \sum_i e^{\lambda_i t} u_i w_i^T$$

$$\lambda_i \quad \text{autovalore } i-\text{esimo di } A$$

$$u_i \; : \; Au_i = \lambda_i u_i \quad \text{autovettore destro } i-\text{esimo di } A$$

$$w_i \; : \; w_i^T A = \lambda_i w_i^T \quad \text{autovettore sinistro } i-\text{esimo di } A$$

$$\text{Nota: ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti}$$

- Data l'espressione di e^{At}, si noti che l'evoluzione forzata nello stato può scriversi

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau$$

Da cui si deduce che l'influenza dell'ingresso *u(.)* nella direzione individuata nello spazio di stato dall'autovettore u_i dipende temporalmente dalla legge $e^{\lambda i t}$ e come ampiezza da $w^T{}_i B$.

Se $w^T{}_i B=0$ l'ingresso non dà nessun contributo nella direzione u_i.

Vedremo che questo corrisponde alla situazione in cui il modo di evoluzione i-esimo non è controllabile.

- Se si suppone che gli autovalori λ_i, $i=1,\ldots,p$ siano reali e gli autovalori λ_h, $h=1,\ldots,q$ siano complessi coniugati, con $p+2q=n$, si può scrivere:

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{p} e^{\lambda_i t} u_i w_i^T + \sum_{h=1}^{q} \begin{pmatrix} u_{ha} & u_{hb} \end{pmatrix} e^{\alpha_h t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_h t) & sen(\omega_h t) \\ sen(\omega_h t) & \cos(\omega_h t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{ha}^T \\ w_{hb}^T \end{pmatrix}$$

λ_i autovalori reali di A

u_i autovettori reali destri di A

w_i autovettori reali sinistri di A

$\alpha_h \pm j\omega_h$ autovalori complessi coniugati di A

$u_{ha} \pm ju_{hb}$ autovettori destri complessi coniugati di A

$w_{ha} \pm jw_{hb}$ autovettori sinistri complessi coniugati di A

- I termini dipendenti da $e^{\lambda_i t}$ sono detti modi di evoluzione *aperiodici*.
- I termini dipendenti da $e^{\alpha_h t}\, sen\omega_h t$, $e^{\alpha_h t}\, cos\omega_h t$, sono detti modi di evoluzione *pseudoperiodici*.
- Un altro modo per calcolare e^{At} analiticamente, è quello di effettuare l'antitrasformata della matrice di transizione

$$e^{At} = L^{-1}\big(\Phi(s)\big)$$

$$\Phi(s) = \left(sI - A\right)^{-1}$$

- Infine e^{At} può essere calcolata numericamente attraverso l'espressione derivante dal suo sviluppo in serie:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots$$

- La risposta in uscita di un sistema LTI a tempo-continuo, a partire da una data condizione iniziale x_0, può porsi nella forma

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

dove *W(t)* è la *risposta impulsiva* del sistema.

- Utilizzando l’espressione di e^{At}, l’uscita può scriversi

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} Cu_i e^{\lambda_i t} w_i^T x_0 + \sum_{i=1}^{n} Cu_i \int_0^t e^{\lambda_i (t-\tau)} w_i^T Bu(\tau)d\tau$$

Si noti che se $Cu_i = 0$ il modo di evoluzione associato all’autovalore i-esimo non compare in uscita. Come vedremo questo è legato al fatto che il modo di evoluzione *i-esimo* non è osservabile.

Inoltre, relativamente *all’i-esimo* modo di evoluzione, l’azione dell’ingresso *u(.)* è diretta (nello spazio delle uscite) nella direzione individuata dal vettore Cu_i e l’ampiezza dipende da $w^T_i B$.

- La risposta di un sistema LTI a tempo-continuo può essere calcolata:
  - Analiticamente, utilizzando il metodo della trasformata di Laplace
  - Numericamente attraverso la simulazione al calcolatore

Cambio di base nello spazio di stato

- Un dato sistema lineare possiede infinite rappresentazioni ISU tutte equivalenti tra loro.
- È possibile passare da una rappresentazione ad un’altra ad essa equivalente, attraverso una trasformazione di base nello spazio di stato.
- Si consideri un dato sistema avente una rappresentazione ISU individuata dalla quadrupla *(A,B,C,D)*. Sia *T* una matrice quadrata invertibile; consideriamo il cambio di base espresso da

$$z = T^{-1}x$$

- Attraverso il cambio di base giungiamo ad una nuova rappresentazione del tipo

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}z + Du$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT \qquad \hat{B} = T^{-1}B$$
$$\hat{C} = CT$$

- Attraverso il cambio di base giungiamo ad una nuova rappresentazione del tipo

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$$
$$y = \hat{C}z + Du$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT \qquad \hat{B} = T^{-1}B$$
$$\hat{C} = CT$$