Proprietà Strutturali dei Sistemi Dinamici: Stabilità

Stabilità

- Consideriamo il sistema descritto dall'equazione

$$\dot{x} = f(x) \qquad x(t) \in R^n \quad t \geq 0$$

Denotiamo con $x(t,x_0)$ la traiettoria all'istante t a partire dallo stato iniziale x_0 , assumendo che $f(0)=0$, e cioè che lo stato $x=0$ sia un punto di equilibrio del sistema in esame.

- Il punto di equilibrio *x=0* si dice essere *stabile* (secondo Lyapunov) se si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \; : \; \left\| \mathrm{x}_0 \right\| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left\| x(t, x_0) \right\| < \varepsilon \;\; t \geq 0$$

Attrattività

- Il punto di equilibrio *x=0* si dice essere *attrattivo* se si ha:

$$\exists \delta > 0 \ : \ \|x_0\| < \delta \ \Rightarrow \ \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0$$

Si noti che in generale stabilità e attrattività sono concetti indipendenti, cioè l’uno non implica l’altro e viceversa.

Asintotica Stabilità

- Il punto di equilibrio $x=0$ si dice essere *asintoticamente stabile* se esso è allo stesso tempo stabile e attrattivo.
- Si noti che lo studio della stabilità di un qualsiasi punto di equilibrio diverso da zero (eventualmente sotto ingresso non nullo), si può sempre ricondurre allo studio della stabilità dello zero effettuando un opportuno cambio di variabili nello spazio di stato.

- Spesso, con abuso di linguaggio, si parla di stabilità del sistema, piuttosto che del punto di equilibrio zero.
- L’abuso di linguaggio non si verifica nel caso di sistemi lineari, in quanto si dimostra che il punto di equilibrio zero è (asintoticamente) stabile se e solo se sono (asintoticamente) stabili tutti i punti di equilibrio esibiti dal sistema

Stabilità dei sistemi LTI

- Un sistema LTI a tempo-continuo è asintoticamente stabile se e solo se *tutti gli autovalori della matrice dinamica A sono a parte reale negativa*.
- Questo fatto discende immediatamente dal fatto che la soluzione dell'equazione differenziale matriciale

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0$$

si può mettere nella forma (facendo per semplicità l'ipotesi di autovalori distinti)

$$x(t) = e^{At}x_0 = \left[\sum_i U_i e^{\lambda_i t} + \sum_h \left(V_h e^{\alpha_h t} sen(\omega_h t) + W_h e^{\alpha_h t}\cos(\omega_h t)\right)\right]x_0$$

λ_i autovalori reali di A

$\alpha_h \pm j\omega_h$ autovalori complessi coniugati di A

$U_i \quad V_h \quad W_h$ matrici note dipendenti dagli autovettori di A

- Dunque lo studio della stabilità di un sistema LTI si riduce al calcolo degli autovalori della matrice *A*, e cioè al calcolo delle radici del polinomio caratteristico di *A*.
- Un altro metodo per lo studio della stabilità di un sistema LTI è quello basato sul *criterio di Routh*, che non richiede in modo esplicito il calcolo degli autovalori.

- Al fine di illustrare un altro metodo per testare la asintotica stabilità di un sistema lineare, dobbiamo richiamare alcune definizioni sulle matrici.
- Una matrice quadrata P in R^{nxn} è detta essere simmetrica se

$$P = P^T$$

Una matrice simmetrica è caratterizzata dal fatto che tutti i suoi autovalori sono reali.

- Una matrice simmetrica P è detta essere definita positiva (negativa), e si scrive $P>(<)0$, se risulta

$$x^T P x > (<) 0 \qquad \forall x \in R^n - \{0\}$$

Non è agevole testare la definita positività (negatività) di una matrice simmetrica attraverso la definizione. Tuttavia giunge in aiuto il seguente risultato.

Teorema: Una matrice simmetrica P è definita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi (negativi).

- Una matrice simmetrica P è detta essere semidefinita positiva (negativa), e si scrive $P \geq (\leq) 0$, se risulta

$$x^T P x \geq (\leq) 0 \qquad \forall x \in R^n$$

Teorema: Una matrice simmetrica P è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti i suoi autovalori sono non-negativi (non-positivi).

Una matrice simmetrica P è detta essere indefinita, se non è né semi-definita positiva né semi-definita negativa.

- Ritornando ai metodi per testare la asintotica stabilità di un sistema LTI, utilizzando la teoria della stabilità di Lyapunov, si può dimostrare il seguente importante teorema.
- **Teorema.** Il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax$$

è asintoticamente stabile se e solo se esiste una matrice *P* definita positiva tale che

$$A^T P + PA < 0$$

oppure

$$AP + PA^T < 0$$

- Il teorema precedente non è tanto importante per lo studio della stabilità in sé, in quanto esistono metodi di più semplice applicazione per sistemi LTI.
- L'importanza del risultato enunciato sarà chiara quando tratteremo il problema del controllo con retroazione dello stato.
- Si noti che la condizione espressa nel teorema è una disuguaglianza lineare che ha per incognita la matrice P.
- In Inglese tali disuguaglianze vengono dette LMI (Linear Matrix Inequalities).

- Il problema di trovare una matrice $P>0$ che soddisfi la LMI $A^TP+PA<0$, è un problema di esistenza di una soluzione ammissibile nello spazio delle matrici definite positive.
- Si può dimostrare che esso ricade nell'ambito dei problemi di *ottimizzazione convessa* e può essere risolto con l'ausilio di algoritmi molto efficienti dal punto di vista numerico.
- Il Matlab prevede un toolbox interamente dedicato alla soluzione di tali problemi di ammissibilità.

- Più in generale, attraverso le LMI è possibile testare l’appartenenza degli autovalori di A a specifiche regioni del piano complesso.
- In questo modo è possibile verificare, ad esempio, se eventuali requisiti su velocità di convergenza, pulsazione naturale e smorzamento dei poli siano soddisfatti dal sistema in esame.
- A questo proposito, definiamo una regione LMI come un sottoinsieme del piano complesso

$$\mathcal{D} := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \Lambda + z\Theta + z^*\Theta^T < 0 \right\}$$

dove Λ è una opportuna matrice simmetrica.
E’ possibile definire come regioni LMI diversi insiemi di interesse, ad es. una striscia verticale, un disco, un cono con vertice nell’origine.

- Il semipiano a sinistra della retta verticale di ascissa $-\alpha$ è definito da

$$z + z^* + 2\alpha < 0$$

Disco centrato in *(-q,0)* con raggio *r*

$$\begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+z^* & -r \end{bmatrix} < 0$$

Il settore conico con vertice nell'origine e angolo interno pari a 2θ è definito da

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)\left(z+z^*\right) & \cos(\theta)\left(z-z^*\right) \\ \cos(\theta)\left(z^*-z\right) & \sin(\theta)\left(z+z^*\right) \end{bmatrix} < 0$$

- Data una regione LMI *D*, si dimostra che gli autovalori della matrice dinamica *A* appartengono a *D* se e solo se

$$\Lambda \otimes P + \Theta \otimes (AP) + \Theta^T \otimes (PA^T) < 0$$

dove, date due matrici *A* e *B* di dimensioni qualsiasi, si ha (prodotto di Kroneker)

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

Stabilità ingresso-uscita (Input-output stability)

- Senza scendere in complicate definizioni matematiche, diciamo che un sistema è detto essere stabile ingresso-uscita se ad ingresso limitato corrisponde uscita limitata (partendo da condizioni iniziali nulle).
- Nel caso dei sistemi lineari questo si traduce nel dire che tutti i poli della MdT devono essere a parte reale negativa (questo fatto si intuisce facilmente se si pensa all'espressione dell'uscita nel dominio di Laplace).

- Come si relazionano, nel caso dei sistemi lineari, la stabilità di Lyapunov e quella ingresso-uscita?
- Ricordiamo che i poli della MdT sono un sottoinsieme (non necessariamente stretto) degli autovalori della matrice dinamica del sistema.
- Dunque se un sistema lineare è asintoticamente stabile esso è anche stabile ingresso-uscita.
- Il viceversa non vale; in altri termini la stabilità ingresso-uscita non implica la asintotica stabilità secondo Lyapunov.
- Ovviamente perché un sistema sia stabile ingresso-uscita ma *non* asintoticamente stabile secondo Lyapunov deve accadere che:
  - L'insieme dei poli sia un sottoinsieme *stretto* di quello degli autovalori
  - Almeno uno degli autovalori, che non ritroviamo come polo, deve avere parte reale positiva o nulla.

- Ad esempio il sistema lineare

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

non è asintoticamente stabile secondo Lyapunov ma è input-output stabile.