

Metodi Frequenziali per il Progetto di Controllori MIMO: Regolatori di Disaccoppiamento



- Nei corsi di controlli automatici sono state investigate una serie di tecniche per il progetto di controllori per sistemi SISO.
- Tali tecniche si basano essenzialmente su metodologie nel dominio della variabile complessa s o più in generale nel dominio della frequenza.
- In questa parte del corso vedremo come sia possibile estendere questa tipologia di tecniche ai sistemi MIMO.
- L'idea alla base è quella di disaccoppiare i diversi canali del sistema l'uno dall'altro.
- Questo ha il vantaggio di semplificare sia il progetto dei controllori (un controllore SISO per ciascun canale) sia l'azione di controllo del sistema stesso, in quanto, in una condizione ideale, ogni variabile di uscita risponderebbe al corrispondente segnale di riferimento.



- Per semplicità di esposizione faremo riferimento a sistemi con 2 ingressi e 2 uscite, ma gli approcci presentati possono essere estesi senza difficoltà concettuale a generici sistemi MIMO.
- Inoltre, per semplificare la trattazione, verrà considerato sempre il caso in cui il numero di ingressi è uguale a quello delle uscite; tali sistemi vengono detti “quadrati”.
- Per lo stesso motivo non si prenderà in considerazione la presenza di eventuali disturbi.
- Cominceremo con lo studio dei sistemi triangolari, che rappresenta un caso più semplice e permette di fare una serie di considerazioni per generalizzare il metodo a sistemi non triangolari.



Disaccoppiamento di sistemi triangolari

- Un sistema è detto essere triangolare se ha la seguente struttura:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$



- Nel caso di sistemi 2×2 si ha

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

Si vede subito che in un sistema triangolare, la prima uscita dipende solo da u_1 , la seconda uscita dipende sia da u_1 che da u_2 .

La prima cosa che si può pensare di fare, è di progettare due controllori SISO, uno per ciascun canale.

Per meglio introdurre quali siano le principali problematiche che si possono presentare, consideriamo un esempio.



Esempio.

- Consideriamo il sistema con 2 ingressi e 2 uscite

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} & 0 \\ \frac{k}{1+0.1s} & \frac{10}{1+s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} =: G(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

dove k è un parametro positivo.



- Supponiamo che si voglia progettare un controllore a ciclo chiuso MIMO tale che, in riferimento al primo canale, si abbia:
 - a) per $u_1 = 1(t)$, $u_2 = 0$, $|e_{1\infty}| \leq 0.1$
 - b) $\omega_{c1} \geq 0.1$;
 - c) margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi.
- In riferimento al secondo canale:
 - a) per $u_1 = 0$, $u_2 = 1(t)$, $|e_{2\infty}| \leq 0.01$
 - b) $\omega_{c2} \geq 5$;
 - c) margine di fase maggiore o uguale a 60 gradi.
- Inoltre, in presenza di segnali di riferimento contemporanei sui due ingressi deve essere minimizzato l'accoppiamento.

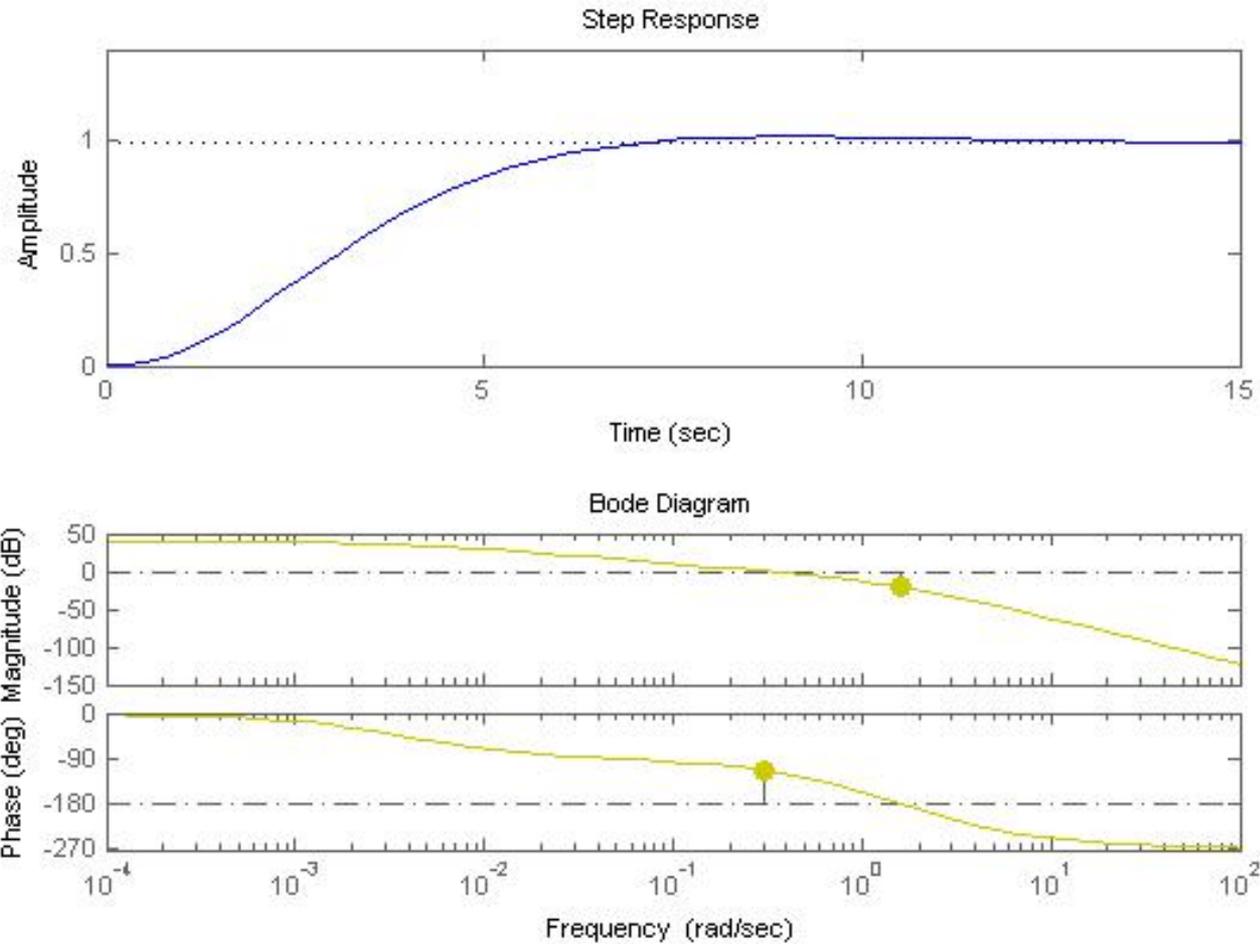


- In un primo tempo, progettiamo dei controllori separati per i due sistemi SISO $G_{11}(s)$ e $G_{22}(s)$.
- Per quanto riguarda $G_{11}(s)$, un possibile regolatore è quello avente FdT

$$R_1(s) = 8 \frac{(1+10s)(1+5s)}{(1+250s)(1+0.4s)}$$

che soddisfa tutti i requisiti sul primo canale, come si evince dai grafici che seguono.



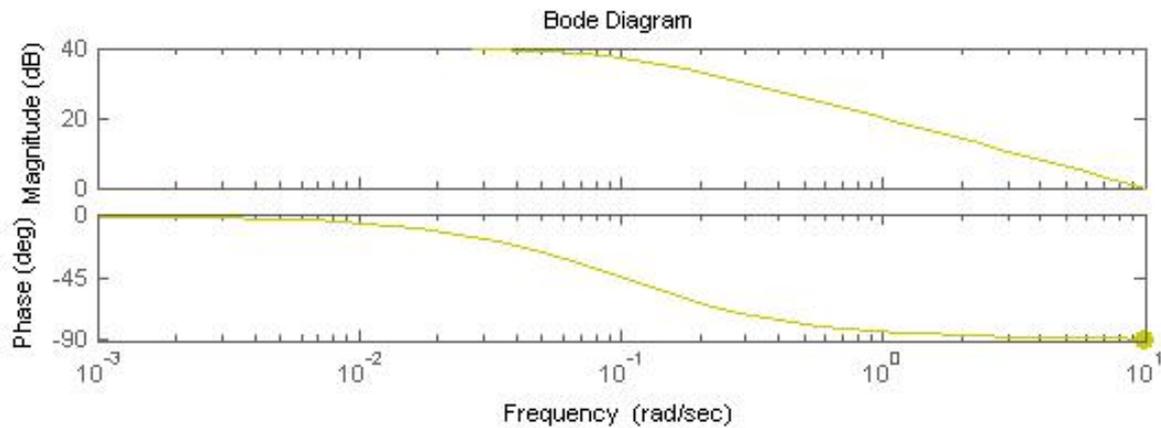
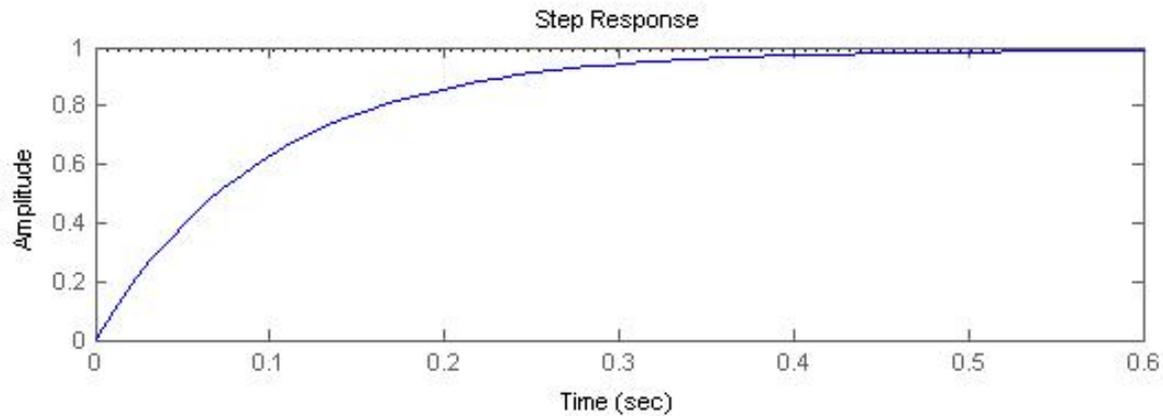


- Per quanto riguarda $G_{22}(s)$, un possibile regolatore è quello avente FdT

$$R_2(s) = 10 \frac{(1+s)}{(1+10s)}$$

che soddisfa tutti i requisiti sul secondo canale, come si evince dai grafici che seguono.

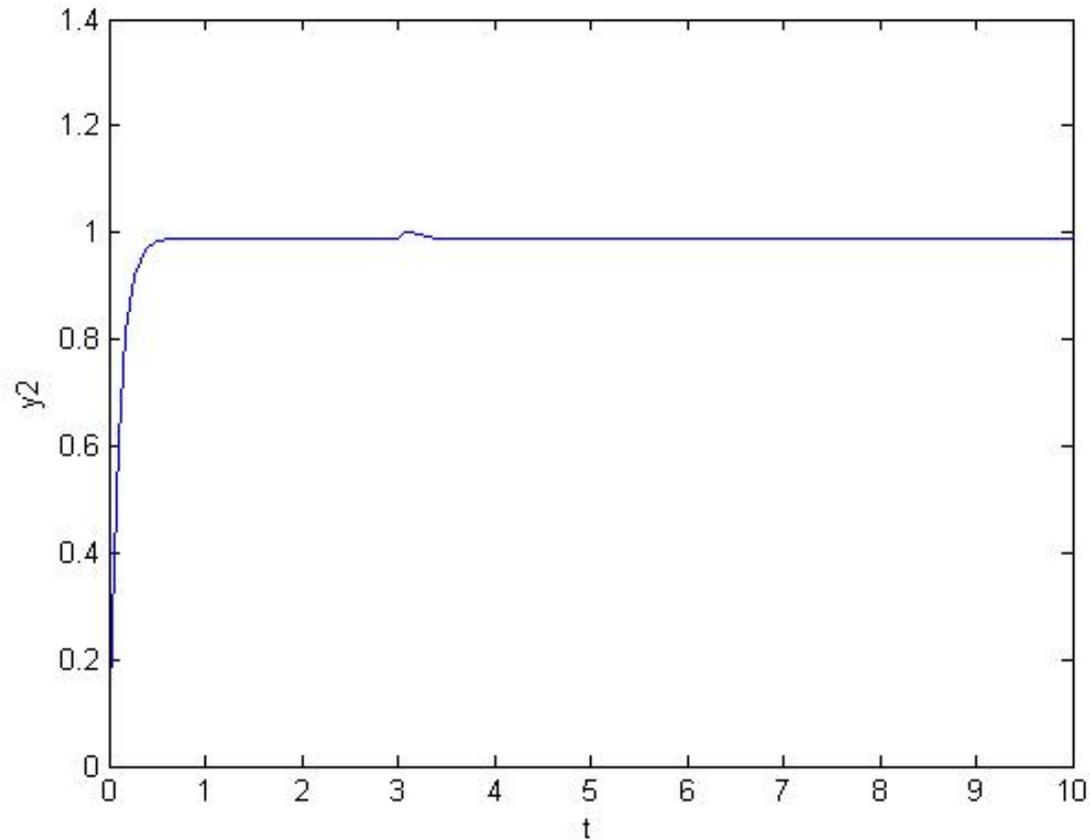




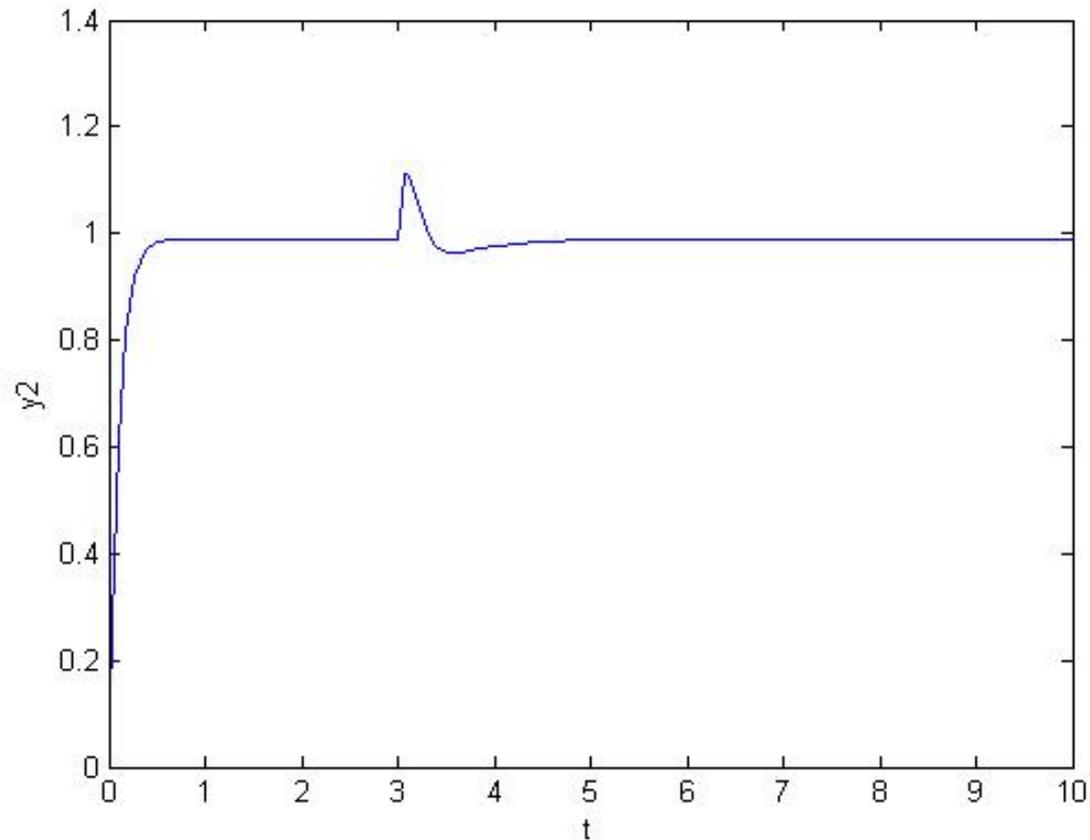
- Per valutare l'accoppiamento tra i due sottosistemi, nel seguito riportiamo l'andamento di y_2 in presenza dei seguenti segnali di riferimento
 - $u_1(t) = 1(t-3)$
 - $u_2(t) = 1(t)$
- Inoltre le simulazioni sono riportate per valori crescenti di k ($k=0.01, 0.1, 0.5$).



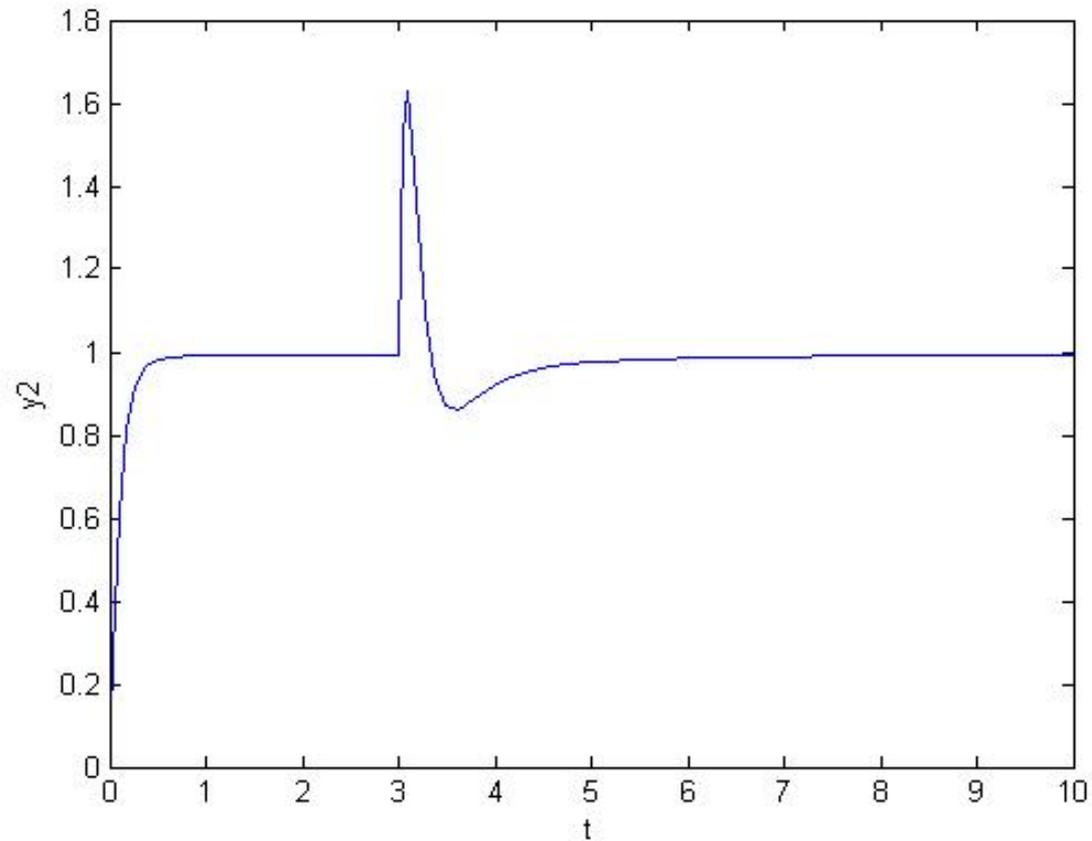
$k=0.01$



$k=0.1$



$k=0.5$



Si nota che al crescere di k la risposta del secondo sistema viene influenzata sempre di più da parte del primo ingresso.

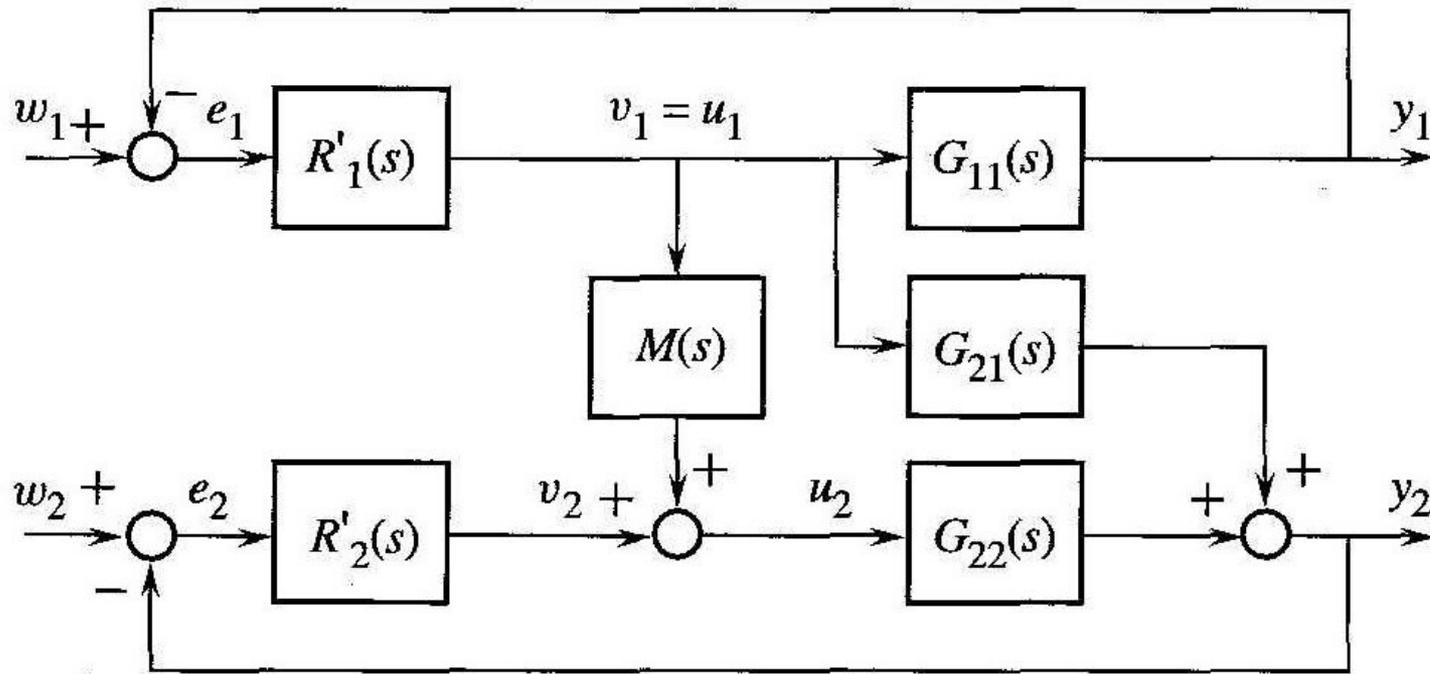
Ciò è ovvio in quanto al crescere di k aumenta l'influenza del termine di accoppiamento dovuto a G_{21} .

Nel seguito è descritta una procedura che, nel caso di sistemi triangolari, permette di ottenere un perfetto disaccoppiamento tra i due sotto-sistemi che compongono il sistema complessivo.



- In prima battuta si progetta un controllore SISO che agisce su G_{11} (che in ogni caso è disaccoppiato da G_{22})
- Successivamente, si osserva che u_1 può essere visto (dal punto di vista del secondo sotto-sistema) come se fosse un disturbo misurabile ed utilizzare una tecnica di cancellazione.
- A questo punto G_{22} viene ad essere disaccoppiato da u_1 e il progetto si può concludere con l'implementazione di un controllore SISO per il solo G_{22} .



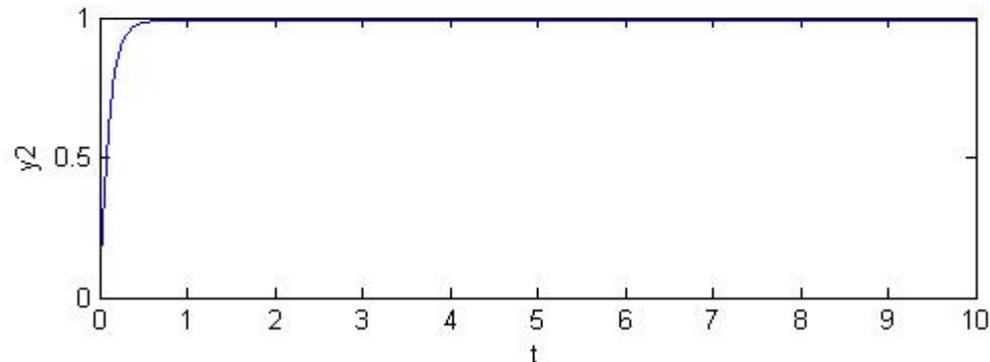
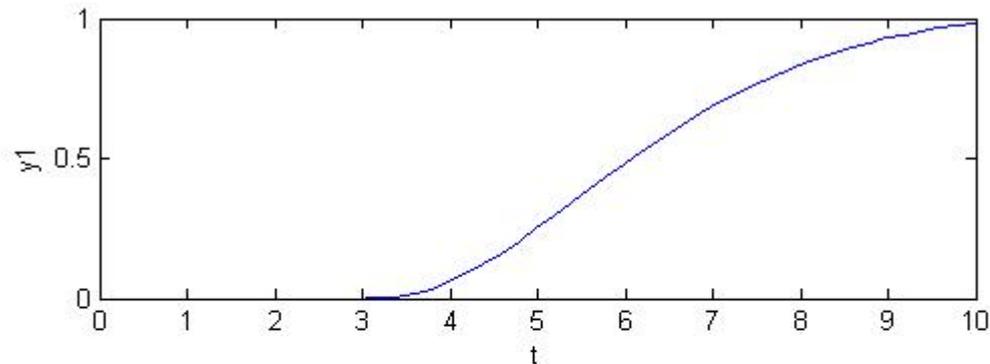


$$M(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)}$$



- Nel caso discusso nel nostro esempio risulta

$$M(s) = -k \frac{s+1}{s+10}$$



- Si noti che, come si è detto, il disaccoppiatore agisce per cancellazione.
- Dal punto di vista matematico, questo si traduce nel fatto che è richiesta l'inversione della FdT $G_{22}(s)$.
- Potrebbe dunque verificarsi la situazione in cui $M(s)$ non sia fisicamente realizzabile (ad es. $G_{22}(s)$ contiene ritardi di tempo e/o la FdT $G_{21}(s)/G_{22}(s)$ è impropria) .
- Per ovviare a quest'ultimo problema, si possono aggiungere poli ad alta frequenza, al di fuori dell'intervallo frequenziale di interesse, per soddisfare il requisito di realizzabilità.



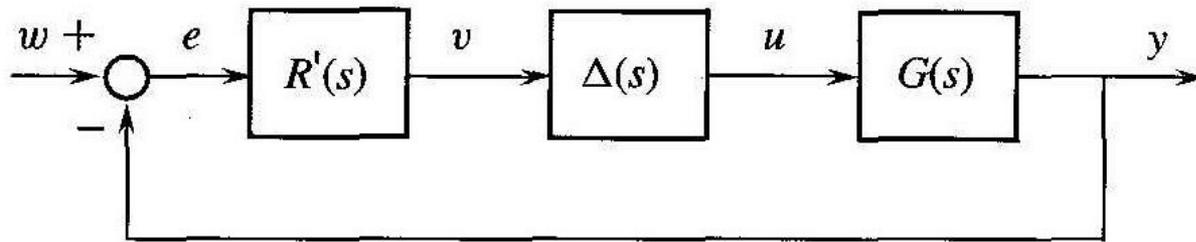
- In generale, per sistemi con m ingressi ed m uscite, con MdT triangolare, il problema di progetto si può ricondurre alla soluzione di m problemi SISO risolti in cascata.



Disaccoppiamento di Sistemi Generici

- Lo schema di disaccoppiamento per sistemi triangolari può essere schematizzato in modo compatto come segue

$$U(s) = \Delta(s)V(s) \quad , \quad V(s) = R'(s)E(s)$$



$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 1 \end{bmatrix}, \quad R'(s) = \begin{bmatrix} R'_1(s) & 0 \\ 0 & R'_2(s) \end{bmatrix}, \quad E(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) - Y_2 \mathbf{I} \\ W_2(s) - Y_1 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$



- Il blocco $\Delta(s)$ rappresenta l'elemento di disaccoppiamento.
- È progettato in modo tale che la MdT $G(s)\Delta(s)$ assuma struttura diagonale

$$G_d(s) = G(s)\Delta(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ 0 & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Nel caso di sistemi non triangolari si può pensare di estendere questa tecnica trovando una MdT di disaccoppiamento $\Delta(s)$ che renda diagonale il prodotto $G(s)\Delta(s)$.

Un primo approccio è quello del cosiddetto “disaccoppiamento in avanti”.



Disaccoppiamento “in avanti”

- Dall’equazione

$$G_d(s) = G(s)\Delta(s)$$

si ricava immediatamente

$$\Delta(s) = G(s)^{-1} G_d(s)$$

$$R(s) = \Delta(s)R'(s) = G(s)^{-1} G_d(s)R'(s)$$



- Dalla precedente relazione ci rendiamo conto che un regolatore di questo tipo agisce per cancellazione.
- Ricordiamo, dalla teoria sviluppata nei corsi di controlli per sistemi SISO, che perché un regolatore progettato per cancellazione sia fisicamente realizzabile $G(s)$ **non deve contenere ritardi di tempo**.
- Inoltre $G(s)$ non deve avere né poli né zeri a parte reale positiva o nulla.
- La condizione sugli zeri si traduce, per sistemi MIMO, nel fatto che deve essere

$$\det(G(s)) \neq 0 \quad \text{Re}(s) \geq 0$$



- Se le ipotesi precedenti sono soddisfatte, posto

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{12}(s) \\ \Delta_{21}(s) & \Delta_{22}(s) \end{bmatrix}$$

affinché la matrice $G_d(s) = G(s)\Delta(s)$ sia diagonale, le incognite $\Delta_{ij}(s)$ devono soddisfare le condizioni

$$G_{11}(s)\Delta_{12}(s) + G_{12}(s)\Delta_{22}(s) = 0$$

$$G_{21}(s)\Delta_{11}(s) + G_{22}(s)\Delta_{21}(s) = 0$$



- Il sistema precedente ammette infinite soluzioni;
la scelta più comune è

$$\Delta_{11}(s) = \Delta_{22}(s) = 1$$

$$\Delta_{12}(s) = -G_{12}(s) / G_{11}(s)$$

$$\Delta_{21}(s) = -G_{21}(s) / G_{22}(s)$$

a cui corrisponde il sistema disaccoppiato

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 0 \\ 0 & G_{22}(s) - \frac{G_{21}(s)G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$



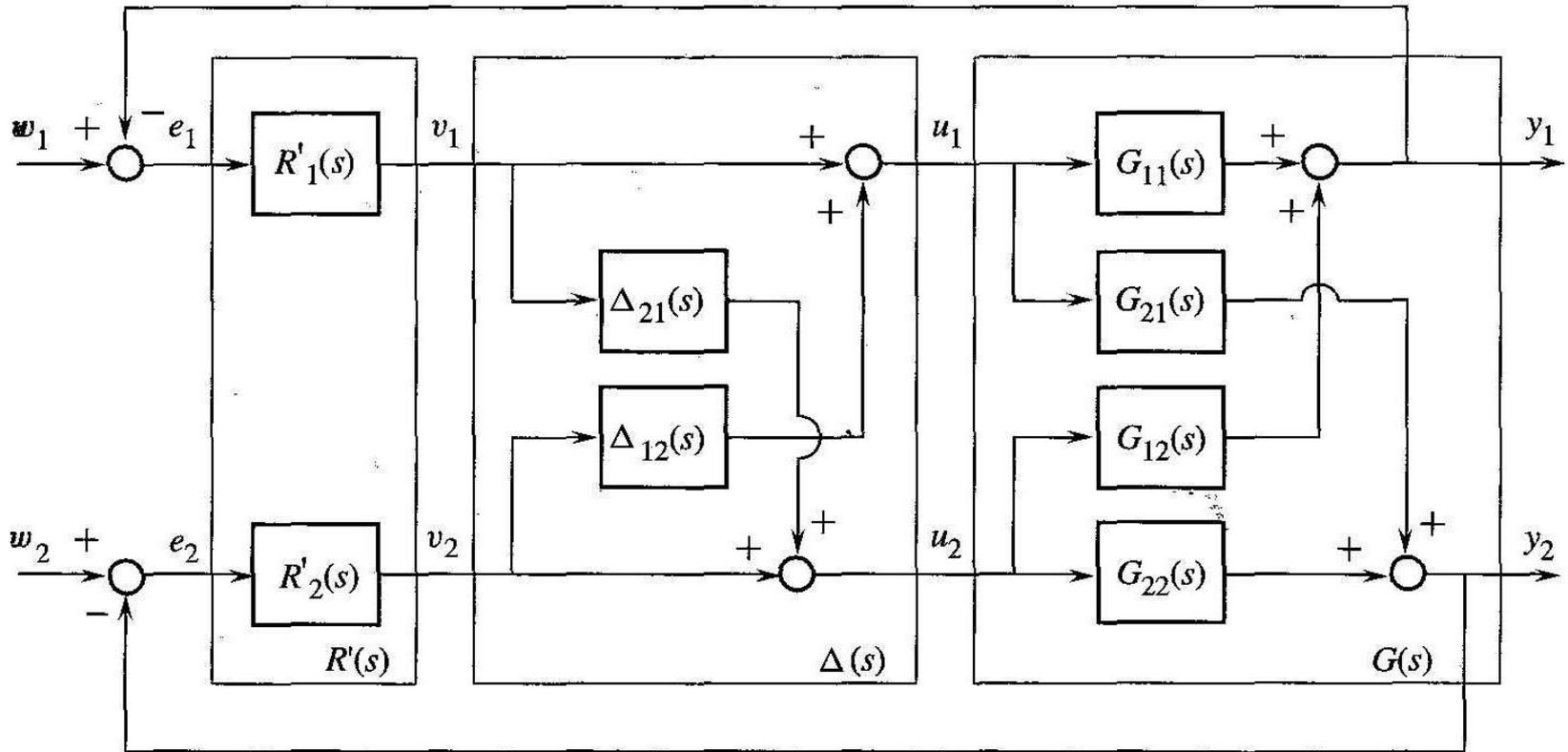


Fig
Sch
dis
ava



- Un punto debole di questa procedura è che le FdT ottenute su ciascun canale possono risultare di ordine elevato e quindi la sintesi dei corrispondenti regolatori può risultare complessa.
- A questo proposito, riprendiamo l'esempio precedente, supponendo questa volta che sia presente anche un termine di accoppiamento dovuto all'azione dell'ingresso u_2 sul primo sotto-sistema.

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} & \frac{h}{1+0.02s} \\ \frac{k}{1+0.1s} & \frac{10}{1+s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} =: G(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Effettuando dei semplici calcoli si vede come, con l'introduzione del blocco che effettua il disaccoppiamento, la struttura delle FdT sulla diagonale si complichino notevolmente, rendendo più difficile il progetto dei controllori SISO.



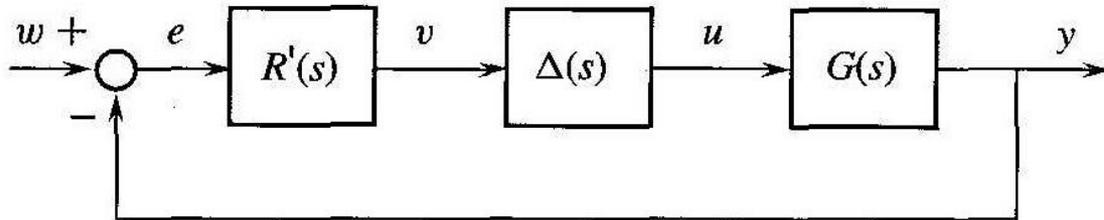
- Un altro problema che può presentarsi è che l'espressione ottenuta per le FdT dei sistemi disaccoppiatori non sia fisicamente realizzabile.
- Per ovviare a quest'ultimo problema, si possono seguire due strade:
 - Effettuare una scelta diversa per Δ_{11} e Δ_{22}
 - Soddisfare le condizioni sulle Δ_{ij} solo nell'intervallo frequenziale di interesse, aggiungendo poli ad alta frequenza per soddisfare il requisito di realizzabilità.



Disaccoppiamento “all’indietro”

- Ritorniamo allo schema generale

$$U(s) = \Delta(s)V(s) \quad , \quad V(s) = R'(s)E(s)$$

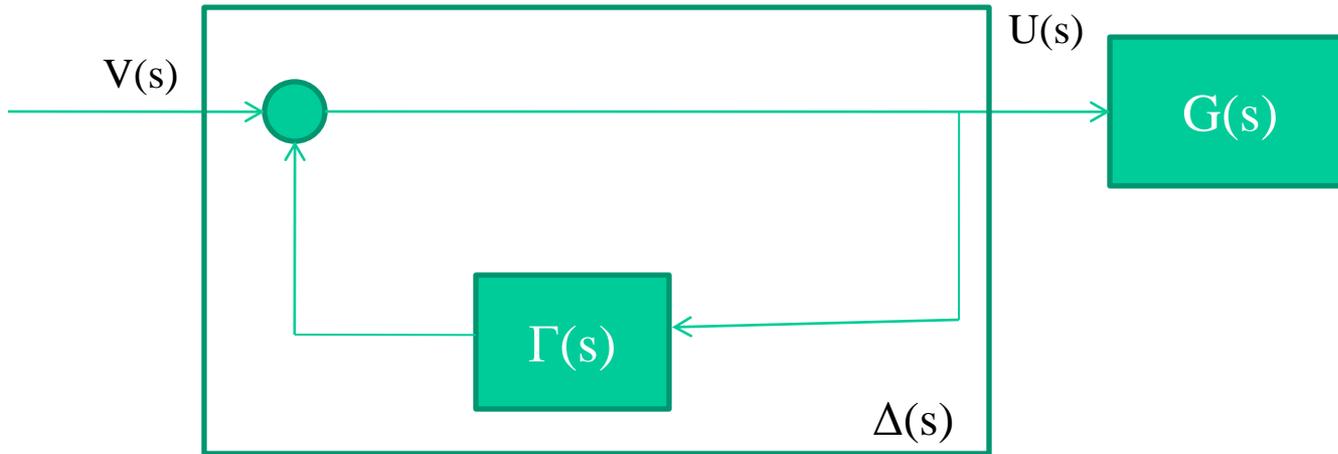


Il nome dato a questa tecnica deriva dal fatto che il disaccoppiatore viene realizzato implementando la seguente relazione

$$U(s) = \Gamma(s)U(s) + V(s)$$

dove $\Gamma(s)$ è una opportuna MdT da scegliere.





- Quindi il disaccoppiatore risulta avere una struttura in retroazione con MdT

$$\Delta(s) = (I - \Gamma(s))^{-1}$$

- L'obiettivo è quello di scegliere $\Delta(s)$ in modo tale che

$$G_d(s) = G(s)\Delta(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ 0 & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$



Dalla precedente relazione, si ha

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= G_d(s)^{-1}(G_d(s) - G(s)) \\ &= I - G_d(s)^{-1}G(s)\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\Gamma_{ij}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ -\frac{G_{ij}(s)}{G_{ii}(s)} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$



- Per quanto riguarda la realizzazione del disaccoppiatore, noto $\Gamma(s)$, si ha

$$U(s) = \Gamma(s)U(s) + V(s)$$

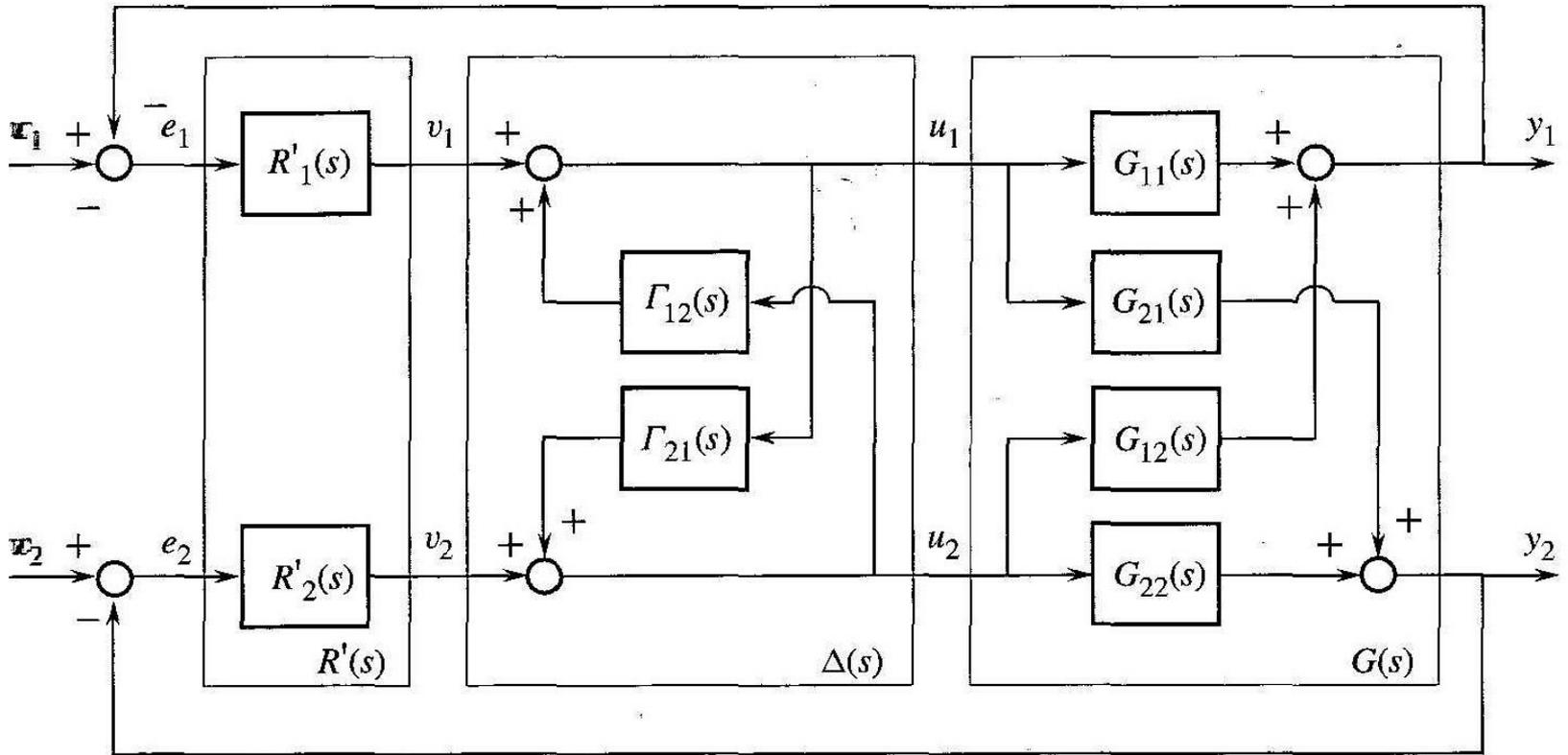
che non richiede il calcolo esplicito di $\Delta(s)$.

Per un sistema 2x2

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{12}(s) \\ \Gamma_{21}(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\ -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} & 0 \end{bmatrix}$$

che porta allo schema implementativo successivo.





- I vantaggi dello schema con disaccoppiamento all'indietro risiedono innanzitutto nel semplificare il progetto del regolatore (tra l'altro la tecnica è facilmente generalizzabile al caso $m \times m$).
- Inoltre i blocchi Γ_{ij} che realizzano il disaccoppiatore sono alimentati dalle effettive variabili di controllo.
- Questo permette di risolvere problemi di natura pratica, quali la saturazione degli attuatori (schemi di anti wind-up) o l'inserimento morbido della regolazione automatica.



- Riprendiamo l'esempio precedente. La MdT dell'impianto da controllare era

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)} & \frac{h}{1+0.02s} \\ \frac{k}{1+0.1s} & \frac{10}{1+s} \end{bmatrix}$$

In questo caso

$$\Gamma_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = -\frac{h}{10} \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{1+0.02s}$$

$$\Gamma_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = -\frac{k}{10} \frac{1+s}{1+0.1s}$$

