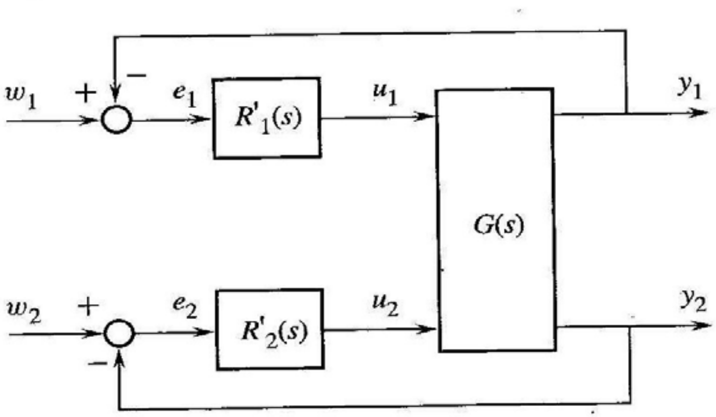
Metodi Frequenziali per il Progetto di Controllori MIMO: Controllori Decentralizzati

- Lo schema generale di un regolatore di disaccoppiamento prevede che, in generale, il regolatore abbia elementi tutti diversi da zero.
- Esso è detto di tipo centralizzato perché, in linea di principio, ogni ingresso del controllore influenza tutte le uscite dello stesso.
- Viceversa, uno schema in cui ogni regolatore agisce su un’unica variabile di controllo, viene detto “decentralizzato”.



- Si potrebbe pensare di progettare i regolatori SISO con riferimento alle singole funzioni di trasferimento sulla diagonale.
- È facile rendersi conto che, anche se ciascun regolatore $R_i(s)$ garantisse stabilità e prestazioni in riferimento a $G_{ii}(s)$, non è detto che il sistema MIMO complessivo sia stabile e caratterizzato da buone prestazioni.
- Questo a causa delle interazioni tra i diversi canali.
- Per portare in conto tali interazioni, una possibile procedura consiste nel progettare sequenzialmente i regolatori SISO.
- Quando si progetta l'*i*-esimo regolatore, si porta in conto la presenza dei regolatori precedentemente determinati.

- Nel caso di un sistema 2x2 si procede in questo modo
  - Si sintetizza un regolatore $R_1(s)$ per il sistema avente FdT $G_{11}(s)$
  - Si progetta il regolatore $R_2(s)$ per il sistema avente FdT $G'_{22}(s)$, dove

$$G'_{22}(s) := G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)R_1(s)}{1+R_1(s)G_{11}(s)}$$

rappresenta la FdT tra u_2 e y_2 che si ottiene quando $R_1(s)$ è già inserito.

Ovviamente non si ha alcuna garanzia a priori che il procedimento conduca alla sintesi di un regolatore in grado di fornire le prestazioni richieste.

Matrice dei guadagni relativi

- Per valutare la possibilità di realizzare un efficace schema di controllo decentralizzato è utile avere una misura del grado di interazione tra gli ingressi e le uscite del sistema.
- In altri termini, è fondamentale disporre di un criterio per la determinazione degli accoppiamenti (u_i ,y_i) in base ai quale progettare poi il regolatore.
- Come si è detto precedentemente, è infatti evidente l'opportunità di regolare la generica variabile di uscita y_i con la variabile di controllo u_i che ha maggiore influenza su di essa.
- Illustreremo in questa sede il criterio euristico basato sulla matrice dei guadagni relativi.
- Esso non è fondato su una rigorosa dimostrazione teorica, ma spesso "funziona" bene, e quindi è molto usato nella pratica.
- Perché il criterio sia applicabile, occorre che il sistema da controllare sia stabile e che la matrice dei guadagni statici del sistema sia non singolare, cioè deve essere $det(G(0))\neq 0$.

- Supponiamo di dare una variazione a gradino di ampiezza δu_i all'ingresso u_i , mantenendo nulli gli altri ingressi.
- Conseguentemente ogni uscita y_j presenterà a regime una variazione δy_{jAA} dove

$$\delta y_{jAA} = G_{ji}(0)\delta u_i =: g_{ji}\delta u_i$$

Il numero g_{ji} è detto "guadagno ad anello aperto".

Successivamente, tornati in una situazione di regime, supponiamo di dare ancora una variazione a gradino di ampiezza δu_i all'ingresso u_i , agendo questa volta anche sugli altri ingressi in modo che tutte le uscite, esclusa y_j , presentino una variazione nulla a regime.

Indichiamo con δy_{jAC} la variazione subita dall'uscita j-esima in questo caso, e definiamo il "guadagno ad anello chiuso" come

$$h_{ji} := \frac{\delta y_{jAC}}{\delta u_i}$$

- Ad esempio, nel caso di sistemi 2x2, si ha

$$\begin{bmatrix} \delta y_{1AC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_{2AC} \end{bmatrix}$$

dove δu_{2AC} rappresenta la variazione da imporre a u_2 affinché la variazione su y_2 sia nulla.

- A questo punto si può introdurre il “guadagno relativo” della coppia (u_i ,y_i), definito come

$$\lambda_{ji} := \frac{g_{ji}}{h_{ji}}$$

Definendo la matrice dei guadagni relativi come

$$\Lambda := \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mm} \end{bmatrix}$$

Si dimostra che

$$\Lambda = G(0) \otimes \left(G(0)^{-1}\right)^T$$

dove il simbolo $\otimes$ denota il prodotto matriciale elemento per elemento.

- La matrice Λ gode di alcune interessanti proprietà. Quelle che ci interessano maggiormente sono:
  - La somma degli elementi di una generica riga (colonna) è sempre pari a 1
  - I suoi elementi sono adimensionalizzati
  - Coincide con la matrice identità se *G(s)* è triangolare
  - Focalizzando sui sistemi 2x2, si ha

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

- Da cui si deduce che

se $\lambda=1$ gli accoppiamenti corretti sono immediatamente dati da (u_1, y_1) e (u_2, y_2)

se $\lambda=0$ gli accoppiamenti corretti sono (u_2, y_1) e (u_1, y_2)

Ancora:

se $0<\lambda<1$ esiste una interazione che è tanto più critica quanto più λ è vicino a 0.5

se $\lambda>1$ esiste interazione, tanto maggiore quanto più grande è λ

se $\lambda<0$ il problema di controllo è critico, perché la chiusura di un anello provoca il cambio del segno del guadagno nell'altro anello; è sconsigliabile l'accoppiamento (u_1, y_1)

- In definitiva, il criterio euristico che si ottiene (generalizzabile anche ai sistemi *mxm)* è *di accoppiare le variabili di ingresso e uscita in modo che i guadagni relativi corrispondenti siano il più possibile prossimi a uno.*

Esempio. Si consideri il sistema con MdT

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{1+s} & \dfrac{1}{1+5s}\\ \dfrac{-1}{1+0.5s} & \dfrac{2}{1+2s}\end{bmatrix}$$

La matrice dei guadagni relativi risulta essere

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

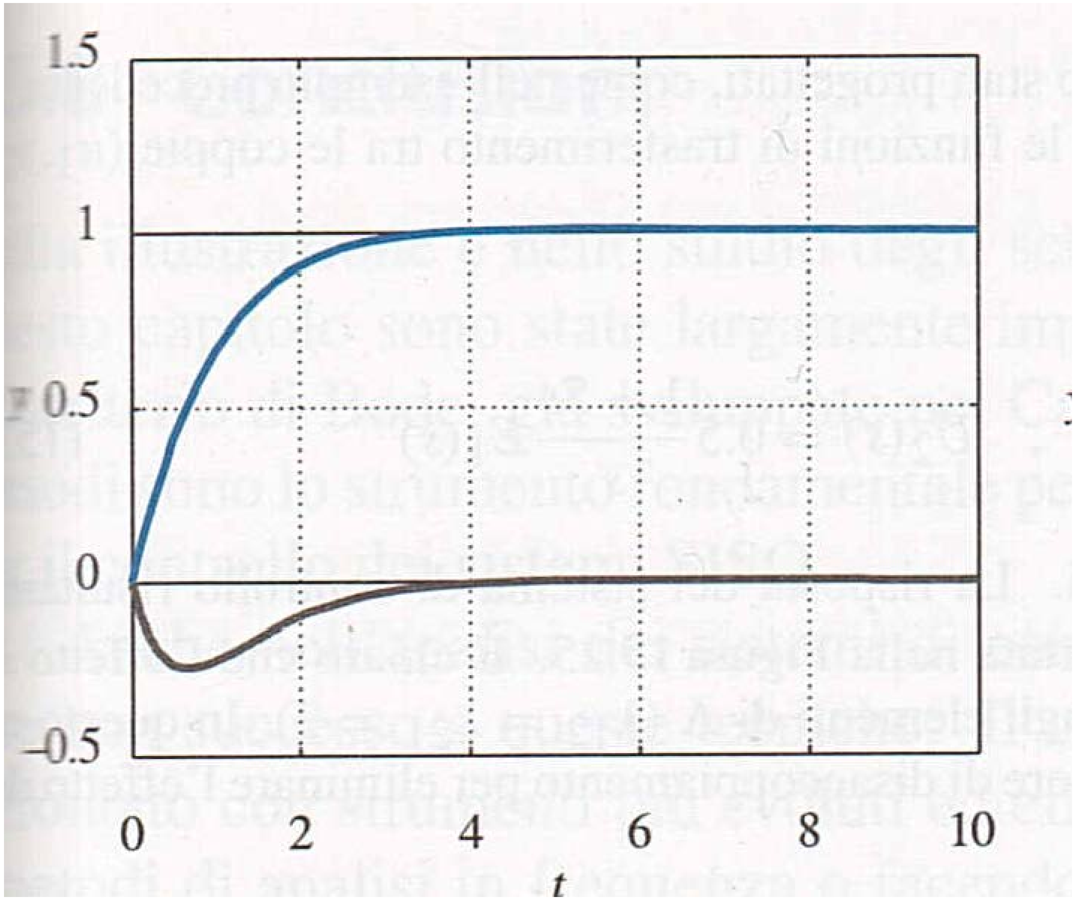
Dunque l’accoppiamento corretto è quello dato da $u_1 \rightarrow y_1$ e $u_2 \rightarrow y_2$

- Come controllori, si possono utilizzare i due PI descritti dalle FdT

$$U_1(s) = 0.5\frac{1+s}{s}E_1(s)$$

$$U_2(s) = 0.5\frac{1+2s}{s}E_2(s)$$

I due controllori sono progettati in modo tale da garantire, inseriti nel ciclo di controllo SISO con il relativo impianto, un margine di fase pari a *90 gradi* e una pulsazione di attraversamento pari a *1 rad/sec*.



Simulazione effettuata in presenza di un gradino sul primo riferimento e segnale nullo sul secondo riferimento.

Esempio. Si consideri il sistema con MdT

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+s} & \dfrac{2}{1+5s} \\ \dfrac{1}{1+0.5s} & \dfrac{1}{1+2s} \end{bmatrix}$$

La matrice dei guadagni relativi risulta essere

$$\Lambda=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

In questo caso l'elemento *11* di Λ è negativo. In tal caso, il progetto di due controllori SISO, con la stessa filosofia dell'esempio precedente, con l'accoppiamento $u_1 \rightarrow y_1$ e $u_2 \rightarrow y_2$ porterebbe ad un sistema instabile.

- Utilizzando invece i controllori

$$U_1(s) = \frac{1+0.5s}{s} E_2(s)$$

$$U_2(s) = 0.5 \frac{1+5s}{s} E_1(s)$$

Si perviene al risultato mostrato in figura