Proprietà Strutturali dei Sistemi Dinamici: Controllabilità e Raggiungibilità

Controllabilità

- Consideriamo il sistema descritto dall'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \qquad x(t) \in R^n \quad u(t) \in R^m \quad t \geq 0$$

Lo stato x_0 si dice controllabile (allo stato zero) se esiste un istante finito t^* ed un segnale di ingresso $u_{[0,t^*]}$ tale che

$$x(t^*, x_0, u_{[0,t^*)}) = 0$$

- L'insieme di tutti gli stati controllabili viene detto insieme di controllabilità del sistema e si denota con X_C .
- Evidentemente X_C è un sottoinsieme di R^n . Quando X_C coincide con R^n il sistema si dice (completamente) controllabile.
- Nel caso di sistemi LTI a tempo-continuo, si definisce la matrice di controllabilità

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- **Teorema (sottospazio di controllabilità).** Per un sistema LTI a tempo-continuo, risulta $X_C = R(C)$, dove $R(C)$ denota lo spazio immagine (range) della Matrice C.
- Dunque l'insieme di controllabilità X_C è un *sottospazio vettoriale* di R^n .
- Il sottospazio X_C viene detto *sottospazio di controllabilità*.
- Dal teorema precedente si ricava il seguente risultato.
- **Teorema (CNES di controllabilità).** Un sistema LTI a tempo-continuo risulta essere (completamente) controllabile se e solo se il rango di C è pari a n (ordine del sistema).
- Nel caso di sistemi LTI, se il sistema è controllabile, si dice anche che *la coppia (A,B)* è controllabile.

- Il complemento ortogonale di X_C viene detto *sottospazio di non controllabilità* e si denota con X_{NC}.
- È ovvio che la somma diretta dei due sottospazi restituisce lo spazio R^n :

$$X_C \oplus X_{NC} = R^n$$

Dimostreremo il teorema sulla controllabilità nel caso dei sistemi LTI a tempo-discreto, essendo la prova più intuitiva. Tuttavia si noti che l'enunciato, nel caso dei sistemi a tempo-discreto, richiede l'ipotesi che A sia invertibile.

Teorema (CNES di controllabilità – sistemi a tempo-discreto). Si assuma A invertibile. Allora un sistema LTI a tempo-discreto risulta essere (completamente) controllabile se e solo se il rango di C è pari a n (ordine del sistema).

- Con semplici passaggi si ha:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad k \geq 0$$

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 \\
x(1) &= Ax_0 + Bu(0) \\
x(2) &= A^2 x_0 + ABu(0) + Bu(1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x(n) = A^n x_0 + \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- Dalla formula precedente, *essendo A invertibile*, si evince che si riesce a portare lo stato a zero partendo da x_0 *in al più n passi* se si verifica

$$x_0 = -A^{-n}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Dunque l'insieme di controllabilità *in al più n passi* si può scrivere

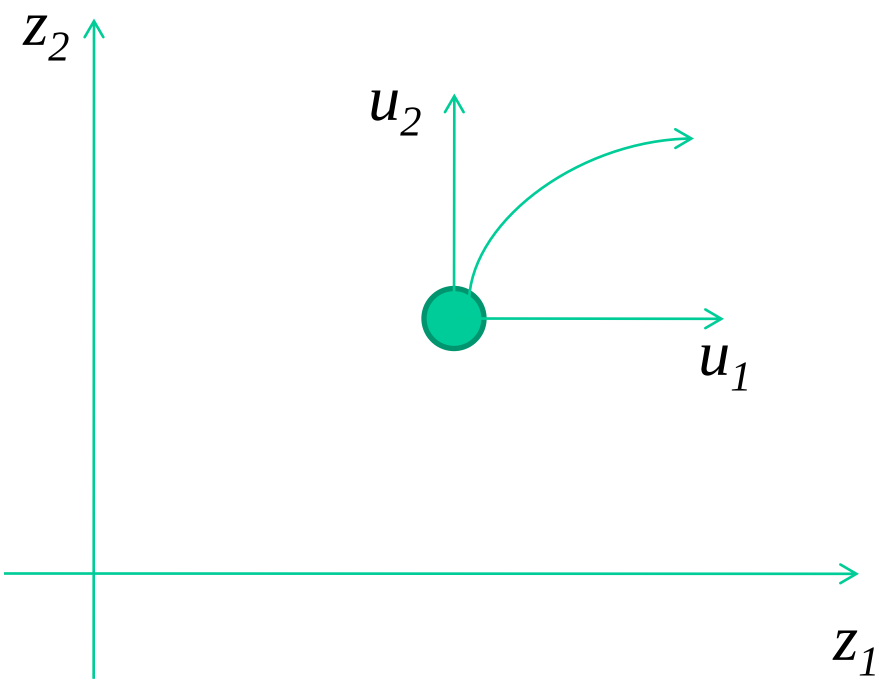
$$X_C(n) = \Re\left(A^{-n}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right)$$

Utilizzando il Teorema di Caley Hamilton, si dimostra che $X_C(n) = X_C$. Da questo fatto discende la tesi del teorema.

- È importante notare che, per i sistemi a tempo-discreto, se A non è invertibile, l'enunciato del precedente teorema non è più valido.
- Tuttavia, nel caso dei sistemi LTI a tempo-continuo, nella dimostrazione al posto di A^{-n} compare e^{-At} che è *sempre* invertibile. Per questo motivo, per sistemi LTI a tempo-continuo, non è necessario fare l'ipotesi sull'invertibilità di A.

Esempio – pallina in un piano (1)

- Consideriamo il moto di una pallina di massa m in un piano soggetta a due ingressi u_1 e u_2



- Ponendo:

$$x_1 = z_1 \qquad x_2 = \dot{z}_1$$

$$x_3 = z_2 \qquad x_4 = \dot{z}_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$$

Il modello risulta

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k/m \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} u$$

- Utilizzando il teorema precedente si vede (come era abbastanza prevedibile) che il sistema è controllabile.
- In altri termini scegliendo in maniera opportuna i due ingressi u_1 e u_2 si riesce in un tempo finito a portare il sistema nell'origine con velocità finale nulla, qualunque sia lo stato iniziale.

Forma canonica di Kalman di Controllabilità

- Il successivo teorema mostra che un sistema non controllabile si può dividere in due sottosistemi.
- Il primo sotto-sistema è caratterizzato dalle dinamiche associate al sottospazio di controllabilità ed è soggetto all'ingresso del sistema complessivo.
- Il secondo sotto-sistema è caratterizzato dalle dinamiche associate al sottospazio di non controllabilità ed è in evoluzione libera.
- Dunque, se si parte da uno stato iniziale collocato nel sottospazio di controllabilità, le dinamiche non controllabili non sono mai eccitate, e non entrano in gioco nel comportamento ingresso-uscita del sistema complessivo.

- **Teorema.** Dato un sistema lineare nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

esiste una trasformazione di base T tale che il sistema si può porre nella forma

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu =: A_C z + B_C u$$
$$y = CTz =: C_C z$$

dove

$$A_C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B_C = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C_C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

e la coppia (A_{11},B_1) è controllabile. A_{11} ha dimensione pari a quella del sottospazio di controllabilità.

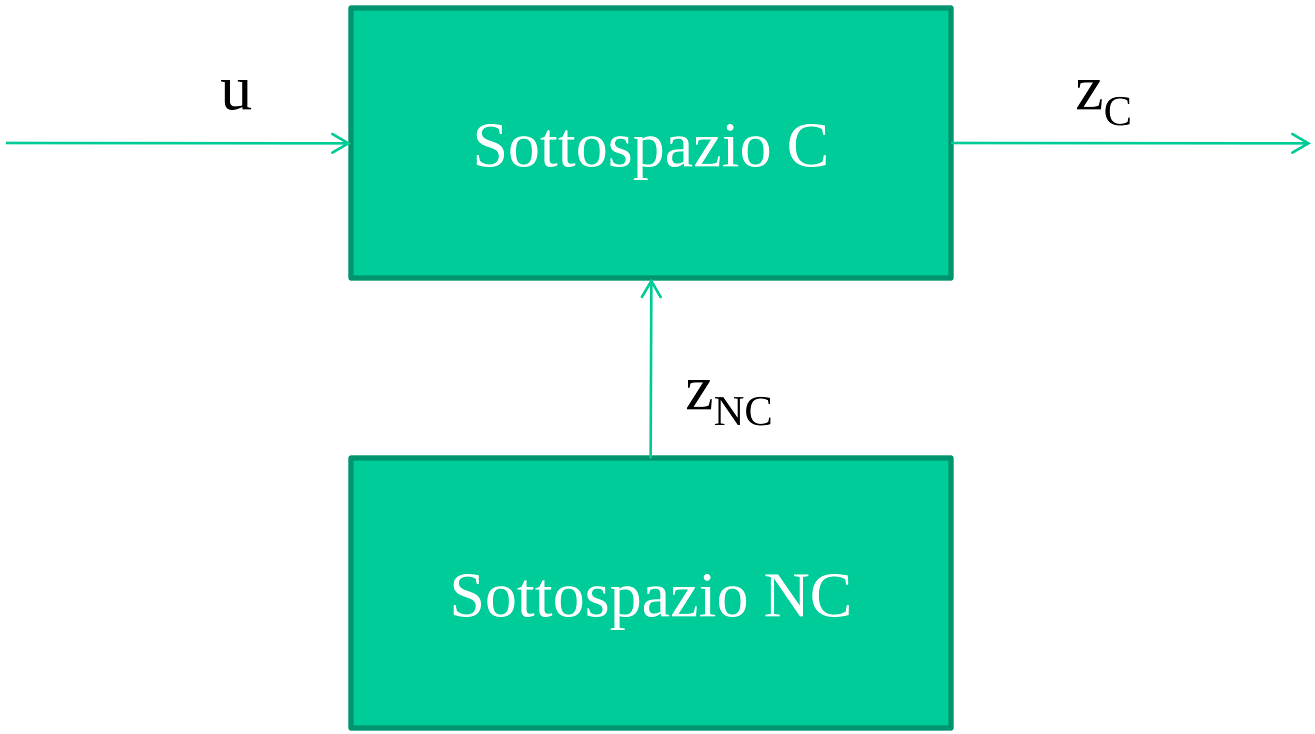
- Partizionando il vettore di stato in modo conforme alla matrice A

$$z = \begin{bmatrix} z_C \\ z_{NC} \end{bmatrix}$$

Il sistema ingresso-stato può essere scritto per esteso

$$\dot{z}_C = A_{11} z_C + A_{12} z_{NC} + B_1 u$$
$$\dot{z}_{NC} = A_{22} z_{NC}$$

- Le equazioni precedenti hanno la seguente interpretazione grafica



- Dalla figura si evince chiaramente che:
  - L’ingresso agisce solo sulla parte “controllabile” del sistema
  - Se lo stato iniziale appartiene al sottospazio di controllabilità, le dinamiche non controllabili non sono mai “eccitate”, cioè

$$z_0 = \begin{bmatrix} z_{C0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \begin{bmatrix} z_C(t) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad t \geq 0$$

- Un’altra interessante osservazione è che la matrice di trasferimento dipende solo dalla parte controllabile del sistema

$$W(s) = C_1 \left(sI - A_{11} \right)^{-1} B_1$$

- Questo è ovvio se si tiene presente che:
  - la MdT “rappresenta il comportamento ingresso-uscita del sistema quando si parte da condizioni iniziali nulle;
  - lo stato nullo ha componente nulla sul sottospazio di non controllabilità.

- In definitiva, possiamo concludere che quando
  - il sistema non è controllabile
  - la condizione iniziale appartiene al sottospazio di controllabilità

il sistema può essere descritto, senza perdita di informazione, dall'equazione *ridotta*

$$\dot{z}_C = A_{11} z_C + B_1 u$$
$$y = C_1 z_C$$

Esempio - pallina in un piano (2)

- Ritorniamo all'esempio della pallina sul piano, e supponiamo che sia presente solo la forza u_1
- In questo caso risulta

$$X_C = \Re\left(\begin{pmatrix} 0 & 1/m & -k/m^2 & k^2/m^3 \\ 1/m & -k/m^2 & k^2/m^3 & -k^3/m^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \Re\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

- In altri termini, come era lecito aspettarsi, si possono controllare a zero tutti gli stati iniziali associati a punti che giacciono sull’asse z_1 con velocità iniziale diretta lungo z_1 .
- Se inoltre il sistema evolve a partire da uno stato giacente sull’asse z_1 con velocità iniziale diretta lungo z_1, il sistema può essere descritto, senza perdita di informazione, dal modello ridotto

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k/m \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u$$

Stabilizzabilità

- Un sistema LTI del tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad A \in R^{nxn} \qquad B \in R^{nxm}$$

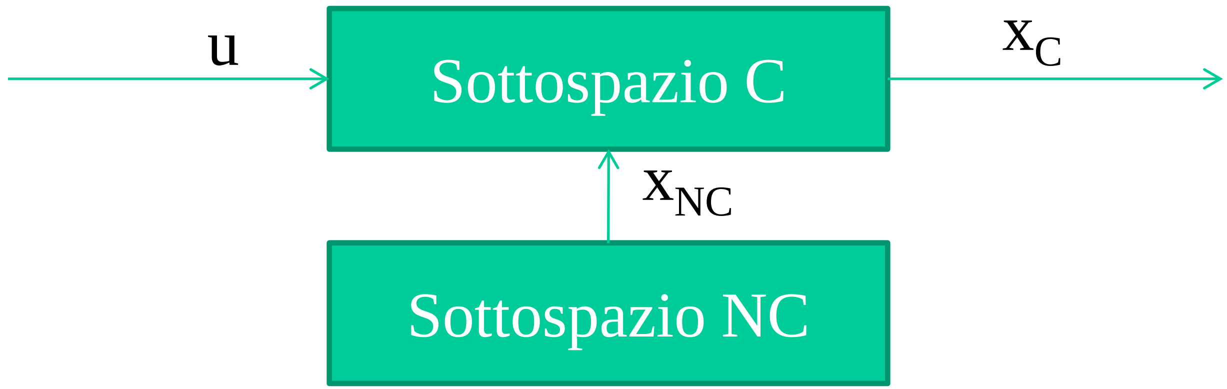
si dice essere *stabilizzabile* se esiste una legge di controllo in retroazione $u=Kx$, con K in R^{mxn} , tale che gli autovalori della matrice a ciclo chiuso $A+BK$ siano tutti a parte reale negativa.

Se un dato sistema è stabilizzabile, si dice anche che la coppia (A,B) è stabilizzabile.

- È interessante studiare la relazione che esiste tra i concetti di controllabilità e stabilizzabilità
- Si può dimostrare, ed è abbastanza intuitivo, che se un sistema lineare è controllabile esso è anche stabilizzabile.
- Dunque la controllabilità implica la stabilizzabilità.
- Meno evidente è il fatto che il contrario *non* è vero. In altri termini la stabilizzabilità *non* implica la controllabilità.
- Quindi la controllabilità è una proprietà *più forte* della stabilizzabilità.

- Per convincersi di questo fatto, immaginiamo che un dato sistema lineare non sia controllabile.
- Per quanto è stato detto in precedenza, in questo caso è possibile effettuare un cambio di base che porta il sistema nella forma canonica di Kalman di controllabilità

$$\begin{aligned}\dot{x}_C &= A_{11}x_C + A_{12}x_{NC} + B_1 u\\ \dot{x}_{NC} &= A_{22}x_{NC}\end{aligned}$$



- Sappiamo che la coppia (A_{11},B_1), essendo controllabile, è stabilizzabile.
- Se gli autovalori di A_{22} (quelli associati al sottospazio di non controllabilità) sono a parte reale negativa, allora i corrispondenti modi di evoluzione andranno a zero anche senza l'intervento del controllore.
- Quindi si riesce a stabilizzare il sistema anche se esso non è controllabile.

- In definitiva un sistema non controllabile risulta essere comunque stabilizzabile se la matrice A_{22} possiede tutti autovalori a parte reale negativa o ciò che è lo stesso, se i modi di evoluzione associati alla parte non controllabile del sistema convergono a zero.
- Questo è il motivo per cui la stabilizzabilità non implica la controllabilità.

Raggiungibilità

- Consideriamo il sistema descritto dall'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x,u) \qquad x(t) \in R^n \quad u(t) \in R^m \quad t \geq 0$$

Lo stato x_0 si dice raggiungibile (dallo stato zero) se esiste un istante finito $t*$ ed un segnale di ingresso $u_{[0,t*]}$ tale che

$$x(t*,0,u_{[0,t*)}) = x_0$$

- L’insieme di tutti gli stati raggiungibili viene detto insieme di raggiungibilità del sistema e si denota con X_R .
- Evidentemente X_R è un sottoinsieme di R^n . Quando X_R coincide con R^n il sistema si dice (completamente) raggiungibile.
- *Nel caso di sistemi lineari a tempo-continuo, si dimostra che l’insieme di raggiungibilità coincide con quello di controllabilità.*