Proprietà Strutturali dei Sistemi Dinamici: Osservabilità

- Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad t \geq 0$$
$$y = \eta(x,u)$$

Definizione [Indistinguibilità di due stati] Due stati x_i e x_j in R^n si dicono indistinguibili se qualunque sia l'ingresso *u(.)* risulta

$$y\left(t, x_i, u_{[0,t)}\right) = y\left(t, x_j, u_{[0,t)}\right) \qquad t \geq 0$$

dove $y(t,x,u_{[0,t)})$ denota l'uscita all'istante t a partire dallo stato x sotto l'ingresso u.

- In altri termini due stati si dicono indistinguibili quando, qualunque sia l'ingresso applicato al sistema, l'uscita è la stessa ad ogni istante di tempo.
- Se questo si verifica, non si è in grado di "distinguere" i due stati sulla base delle osservazioni dell'uscita.
- **Definizione [Non osservabilità]** Uno stato x_0 si dice non osservabile se è indistinguibile dallo stato zero.

- L'insieme di tutti gli stati non osservabili viene detto insieme di *non osservabilità* del sistema e si denota con X_{NO} .
- Evidentemente X_{NO} è un sottoinsieme di R^n . Quando X_{NO} si riduce al solo elemento zero il sistema si dice (completamente) osservabile.
- Nel caso di sistemi LTI a tempo-continuo, definita la matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & \left(A^{n-1}\right)^T C^T \end{bmatrix}$$

si dimostra che $X_{NO} = N(O^T)$, dove $N(X)$ denota lo spazio nullo della matrice X . Dunque l'insieme di non osservabilità è un *sottospazio vettoriale* di R^n .

- Per dimostrare questo risultato ricordiamo che, dalla definizione di indistinguibilità, due stati x_i e x_j sono indistinguibili se risulta

$$Ce^{At}\left(x_i - x_j\right) = 0 \quad t \geq 0$$

Infatti l'evoluzione nell'uscita a partire da due stati diversi sotto lo stesso ingresso si differenzia solo per l'evoluzione libera, essendo quella forzata coincidente nei due casi.

- Ora, osserviamo che, se un certo stato x appartiene a X_{NO} , allora esso deve essere indistinguibile dallo zero, e quindi

$$Ce^{At}x = 0 \quad t \geq 0$$

Derivando ambo i membri fino all'ordine *n-1* e valutando le corrispondenti uguaglianze all'istante *t=0*, si ottiene che

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0$$

- Viceversa, supponiamo che

$$x \in N\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right)$$

Da cui si ricava

$$CA^i x = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Dal Teorema di Caley-Hamilton segue che l'ultima uguaglianza vale per ogni *n;* dallo sviluppo in serie di e^{At} segue che $C\, e^{At}\, x$ è identicamente nullo.

- Il complemento ortogonale di X_{NO} viene detto, in modo del tutto ovvio, *sottospazio di osservabilità* e si denota con X_O.
- Risulta dunque

$$X_O = X_{NO}^{\perp} = R(O)$$

È ovvio che la somma diretta dei due sottospazi restituisce lo spazio R^n :

$$X_O \oplus X_{NO} = R^n$$

Nel caso di sistemi LTI, se il sistema è osservabile, si dice anche che *la coppia (A,C)* è osservabile.

Si noti che un dato sistema è osservabile se e solo se $R(O)=R^n$.

- Si noti che, definendo il sistema duale,

$$\dot{x} = A^T x + C^T u$$
$$y = B^T x$$

l’osservabilità del sistema dato coincide con la controllabilità del sistema duale e viceversa.

Utilizzando il concetto di dualità, si possono formulare per l’osservabilità tutta una serie di risultati che sono stati già discussi per la controllabilità.

Forma canonica di Kalman di Osservabilità

- Il successivo teorema mostra che un sistema non osservabile si può dividere in due sottosistemi.
- Il primo sotto-sistema è caratterizzato dalle dinamiche associate al sottospazio di osservabilità ed agisce sull’uscita.
- Il secondo sotto-sistema è caratterizzato dalle dinamiche associate al sottospazio di non osservabilità e non influenza l’uscita.
- Dunque le dinamiche non osservabili non sono mai “visibili” in uscita, e non entrano in gioco nel comportamento ingresso-uscita del sistema complessivo.

- **Teorema.** Dato un sistema lineare nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

esiste una trasformazione di base T tale che il sistema si può porre nella forma

$$\dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu =: A_O z + B_O u$$
$$y = CTz =: C_O z$$

dove

$$A_O = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B_O = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \qquad C_O = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e la coppia (A_{11},C_1) è osservabile. A_{11} ha dimensione pari a quella del sottospazio di osservabilità.

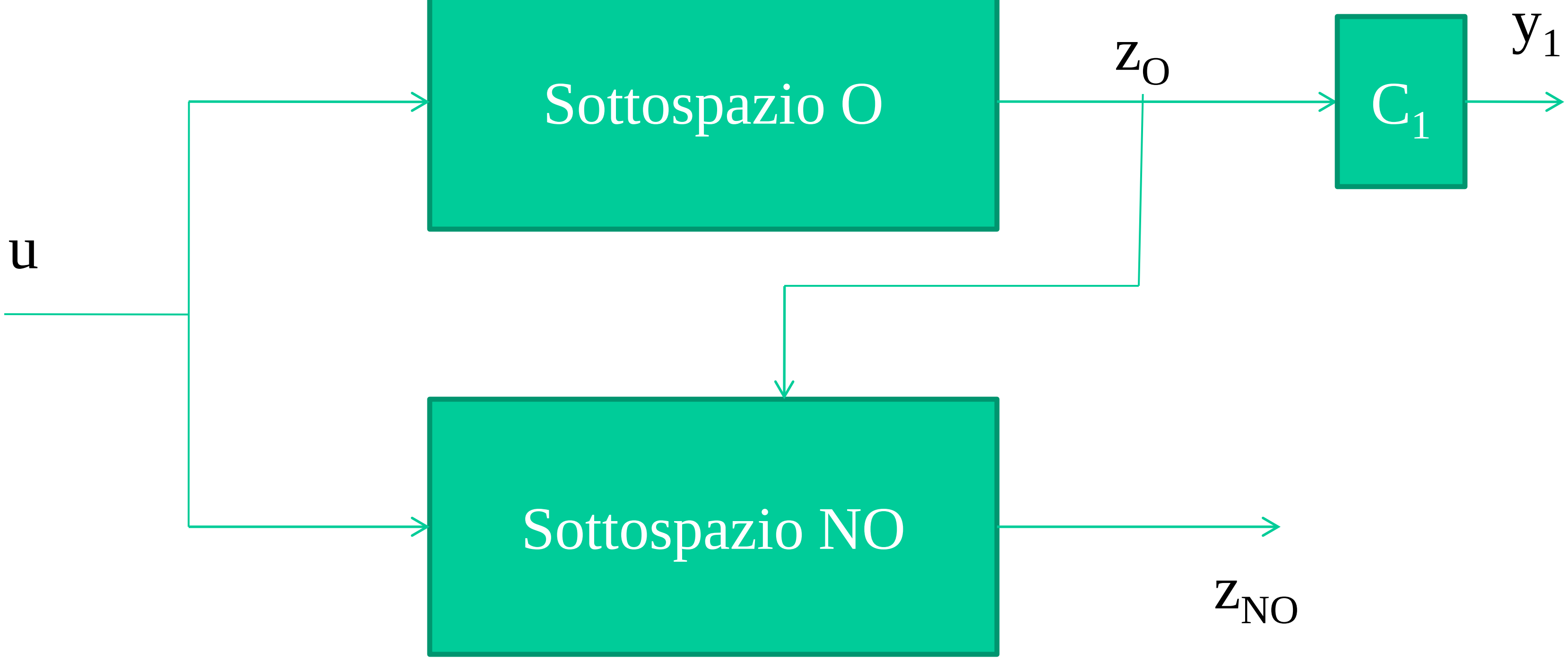
- Partizionando il vettore di stato in modo conforme alla matrice *A*

$$z = \begin{bmatrix} z_O \\ z_{NO} \end{bmatrix}$$

Il sistema ingresso-stato può essere scritto per esteso

$$\begin{aligned} \dot{z}_O &= A_{11} z_O + B_1 u \\ \dot{z}_{NO} &= A_{21} z_O + A_{22} z_{NO} + B_2 u \\ y &= C_1 z_O \end{aligned}$$

- Le equazioni precedenti hanno la seguente interpretazione grafica



- Si noti che la matrice di trasferimento dipende solo dalla parte osservabile del sistema

$$W(s) = C_1 \left(sI - A_{11}\right)^{-1} B_1$$

- Questo è ovvio se si tiene presente che:
  - la MdT “rappresenta il comportamento ingresso-uscita del sistema;
  - Le dinamiche non osservabili non sono visibili in uscita.

Rivelabilità (detectability)

- La coppia *(A,C)* si dice essere *rivelabile* se le eventuali dinamiche instabili sono osservabili.
- In altri termini, la coppia *(A,C)* è rivelabile se, facendo riferimento alla forma canonica di osservabilità, la matrice A_{22} possiede tutti autovalori a parte reale negativa.
- Come nel caso della stabilizzabilità, si dimostra facilmente che la rivelabilità è un concetto più debole di quello di osservabilità.