

Tecniche di Controllo con Retroazione di Stato: Assegnamento dei Poli e dell' Autostruttura

Docente Prof. Francesco Amato



Assegnamento dei poli per sistemi SISO

- Si è già ricordato che la posizione dei poli determina l'andamento temporale dei modi di evoluzione del sistema, mentre la locazione degli zeri rispetto ai poli influenza il coefficiente di ampiezza di ciascun modo di evoluzione.
- Ricordiamo anche che la risposta forzata di un sistema LTI si può scrivere

$$\sum_{i=1}^n C u_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau$$

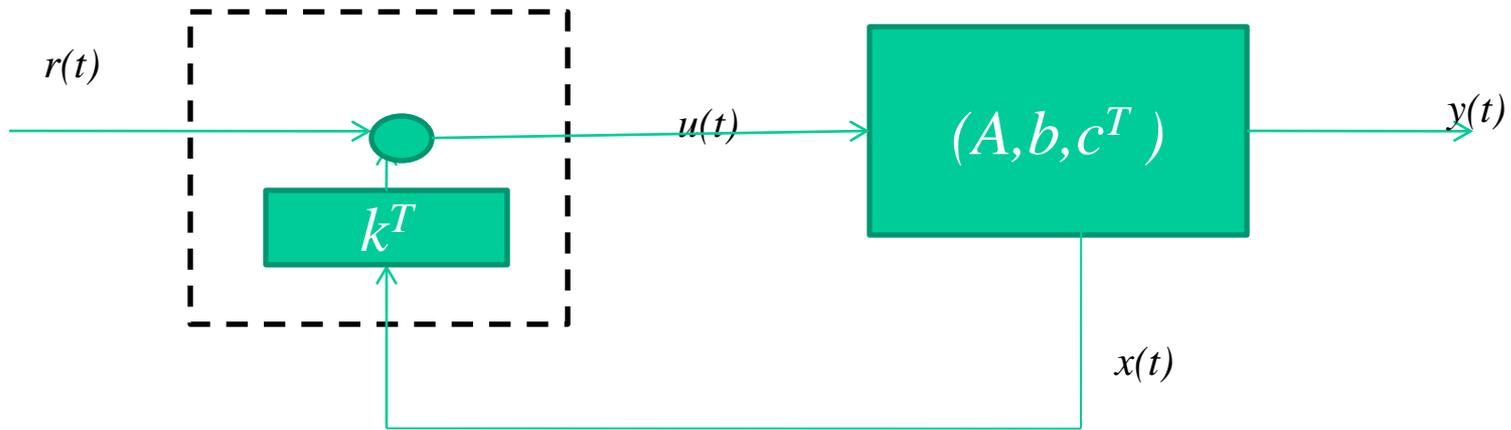
Da cui si deduce che, relativamente *all' i -esimo* modo di evoluzione, l'azione dell'ingresso $u(\cdot)$ è diretta nella direzione individuata dal vettore $C u_i$ nello spazio delle uscite e l'ampiezza dipende da $w_i^T B$.

Ricordiamo che gli u_i sono gli autovettori destri e i w_i gli autovettori sinistri associati all'autovalore λ_i .



- Ricordando che la risposta forzata non è altro che l'antitrasformata del prodotto della MdT per la L -trasformata dell'ingresso, si intuisce che se da un lato gli autovalori di A concorrono a determinare la struttura del polinomio caratteristico, gli autovettori influenzano la posizione degli zeri.
- Quindi si comprende che, se con una retroazione di stato si riuscissero ad assegnare sia gli autovalori che gli autovettori, riusciremmo a determinare completamente la risposta del sistema da controllare.
- Un caso particolare è quello dei sistemi SISO, che sarà affrontato per primo per la sua semplicità.





- In riferimento allo schema in figura, faremo prima vedere che, per sistemi SISO, nel caso di retroazione di stato, gli zeri della FdT a ciclo chiuso coincidono con gli zeri della FdT a ciclo aperto.



- A questo proposito, si utilizza un risultato intermedio che recita come segue.
- Dato un sistema SISO nella forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

gli zeri della corrispondente FdT coincidono con le radici del determinante della matrice quadrata (*detta matrice di Rosenbrock*)

$$R(s) = \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{pmatrix}$$



- Per dimostrare questo fatto, si osservi preliminarmente che, date 4 matrici di dimensioni compatibili T , U , V , W , con T invertibile, risulta:

$$\begin{pmatrix} T & U \\ -V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -V & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T^{-1}U \\ 0 & VT^{-1}U + W \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\left| \begin{pmatrix} T & U \\ -V & W \end{pmatrix} \right| = |T| |VT^{-1}U + W|$$



- Applicando l'ultima formula, si ottiene immediatamente che

$$|R(s)| = |sI - A| \left(d + c^T (sI - A)^{-1} b \right)$$

e dunque il determinante di $R(s)$ coincide con il numeratore della FdT del sistema.



- Ora consideriamo il sistema SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Soggetto a retroazione di stato

$$u(t) = k^T x(t) + r(t)$$

Il sistema a ciclo chiuso è descritto dall'equazione

$$\dot{x}(t) = (A + bk^T)x(t) + br(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$



- La matrice di Rosenbrock del sistema a ciclo chiuso risulta essere

$$R_C(s) = \begin{pmatrix} sI - (A + bk^T) & b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix}$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned} |R_C(s)| &= \left| \begin{pmatrix} sI - (A + bk^T) & b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \left(\begin{pmatrix} sI - (A + bk^T) \\ -c^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} k^T \quad \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} sI - A & b \\ -c^T & 0 \end{pmatrix} \right| = |R_A(s)| \end{aligned}$$

Dove $R_A(s)$ denota la matrice di Rosenbrock a ciclo aperto.



- Dunque i determinanti della matrice di Rosenbrock a ciclo aperto e di quella a ciclo chiuso coincidono.
- Da questo fatto segue immediatamente che *per sistemi SISO una retroazione di stato non altera la posizione degli zeri.*
- D'altro canto, vedremo che nel caso dei sistemi SISO è possibile assegnare tutti i poli del sistema a ciclo chiuso, attraverso una retroazione di stato, *quando il sistema è controllabile.*
- Quindi nel caso dei sistemi SISO è possibile procedere ad una allocazione ottimale dei poli che tenga conto anche della posizione degli zeri.



- **Teorema.** Dato un sistema con un solo ingresso

$$\dot{x} = Ax + bu$$

nell'ipotesi che esso sia controllabile, comunque si assegna un insieme di numeri complessi simmetrici

$$\Lambda_d = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

esiste sempre una legge di controllo $u = k^T x + r$ tale che i poli del sistema a ciclo chiuso coincidano con gli elementi dell'insieme Λ_d .



- Per dimostrare questo teorema c'è bisogno di un risultato ausiliario che riguarda la cosiddetta *forma canonica di controllo*.
- Innanzitutto indichiamo con

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

il polinomio caratteristico di A .



- Allora si può dimostrare che, dato un sistema lineare ingresso-stato con un solo ingresso, la trasformazione di base

$$T = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

porta il sistema nella cosiddetta forma canonica di controllo, descritta nel seguito.



$$\dot{z} = A_c z + b_c u$$

$$A_c = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad b_c = T^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Ora si noti che il polinomio caratteristico a ciclo chiuso può scriversi

$$\begin{aligned} |\lambda I - (A + bk^T)| &= |\lambda I - (A_c + b_c k^T T)| \\ &= \lambda^n + (a_1 - h_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n - h_n) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$k^T T = h^T = (h_n \quad h_{n-1} \quad \dots \quad h_1)$$



- Pertanto, se si vuole che lo spettro di $(A+bk^T)$ sia coincidente con l'insieme Λ_d assegnato bisogna imporre:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) &= \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n \\ &= \lambda^n + (a_1 - h_1) \lambda^{n-1} + \dots + (a_n - h_n)\end{aligned}$$

Poiché esiste sempre una n -pla $h_1 \dots h_n$ che risolve l'equazione precedente il teorema resta dimostrato.

Possiamo quindi formalizzare il seguente algoritmo per il progetto del controllore k .



Algoritmo (Ipotesi (A,b) controllabile)

1) Si costruisce il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

2) Si costruisce il polinomio desiderato a ciclo chiuso

$$p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n$$

3) Si costruisce

$$T^T = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{pmatrix}^T$$



4) Posto

$$a^T = (a_n \quad a_{n-1} \quad \cdots \quad a_1)$$

$$d^T = (d_n \quad d_{n-1} \quad \cdots \quad d_1)$$

risulta

$$k = (T^T)^{-1} (a - d)$$



- **Esempio:** dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

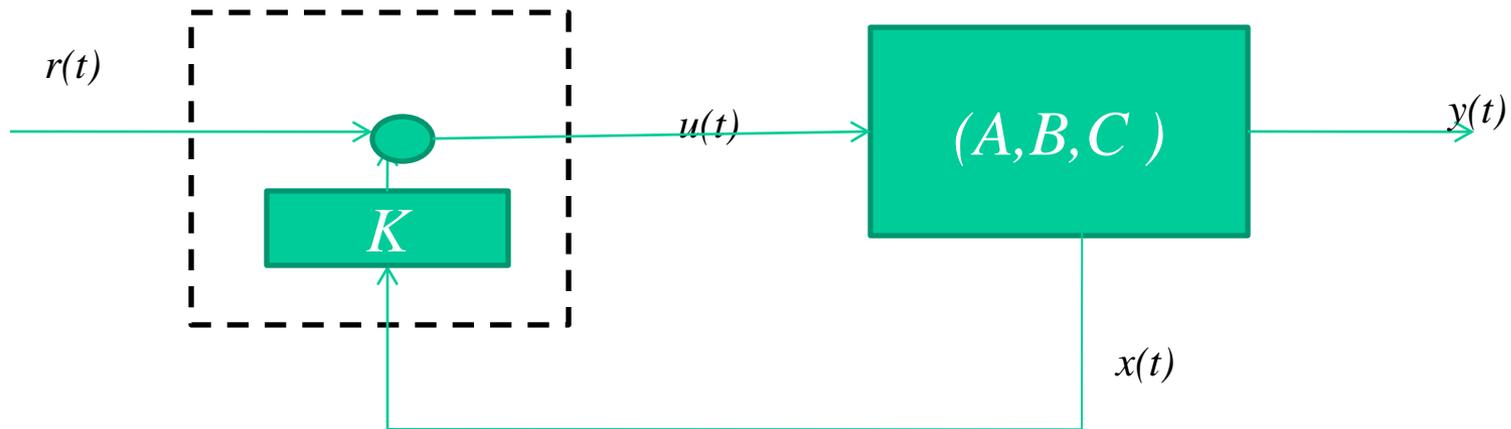
Progettare la legge di controllo con retroazione di stato $u = k^T x + r$ che assegna i poli in $\Lambda_d = \{-1, -1, -1\}$.



Assegnamento dell'autostruttura per sistemi MIMO

- Vedremo che per i sistemi MIMO con una retroazione di stato è possibile assegnare non solo i poli ma anche, nel senso che sarà chiaro nel seguito, gli autovettori.
- Questo è tanto più vero, quanto maggiore è il numero delle variabili di controllo.
- In definitiva, per sistemi MIMO, con una retroazione di stato è possibile non solo modificare la posizione dei poli ma anche (parzialmente) quella degli zeri.





- Consideriamo il sistema MIMO descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A \in R^{n \times n} \quad B \in R^{n \times m}$$



- Vogliamo studiare sotto quali condizioni, attraverso una retroazione di stato, è possibile assegnare gli n autovalori della matrice dinamica del sistema a ciclo chiuso e i corrispondenti autovettori.
- Sia $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ una n -pla di autovalori desiderati, che supponiamo distinti; allora i corrispondenti autovettori $u_1, u_2 \dots u_n$ devono essere selezionati in modo da essere linearmente indipendenti.
- Inoltre, per essere compatibile con la scelta degli autovalori, la selezione degli autovettori deve essere tale che, se u_i corrisponde ad un autovalore complesso λ_i , allora u_i^* deve corrispondere a λ_i^*



- Quindi l'obiettivo dell'assegnamento dell'autostruttura consiste nel trovare una matrice K tale che, assegnata una n -pla di numeri complessi simmetrici $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ e una corrispondente n -pla di vettori complessi simmetrici $u_1, u_2 \dots u_n$, si abbia

$$(A + BK)u_i = \lambda_i u_i \quad i = 1, \dots, n$$

e quindi

$$[\lambda_i I - (A + BK)]u_i = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Si noti che l'ultima equazione rappresenta un sistema di equazioni *sovraspecificato*, cioè contenente più equazioni che incognite.



- Il sistema è risolubile solo a patto di eliminare un certo numero di equazioni, il che equivale ad assegnare solo m componenti per ciascun autovettore.
- L'alternativa che si segue più frequentemente è quella di trovare la soluzione che minimizza l'errore (nel senso dei minimi quadrati).
- Vedremo in seguito, come questa tipologia di problemi possa essere risolta con tecniche di pseudo-inversione.



- Per studiare la questione da un altro punto di vista, si noti che, ponendo $v_i = Ku_i$, il problema considerato è equivalente a trovare una n -pla di vettori $v_1, v_2 \dots v_n$, con v_i in R^m , tale che

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Si noti che dall'ultima equazione, ricavando u_i , si ha

$$u_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B v_i$$

Perché l'ultima equazione ammetta una soluzione v_i occorre che u_i appartenga al sottospazio m -dimensionale generato da $(\lambda_i I - A)^{-1} B$.



- Una volta calcolati $v_i, i=1, \dots, n$, si ha

$$KU = V$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$K = VU^{-1}$$



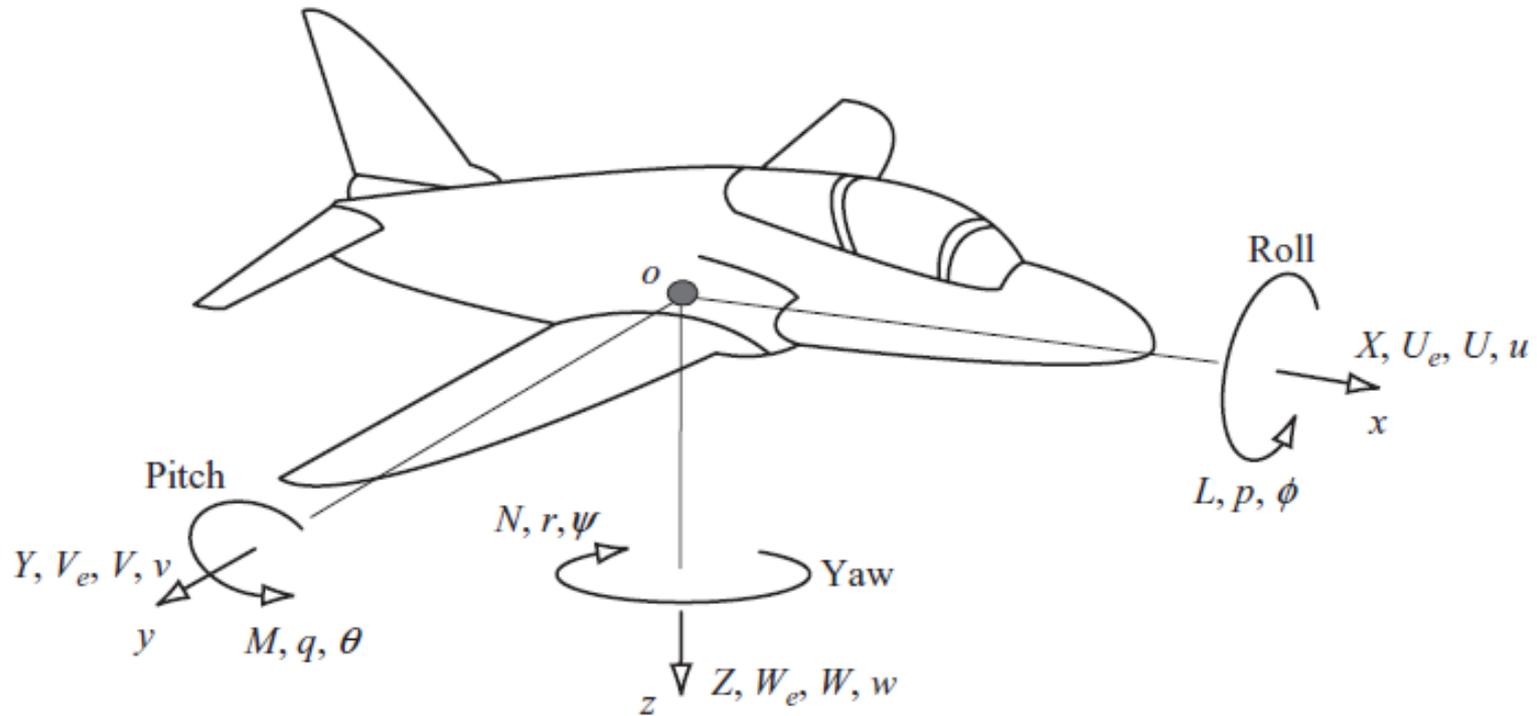
- In definitiva, non è possibile assegnare in maniera arbitraria l'intero autovettore u_i . Sulla scelta di ciascun autovettore si hanno m gradi di libertà.
- Da quest'ultima osservazione appare chiaro che quanto maggiore è il numero di ingressi (variabili di controllo) tanto maggiore è il numero di gradi di libertà che si hanno per la scelta degli autovettori.



- **Esempio: controllo di un aeromobile.** Un classico problema di controllo multivariabile in cui si può applicare l'assegnamento dell'autostruttura, è quello del controllo con retroazione di stato di un velivolo.
- In particolare le *flying qualities specifications* indicano qual è la collocazione desiderata per i poli a ciclo chiuso.
- Per garantire un volo confortevole è però fondamentale dare anche una struttura desiderata agli autovettori del sistema a ciclo chiuso.



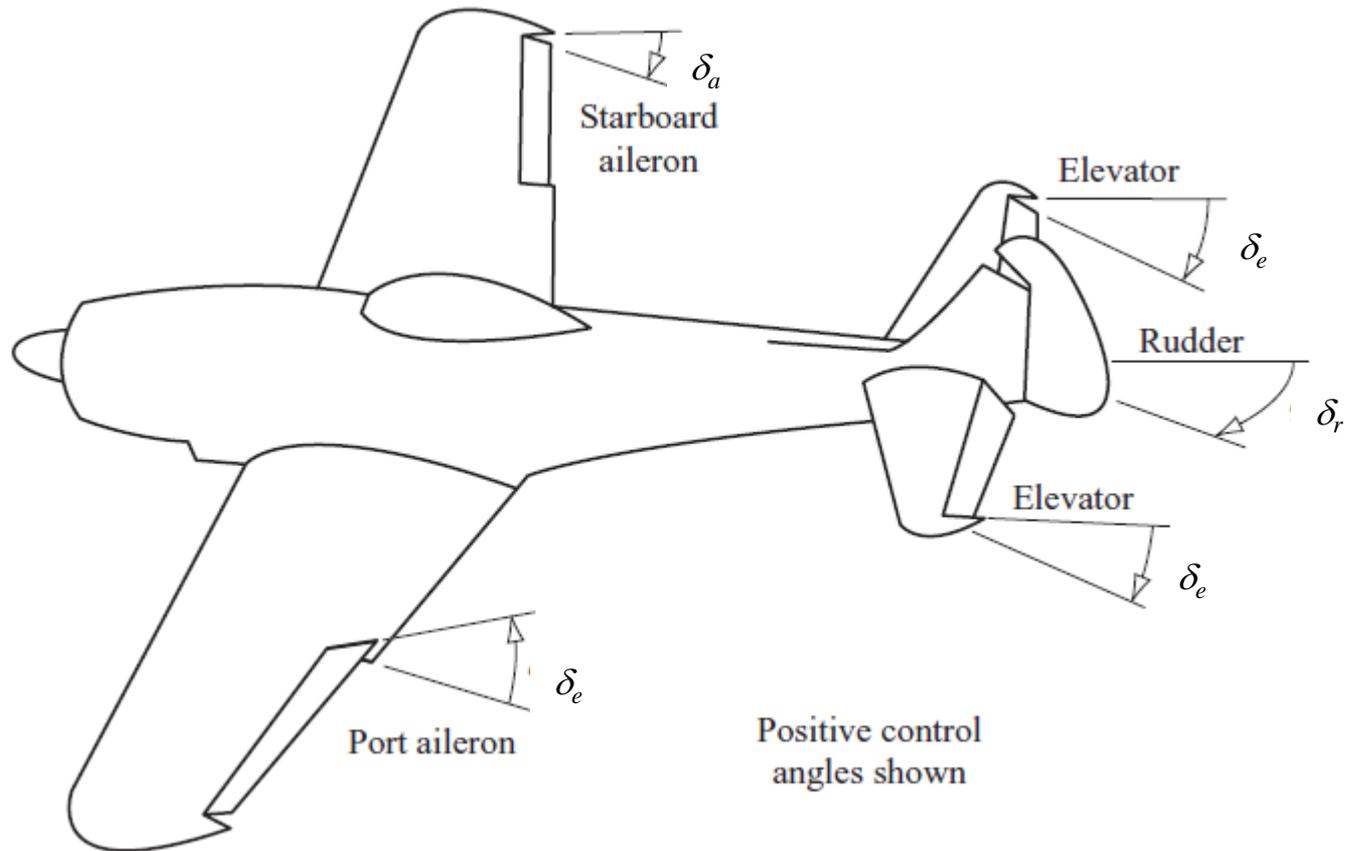
Cenni di Dinamica del Volo: Variabili del Moto



	<i>Trimmed equilibrium</i>			<i>Perturbed</i>		
Aircraft axis	ox	oy	oz	ox	oy	oz
Force	0	0	0	X	Y	Z
Moment	0	0	0	L	M	N
Linear velocity	U_e	V_e	W_e	U	V	W
Angular velocity	0	0	0	p	q	r
Attitude	0	θ_e	0	ϕ	θ	ψ



Superfici di Controllo



Equazioni del Moto di un Aereo

Force Equations

$$\dot{U} = RV - QW - g'_0 \sin \theta + \frac{F_x}{m}$$

$$\dot{V} = -RU + PW + g'_0 \sin \phi \cos \theta + \frac{F_y}{m}$$

$$\dot{W} = QU - PV + g'_0 \cos \phi \cos \theta + \frac{F_z}{m}$$

Kinematic Equations

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \sin \phi + R \cos \phi)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = \frac{Q \sin \phi + R \cos \phi}{\cos \theta}$$

Moment Equations

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 \bar{L} + c_4 N$$

$$\dot{Q} = c_5 PR - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M$$

$$\dot{R} = (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 \bar{L} + c_9 N$$

Navigation Equations

$$\begin{aligned} \dot{p}_N = & U \cos \theta \cos \psi + V(-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi) \\ & + W(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_E = & U \cos \theta \sin \psi + V(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \\ & + W(-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \end{aligned}$$

$$\dot{h} = U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta$$

Gli ingressi manipolabili (potenza motore, deflessioni di elevatori, alettoni e timone) determinano le forze ed i momenti che compaiono nelle equazioni, secondo relazioni nonlineari



Punti di Equilibrio e Modelli Linearizzati

- Un **punto di equilibrio** per un aereo in volo corrisponde ad una condizione in cui
 - tutte le **velocità** (lineari ed angolari) sono **costanti** (o nulle)
 - tutte le **accelerazioni** (lineari e angolari) sono **nulle**

Steady-State Flight:

$$\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W} \text{ (or } \dot{V}_T, \dot{\beta}, \dot{\alpha}) \equiv 0, \quad U = \text{const.} \quad (2.5-3a)$$

with the following additional constraints according to the flight condition:

Steady Wings-Level Flight: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0 \quad (\because P, Q, R \equiv 0)$

Steady Turning Flight: $\dot{\phi}, \dot{\theta} \equiv 0, \quad \dot{\psi} \equiv \text{turn rate}$

Steady Pull-up: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\theta} \equiv \text{pull-up rate}$

Steady Roll: $\dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\phi} \equiv \text{roll rate}$

(2.5-3b)



Modelli Linearizzati Disaccoppiati

- Nella condizione di *volo livellato* con sideslip nullo, si ottengono due modelli linearizzati disaccoppiati

– Modello Linearizzato Longitudinale

$$E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad \mathbf{x}^T = [v_T \quad \alpha \quad \theta \quad q], \quad \mathbf{u}^T = [\delta_{th} \quad \delta_e]$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_T - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} X_{\delta th} \cos \alpha_e & X_{\delta e} \\ -X_{\delta th} \sin \alpha_e & Z_{\delta e} \\ 0 & 0 \\ M_{\delta th} & M_{\delta e} \end{bmatrix}$$

(

$$A = \begin{bmatrix} X_V + X_{T_V} \cos \alpha_e & X_{\alpha} & -g'_0 \cos \gamma_e & 0 \\ Z_V - X_{T_V} \sin \alpha_e & Z_{\alpha} & -g'_0 \sin \gamma_e & V_T + Z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_V + M_{T_V} & M_{\alpha} & 0 & M_q \end{bmatrix}.$$



Modelli Linearizzati Disaccoppiati

– Modello Linearizzato Latero-Direzionale

$$E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}^T = [\beta \quad \phi \quad p_W \quad r_W], \quad \mathbf{u}^T = [\delta_a \quad \delta_r]$$

$$E = \begin{bmatrix} V_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ L'_{\delta a} & L'_{\delta r} \\ N'_{\delta a} & N'_{\delta r} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_\beta & g'_0 \cos \theta_e & Y_p & Y_r - V_T \\ 0 & 0 & \frac{\cos \gamma_e}{\cos \theta_e} & \frac{\sin \gamma_e}{\cos \theta_e} \\ L'_\beta & 0 & L'_p & L'_r \\ N'_\beta & 0 & N'_p & N'_r \end{bmatrix},$$



- Per quanto riguarda le dinamiche longitudinali, due modi oscillatori sono di particolare rilievo.
- Il modo di *short-period* è tipicamente una oscillazione molto smorzata con un periodo di pochi secondi.
- Esso consiste in una rapida variazione delle variabili di pitch (θ e q) e dell'angolo di attacco α , mentre la velocità rimane essenzialmente invariata (a causa della brevità del fenomeno).



- Il modo di *Fugoide* (lungo periodo) è caratterizzato da una marcata variazione della velocità v_T , dell'angolo di pitch θ e dell'altitudine, mentre l'angolo di attacco α rimane essenzialmente invariato.
- L'oscillazione, in questo caso, è causata dalla conversione di energia cinetica (velocità) in potenziale (altitudine) e viceversa, che avviene nel momento in cui il velivolo cerca di ristabilire la condizione di equilibrio, corrispondente al volo livellato, a seguito di una perturbazione.
- Tipicamente il periodo dell'oscillazione varia tra i 20 e 60 secondi, e il pilota stesso è in grado di controllare l'oscillazione.



- È opportuno che il sistema di controllo preservi le caratteristiche ‘naturali’ dell’aeromobile.
- Ordinando le variabili di stato del modello longitudinale come

$$x = (\alpha \quad q \quad \mathcal{G} \quad v_T)^T$$

il sistema di controllo deve essere tale che la velocità non sia perturbata dal modo di short period, e che l’angolo di attacco α non vari in presenza delle oscillazioni di fugaide.



- Per soddisfare questo requisito, si può richiedere che gli autovettori del sistema a ciclo chiuso siano nella forma

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \pm j \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \pm j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In questo modo si mantiene il disaccoppiamento ‘naturale’ già esistente tra i modi di evoluzione.



- Per comprendere meglio questo fatto, è opportuno ricordare l'espressione della risposta nello stato in funzione di autovalori e autovettori:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n u_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} w_i^T B u(\tau) d\tau$$

Da questa espressione si deduce che l' i -esimo modo di evoluzione (relativo all' i -esimo autovalore) ha effetto solo nelle direzioni in cui gli autovettori hanno componenti non nulle.

Dunque scegliendo gli autovettori del modello longitudinale a ciclo chiuso come specificato nel lucido precedente, otterremo che il modo di short period interessa solo le componenti α e q , mentre il modo di fugoide avrà effetto solo sulle componenti θ e v_T .



- Sulla base della teoria sviluppata in precedenza, non è possibile assegnare tutti gli autovettori a ciclo chiuso in maniera precisa, avendo a disposizione due sole variabili di controllo (δ_{th} e δ_e) per un sistema del quarto ordine.
- Dunque, in generale, si utilizzano tecniche di ottimizzazione che mirano ad ottenere autovettori a ciclo chiuso il più possibile ‘vicino’ a quelli desiderati.
- Un discorso analogo a quello sviluppato per il modello longitudinale, si può ripetere per il modello latero-direzionale del velivolo.

