

# Linear Matrix Inequalities

Corso di Controllo Multivariabile  
Prof. Francesco Amato

# Introduzione

- Molti problemi di controllo possono essere riformulati in termini di ***Disuguaglianze Matriciali Lineari (LMI)***
- Questi problemi possono essere risolti per via numerica mediante algoritmi molto efficienti
- Alcuni problemi di questo tipo:
  - Costruzione di funzioni di Lyapunov per analisi di stabilità e performance
  - Sintesi di controllori (robusti) multivariabili, sia statici che dinamici
  - Scalatura di matrici
  - Sintesi di controllori con ottimizzazione multi-obiettivo

# Origine

- L'introduzione delle LMI si può far risalire a più di 100 anni fa
- Dalla teoria di Lyapunov, infatti, sappiamo che il sistema

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t)$$

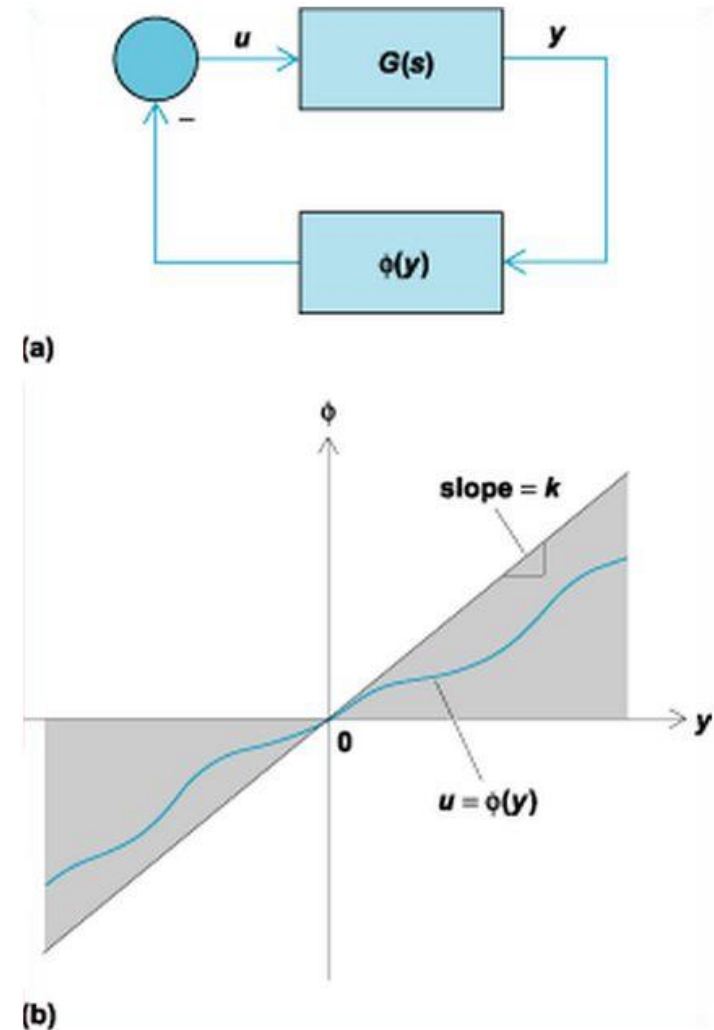
è asintoticamente stabile se e solo se esiste una matrice  $P > 0$  tale che

$$A^T P + P A < 0$$

- La disequaglianza contiene una variabile matriciale,  $P$ , che compare solo in termini lineari

# Problema di Lur'e

- Negli anni '40, i matematici russi Lur'e, Postnikov ed altri applicano il metodo di Lyapunov ad alcuni problemi pratici di controllo
- In particolare, affrontarono il problema del controllo dei sistemi con nonlinearità a livello degli attuatori
- Le condizioni, formulate come disuguaglianze polinomiali, possono essere espresse in forma di LMI



# Positive-Real Lemma

- Negli anni '60, Yakubovich, Popov e Kalman formulano il *Positive Real Lemma* per risolvere in forma grafica le LMI nel problema di Lur'e
- Il PR Lemma comporta la risoluzione delle seguenti LMI

$$P = P^T > 0, \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} \leq 0$$

per determinare se il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

è *passivo*. Questo permette di determinare la stabilità del sistema di Lur'e, con retroazione nonlineare

$$u = \phi(y)$$

# Sviluppi Storici

- Negli anni '70, studiando il problema del controllo ottimo quadratico, Willems dimostra che la LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0$$

può essere risolta studiando le soluzioni dell'equazione algebrica di riccati (ARE)

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0$$

- Il grosso passo in avanti è rappresentato dalla possibilità di risolvere efficientemente le LMI per via numerica
- I primi a risolvere le LMI di Lur'e per via numerica, sono Pyatnitskii and Skorodinskii (1982), tramite il cd. *ellipsoid method*

# Sviluppi Storici

- Il passo finale, che è stato essenziale per la diffusione delle LMI, è stato lo sviluppo dei cd. *Interior-Point methods*
- Nel 1984 Karmakar introduce un nuovo algoritmo di programmazione lineare molto efficace dal punto di vista pratico
- Nel 1988 Nesterov e Nemirovskii sviluppano un metodo I.P. specifico per problemi convessi con LMI

# Richiami: Insieme Convesso e Funzione Convessa

- L'insieme  $S \subset R^m$  è **convesso** se

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S, \quad \forall x, y \in S, \lambda \in (0,1)$$

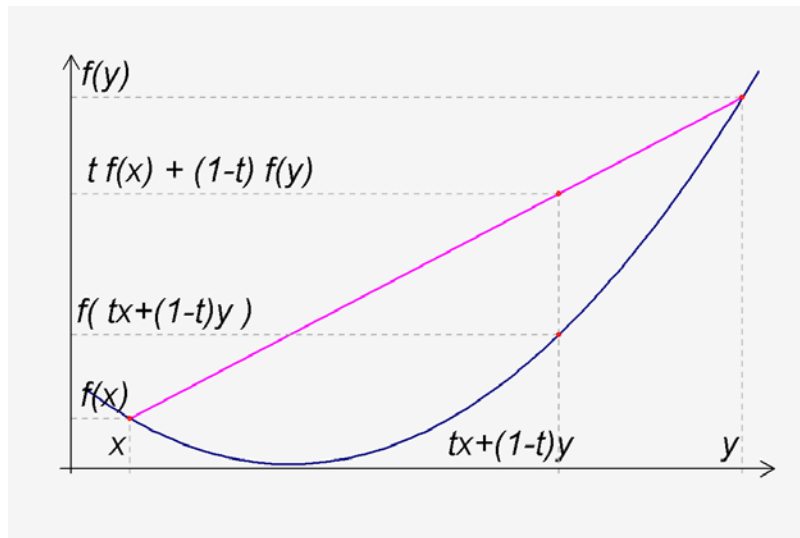
- La **funzione matriciale**  $F$  a valori simmetrici, definita sul dominio  $S$ , è **convessa**

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y), \quad \forall x, y \in S, \lambda \in (0,1)$$

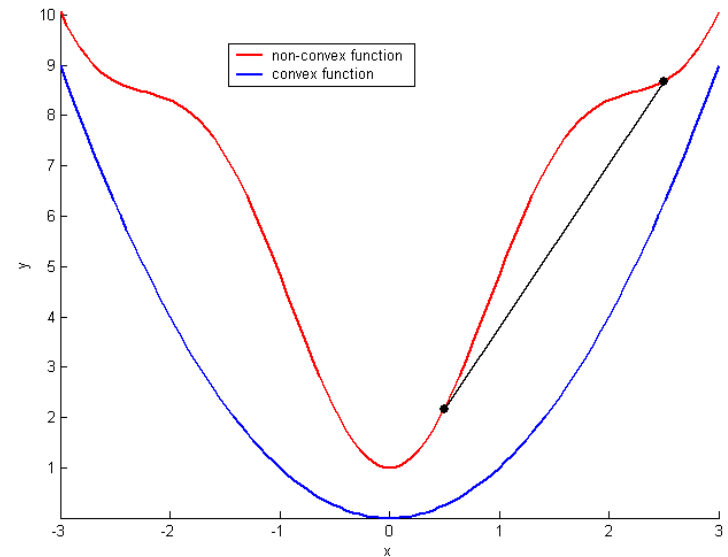
- La **funzione** è **strettamente convessa** se vale la disuguaglianza stretta

# Esempi di Funzioni Convesse

- Funzioni convesse



- Funzioni non convesse



# Semi-Definite Programming (SDP)

- I **vincoli** sono definiti da **funzioni matriciali simmetriche**  $G_i(x)$  delle variabili di ottimizzazione (*decision variables*)

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in X, G_1(x) \leq 0, \dots, G_m(x) \leq 0 \end{array}$$

- Si dice convesso se le funzioni  $f(x)$  e  $G_i(x)$  sono tutte convesse
- E' un problema di ottimizzazione **in forma LMI**, o **lineare SDP**, se le funzioni  $f(x)$  e  $G_i(x)$  sono affini

# Definizione

- Forma canonica di una LMI

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1)$$

dove  $x \in R^m$  è il vettore delle variabili della LMI e le matrici **simmetriche**  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$  sono date

- Il primo membro è una matrice, quindi la formula indica che  $F(x)$  deve essere definita positiva, ossia

$$u^T F(x) u > 0, \quad \forall u \in R^n$$

- La LMI (1) è un vincolo convesso sul vettore  $x$ , ossia l'insieme  $\{x \mid F(x) > 0\}$  è convesso

# Proprietà dei Problemi Convessi

- I problemi di questo tipo sono problemi di ottimizzazione convessa
  - I punti di ottimo locale sono anche p. di ottimo globale
- La convessità di per sé non implica l'esistenza di una soluzione ottima, né di un algoritmo efficiente di risoluzione

# Insiemi di LMI

- Possiamo facilmente combinare insieme più LMI
- Consideriamo, ad esempio, l'insieme di LMI

$$F^{(1)}(x) > 0, F^{(2)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$$

- Possiamo esprimere questo insieme come un'unica LMI

$$\begin{bmatrix} F^{(1)}(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F^{(2)}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{(p)}(x) \end{bmatrix} > 0$$

# Forma Canonica e Forma Matriciale

- Notiamo che la disuguaglianza di Lyapunov

$$A^T P + P A < 0$$

è una LMI nella variabile  $P$ , pur non essendo nella forma [\(1\)](#)

- E' facile rendersi conto di ciò, trasformando la disuguaglianza di sopra in forma canonica:
  - Si considerino le matrici  $P_1, \dots, P_m$ , base dello spazio delle matrici simmetriche  $n \times n$ , con  $m = n(n+1)/2$
  - Non c'è termine costante, quindi  $F_0 = 0$
  - Si ponga  $F_i = -A^T P_i - P_i A$
- Esercizio...

# Forma Canonica e Forma Matriciale

- Nella maggior parte dei casi, i problemi vengono ricondotti alla forma matriciale
  - Più sintetica dal punto di vista notazione
  - Più efficiente dal punto di vista computazionale

# Feasibility Problem

- Data una LMI  $F(x) > 0$ , il corrispondente problema LMI (LMIP) consiste nel trovare, se esiste, la  $x^{\text{feas}}$  tale che  $F(x^{\text{feas}}) > 0$
- Questo problema è detto di *Feasibility* (fattibilità) ed è convesso
- Esempio di feasibility LMIP: determinare la stabilità mediante la disuguaglianza di Lyapunov

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P + P A &< 0 \end{aligned}$$

# Eigenvalue Problem

- Forma base dell'Eigenvalue Problem (EVP)

$$\begin{array}{ll}\min & \lambda \\ \text{s.t.} & \lambda I - A(x) > 0, \\ & B(x) > 0\end{array}$$

$A(x), B(x)$  simmetriche  
ed affini in  $x$

- Obiettivo: minimizzare il max autovalore di  $A(x)$ , rispettando il vincolo  $B(x) > 0$
- Forma alternativa

$$\begin{array}{ll}\min & c^T x \\ \text{s.t.} & F(x) > 0\end{array}$$

dove  $F$  è una funzione affine in  $x$

# Eigenvalue Problem

- Altra forma alternativa

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ \text{s.t.} & A(x, \lambda) > 0 \end{array}$$

dove  $A$  è affine rispetto a  $(x, \lambda)$

# Generalized Eigenvalue Problem

- Forma base del Generalized Eigenvalue Problem (GEVP)

$$\begin{array}{ll}\min & \lambda \\ \text{s.t.} & \lambda B(x) - A(x) > 0, \\ & B(x) > 0, \\ & C(x) > 0\end{array}$$

$A(x), B(x), C(x)$  simmetriche  
ed affini in  $x$

- Obiettivo: minimizzare il max autovalore generalizzato della coppia di matrici  $A(x), B(x)$  rispettando il vincolo  $C(x) > 0$
- Forma alternativa

$$\begin{array}{ll}\min & \lambda \\ \text{s.t.} & A(x, \lambda) > 0\end{array}$$

dove  $A$  è affine risp. ad  $x$  e risp. a  $\lambda$ , separatamente

# Generalized Eigenvalue Problem

- Esempio di GEVP

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & -A^T P - PA - 2\alpha P > 0, \\ & P > 0 \end{aligned}$$

- Notare che le variabili  $\alpha$  e  $P$  sono moltiplicate, quindi è un GEVP, non un EVP

# Risoluzione di Problemi LMI

- I problemi standard (Feasibility, EVP, GEVP) sono trattabili, dal punto di vista sia teorico che pratico
- Essi possono essere risolti in tempo polinomiale
- Esistono algoritmi risolutivi estremamente efficienti
  - Ellipsoidal Algorithm
  - Interior-Point Methods

# Software per Risoluzione di LMI

- Esistono numerosi software per la risoluzione di problemi in forma LMI
  - MATLAB LMI Toolbox (nelle versioni recenti fa parte del Robust Control Toolbox, è indicato come LMILAB)
  - SeDuMi (open-source)
  - CVX (open-source)
  - TOMLAB (commerciale)
  - ...

# YALMIP

- La definizione di un insieme di LMI è estremamente facile ed intuitiva se si utilizza questo programma
- Il programma si interfaccia con numerosi solver esterni
- La scrittura delle LMI è indipendente dal solver utilizzato
- Può essere usato anche per problemi non SDP, ad es.
  - Bilinear Matrix Inequalities
  - Global Optimization
  - Mixed Integer
- <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip>

# Esercizio 1

- Si generi una matrice  $A$  random, di dimensioni  $n \times n$
- Si vuole testare la stabilità utilizzando la disequaglianza di Lyapunov
- Se gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa, esisterà una matrice  $P$  simmetrica tale che

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A^T P + P A &< 0 \end{aligned}$$

## Esercizio 2

- Si generi una matrice  $A$  random, di dimensioni  $n \times n$ , con almeno un autovalore a parte reale positiva
- Si crei un sistema che abbia  $A$  come matrice dinamica
- Progettare un controllore statico a retroazione di stato per stabilizzare il sistema

# Piazzamento dei Poli mediante LMI

- Definiamo una regione LMI come un sottoinsieme del piano complesso

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \Lambda + z\Theta + z^*\Theta^T < 0\}$$

dove  $\Lambda$  e  $\Theta$  sono matrici reali e  $\Lambda$  è simmetrica

- E' possibile definire come regioni LMI diversi insiemi di interesse, ad es. una striscia verticale, un disco, un cono con vertice nell'origine

# Regioni LMI

- Il semipiano a sinistra della retta verticale di ascissa  $-\alpha$  è definito da

$$z + \bar{z} + 2\alpha < 0$$

- Disco centrato in  $(-q, 0)$  con raggio  $r$

$$\begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0$$

- Il settore conico con vertice nell'origine e angolo interno pari a  $2\theta$  è definito da

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(z + \bar{z}) & \cos(\theta)(z - \bar{z}) \\ \cos(\theta)(z - \bar{z}) & \sin(\theta)(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0$$

# $D$ -stabilità

- Dato un sottoinsieme  $D$  del piano complesso, un sistema LTI si dice  $D$ -stabile se i suoi autovalori appartengono a  $D$
- Un sistema LTI, con matrice dinamica  $A$ , è  $D$ -stabile se e solo se esiste una matrice simmetrica  $P$ , definita positiva, tale che

$$\Lambda \otimes P + \Theta \otimes (AP) + \Theta^T \otimes (PA^T) < 0$$

- Prodotto di Kronecker

$$A \otimes B := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{bmatrix}$$

## Esercizio 3

- Per il sistema LTI con matrici  $D=0$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -0.7 & -0.49 & 0.3 & 0 \\ 1 & 0 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & -1.19 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & -0.1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.49 & 1.19 & 0 \\ 0 & 0.49 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

si progetti un controllore state-feedback statico tale che il sistema a ciclo chiuso abbia i poli nella regione definita dall'intersezione della striscia verticale  $[-2, -0.4]$  con il settore conico centrato nell'origine e di ampiezza pari a  $100^\circ$

## Esercizio 3

- I vincoli dati definiscono una regione LMI, nella forma

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : \Lambda + z\Theta + z^*\Theta^T < 0\}$$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.766 & -0.643 \\ 0 & 0 & 0.643 & 0.766 \end{pmatrix}$$

# State-Feedback con Piazzamento dei Poli

- Per il progetto del controllore si può utilizzare la seguente disuguaglianza

$$\Lambda \otimes Q + \Theta \otimes ((A + BK)Q) + \Theta^T \otimes (Q(A + BK)^T) < 0$$

nelle variabili matriciali  $Q$  e  $K$

- Per trasformare la precedente in una LMI, poniamo  $N = KQ$

$$\Lambda \otimes Q + \Theta \otimes (AQ) + \Theta \otimes (BN) + \Theta^T \otimes (QA^T) + \Theta^T \otimes (BN)^T < 0$$

# Riferimenti Bibliografici

- Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, SIAM, 1994.
- Sigurd Skogestad and Ian Postlethwaite, “Multivariable Feedback Control: Analysis and Design” (2<sup>nd</sup> edition), Wiley, 2005.

# Complementi di Schur

- Una tecnica molto utile per trasformare disequaglianze non lineari in LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{array}{l} Q(x) = Q(x)^T \\ R(x) = R(x)^T \end{array}$$



$$\begin{array}{l} Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \\ R(x) > 0 \end{array}$$