

Controllo Ottimo Lineare Quadratico: Introduzione

Docente Prof. Francesco Amato



Cenni storici

- Il problema del controllo ottimo lineare quadratico (LQ) ha la sua genesi nel lavoro di Wiener sulla teoria del filtraggio ottimo sviluppato per applicazioni belliche durante la seconda guerra mondiale.
- Il termine *lineare* discende dal fatto che i sistemi considerati sono assunti essere lineari.
- Il termine *quadratico* discende dal fatto che gli indici di costo per misurare le prestazioni coinvolgono i quadrati (pesati in modo opportuno) delle variabili in gioco.



- All'inizio degli anni Sessanta, grazie all'apporto di ricercatori di grande valore (come R. Kalman) il problema del controllo ottimo LQ fu formalizzato per la prima volta così come è conosciuto ancora oggi.
- Il problema era in sostanza quello di trovare una legge di controllo che minimizzasse un indice di costo del tipo:

$$\int_{t_0}^T \left(x^T Q x + u^T R u \right) dt + x^T (T) M x(T)$$

in riferimento ad un sistema lineare del tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) \text{ assegnato}$$



- Il problema fu successivamente ridotto alla soluzione di una equazione di Riccati matriciale (in tempi più recenti ad un problema di ammissibilità basato su LMI).
- Negli anni Sessanta e Settanta sulle principali riviste internazionali dei Controlli Automatici furono pubblicati molti studi teorici rivolti alla soluzione del problema LQ.
- Fu presto chiaro che la nuova tecnica offriva molti vantaggi rispetto alle metodologie già esistenti.



- La nuova tecnica
 - Permetteva di interagire in maniera abbastanza semplice con i sistemi multivariabile.
 - Era applicabile anche a sistemi tempo-varianti
 - Permetteva di ottimizzare le variabili in gioco anche su intervalli di tempo finito
- Successivamente, grazie all'apporto di Kalman e Bucy, la teoria del controllo ottimo LQ fu estesa al caso in cui la misurazione dello stato del sistema fosse affetta da rumore.



- Successivamente fu anche trattato il problema in cui lo stato non fosse completamente misurabile e dovesse essere stimato tramite un osservatore.
- In particolare l'ipotesi di disporre di misure sporcate da rumore portò allo sviluppo della teoria del *filtro di Kalman*.
- Esso è un particolare tipo di osservatore che minimizza l'errore di stima in presenza di rumore gaussiano sulle misure delle variabili di uscita.
- Il filtro di Kalman è stato sicuramente una delle metodologie sviluppate nell'ambito dell'automatica più utilizzate a livello progettuale in vari ambiti dell'ingegneria.



- Un altro importante risultato sviluppato in quel periodo fu il cosiddetto *Teorema di Separazione*.
- In pratica il problema del controllo ottimo LQ con retroazione di uscite rumorose, può essenzialmente essere “separato” in due sotto-problemi.
- Si risolve un problema di controllo ottimo come se fosse disponibile tutto lo stato.
- Si progetta un filtro di Kalman per stimare lo stato.
- Questo problema è comunemente noto come problema di controllo ottimo lineare quadratico gaussiano LQG.



Formulazione del problema LQ

- **Problema [Controllo ottimo LQ].** Dato un sistema LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_0) \text{ assegnato} \quad x \in R^n \quad u \in R^m$$

trovare una legge di controllo in forma di retroazione di stato $u = -Kx$ che minimizzi un indice di costo nella forma:

$$V = \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) M x(T)$$

con $Q \geq 0$, $M \geq 0$, $R > 0$.



- In genere x rappresenta lo stato incrementale del sistema di controllo (al netto dell'azione in feedforward), per cui il termine $x^T Q x$ penalizza l'accuratezza dell'azione di controllo.
- Il termine $u^T R u$ pesa l'energia spesa dall'azione di controllo.
- Il termine $x^T(T) M x(T)$ infine pesa lo stato terminale del sistema.
- Un problema di controllo in cui l'obiettivo è quello di mantenere lo stato vicino allo zero è detto *problema di regolazione*.
- Quindi nel seguito questo problema di controllo ottimo sarà riferito come LQR (Linear Quadratic Regulator).



L'equazione di Hamilton-Jacobi

- Ora sarà derivata un'equazione per la soluzione del problema di controllo ottimo LQR.
- Per dare maggiore generalità alla discussione considereremo un problema più generale del problema LQR.
- In particolare considereremo sistemi nonlineari e funzioni di costo aventi forma generale.
- Questo non comporterà nessun problema dal punto di vista concettuale.
- Successivamente i risultati trovati saranno particolarizzati al caso LQR.



- Considerato un sistema nonlineare

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

il problema è quello di trovare una legge di controllo con retroazione di stato $u=\varphi(x,t)$ tale da minimizzare l'indice di costo

$$V = \int_t^T l(x, u, \tau) d\tau + m(x(T))$$

La funzione di “peso” l e il costo terminale m sono funzioni non negative di x e u , con $l(0,0,\tau)=0$ e $m(0)=0$.



- Indichiamo con $V^*(x(t), t)$ il valore minimo dell'indice di costo quando lo stato iniziale all'istante t è uguale a $x(t)$.

In altri termini

$$V^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, T]}(\cdot)} \left[\int_t^T l(x, u, \tau) d\tau + m(x(T)) \right]$$

s. a

$$\dot{x} = f(x, u, \tau) \quad x(\tau) \Big|_{\tau=t} = x(t)$$



- Si ha che:

$$V^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t+\Delta t]}} \left[\int_t^{t+\Delta t} l(x, u, \tau) d\tau + V^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right]$$

Questa uguaglianza discende dalla proprietà di additività degli integrali e dal *Principio di Ottimalità* di Belmann.



- Il Principio di ottimalità di Belmann si può spiegare graficamente guardando la figura seguente.

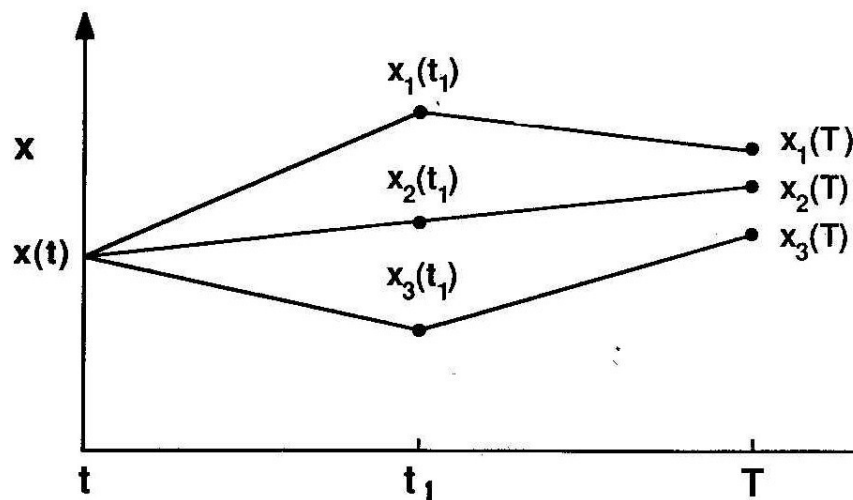


Figure 2.2-1 Illustration of Principle of Optimality; trajectories over $[t_1, T]$ are all optimal.

In pratica, il Principio di Ottimalità afferma che il costo ottimo per le traiettorie che cominciano all'istante t da $x(t)$ e finiscono all'istante T , si ottiene minimizzando la somma del costo che si ha nell'andare in $x_i(t_1)$ e il costo ottimo da t_1 in poi, cioè

$$\int_t^{t_1} l(x, u, \tau) d\tau \quad \text{e} \quad V^*(x(t_1), t_1)$$



- Ora, assumendo che Δt sia sufficientemente piccolo, possiamo scrivere:

$$\int_t^{t+\Delta t} l(x, u, \tau) d\tau = l(x(t + \alpha\Delta t), u(t + \alpha\Delta t), t + \alpha\Delta t) \Delta t \quad \alpha \in (0,1)$$

$$V^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = V^*(x(t), t) + \frac{\partial V^*(x(t), t)}{\partial t} \Delta t + \left(\text{grad}_x V^*(x(t), t) \right)^T f(x(t), u(t), t) \Delta t + o(\Delta t^2)$$

Per cui:

$$V^*(x(t), t) = \min_{u_{[t, t+\Delta t]}} \left[l(x(t + \alpha\Delta t), u(t + \alpha\Delta t), t + \alpha\Delta t) \Delta t + V^*(x(t), t) + \frac{\partial V^*(x(t), t)}{\partial t} \Delta t + \left(\text{grad}_x V^*(x(t), t) \right)^T f(x(t), u(t), t) \Delta t + o(\Delta t^2) \right]$$



- Ora, facendo tendere Δt a zero, si perviene all'equazione di Hamilton-Jacobi

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = \min_u \left[l(x, u, t) + \left(\text{grad}_x V^*(x, t) \right)^T f(x, u, t) \right]$$

$$V^*(x, T) = m(x) \quad \text{per ogni } x$$

Per risolvere questa complessa equazione, si procederà come segue.



1 - Si risolve il problema di ottimizzazione statica non vincolato:

$$\min_u \left[l(x, u, t) + \left(\text{grad}_x V^*(x, t) \right)^T f(x, u, t) \right]$$

La soluzione sarà del tipo

$$u^* = \psi \left(\text{grad}_x V^*(x, t), x, t \right)$$



2 - Quindi si sostituisce u^* al posto di u
nell'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = l(x, \psi, t) + \left(\text{grad}_x V^*(x, t) \right)^T f(x, \psi, t)$$

$$V^*(x, T) = m(x) \quad \text{per ogni } x$$



3 – L'equazione al punto 2 è una equazione differenziale alle derivate parziali nell'incognita $V^*(x,t)$, con condizione terminale.

Se si sa risolvere questa equazione differenziale (e questo avviene nel caso del problema LQR) allora, sostituendo nell'espressione di u^* , formalmente si ottiene:

$$u^* = \psi(\text{grad}_x V^*(x,t), x,t) =: \phi(x,t)$$

Si noti che u^* si presenta in forma di retroazione di stato.



- Il contenuto di questi lucidi e dei successivi riguardanti il controllo ottimo LQ è tratto dai testi:
 - P. Dorato, C. Abdallah, V. Cerone, Linear-Quadratic Control, An Introduction. Prentice Hall, 1995.
 - B. D. O. Anderson, J. B. Moore, Optimal Control: Linear quadratic Methods. Prentice Hall, 1989 e sgg.

