Controllo Ottimo Lineare Quadratico: Soluzione del Problema LQR

Docente Prof. Francesco Amato

Problema LQR su orizzonte finito

- Ripartiamo dall'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = \min_u \left[l(x,u,t) + \left(grad_x V^*(x,t) \right)^T f(x,u,t) \right]$$

$$V^*(x,T) = m(x) \quad \text{per ogni } x$$

Nel caso del problema LQR, le funzioni coinvolte si particolarizzano come segue:

$$l(x,u,t) = x^T Q x + u^T R u$$

$$f(x,u,t) = Ax + Bu$$

Risolviamo il problema di ottimizzazione statica non vincolato:

$$\min_u \left[x^T Q x + u^T R u + \left(grad_x V^*(x,t) \right)^T (Ax + Bu) \right]$$

Dalla condizione necessaria di minimo

$$grad_u \left[x^T Q x + u^T R u + \left(grad_x V^*(x,t) \right)^T (Ax + Bu) \right] = 0$$

si ricava

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T grad_x V^*(x,t)$$

- Ora, si noti che l’Hessiano della funzione tra parentesi quadre valutato in u^* è pari a $2R$.
- Essendo l’Hessiano definito positivo, possiamo concludere che u^* è effettivamente il minimo.

- Ora sostituiamo l’espressione trovata per *u**
nell’equazione di Hamilton-Jacobi:

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t}=\left[x^T Qx+u^T Ru+\left(grad_x V^*(x,t)\right)^T (Ax+Bu)\right]_{u=u^*}$$

$$=x^T Qx+\frac{1}{4}\left(grad_x V^*(x,t)\right)^T BR^{-1}B^T grad_x V^*(x,t)$$

$$+\left(grad_x V^*(x,t)\right)^T\left[Ax-\frac{1}{2}BR^{-1}B^T grad_x V^*(x,t)\right]$$

Adesso risolviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Per fare questo assumeremo che (si dimostra in maniera rigorosa):

$$V^*(x,t) = x^T P(t) x$$

Sostituendo nell'equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene

$$-\frac{\partial V^*}{\partial t} = -x^T \dot{P} x = x^T Q x + x^T P B R^{-1} B^T P x$$
$$+ 2 x^T P \left(A x - B R^{-1} B^T P x \right)$$

- Alla fine si ottiene:

$$-x^T\dot{P}x = x^TQx - x^TPBR^{-1}B^TPx + x^T\left(A^TP + PA\right)x$$

Dovendo l’eguaglianza valere per ogni *x*, si perviene all’equazione (matriciale) di Riccati:

$$-\dot{P} = A^TP + PA + Q - PBR^{-1}B^TP$$

con condizione terminale

$$P(T) = M$$

- Possiamo riassumere i risultati trovati come segue.
- **Teorema [Controllo ottimo LQR su orizzonte finito].** Dato il problema di ottimizzazione

$$\min_{u_{[t_0,T)}} \int_{t_0}^{T} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt + x^T(T) M x(t)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(t_0)\,\text{assegnato}$$

la soluzione ottima è data dalla retroazione *lineare* dello stato:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P^*(t) x$$

dove *P*(.)* è una funzione matriciale simmetrica soluzione dell’equazione di Riccati

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t) A + Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) \qquad t \in [t_0, T] \qquad P(T) = M$$

Il valore ottimo dell’indice di costo è $V^* = x^T(t_0) P^*(t_0) x(t_0)$

- Il fatto che la legge di controllo ottimo sia in forma di retroazione di stato è fondamentale per la robustezza del sistema complessivo.
- Infatti, si noti che la matrice *P(.)*, e quindi la legge di controllo ottimo, vanno calcolate integrando *all'indietro* una equazione differenziale.
- Quindi *P(.)* e *K(.)* vanno calcolati *off-line;* questo, se la legge di controllo ottimo fosse open-loop, porterebbe seri problemi implementativi.

- Si noti che, essendo

$$V^*(x,t_1) = x^T P(t_1) x \geq x^T P(t_2) x = V^*(x,t_2) \quad t_1 < t_2$$

risulta

$$P(t_1) - P(t_2) \geq 0 \quad t_1 < t_2$$

Questo fatto si esprime dicendo che *P(.)* è una funzione matriciale decrescente. Inoltre per ogni *t*

$$P(t) \geq P(T) = M \geq 0$$

Quindi *P(.)* è una funzione matriciale semidefinita positiva.

- Esempio. Risolvere il problema LQR

$$\min_{u_{[0,T]}} \int_0^T \left(x^2 + u^2\right) dt$$

$$\text{s. a}$$

$$\dot{x} = u$$

Equazione di Riccati

$$-\dot{p} = 1 - p^2 \qquad p(T) = 0$$

Soluzione

$$p(t) = \frac{1 - e^{-2(T-t)}}{1 + e^{-2(T-t)}} \qquad u^* = -p(t)x(t)$$

Soluzione dell'equazione di Riccati

- **Teorema.** La soluzione dell'equazione di Riccati è data da

$$P^*(t) = Y(t) X^{-1}(t)$$

dove *X(t)* e *Y(t)* sono soluzioni dell'equazione differenziale matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}$$

- La matrice

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

riveste grande importanza nei problemi LQ e più in generale nei problemi di controllo. Essa si chiama matrice Hamiltoniana.

- Si noti che l’equazione differenziale matriciale Hamiltoniana ha la particolarità di possedere una condizione terminale piuttosto che una iniziale.
- Questo non permette di utilizzare il metodo di Laplace per il calcolo della soluzione.
- Nel seguito daremo l’espressione di $P^*(t)$ senza scendere nel dettaglio della dimostrazione.

- Cominciamo con l’osservare che gli autovalori di *H* sono caratterizzati dall’avere una simmetria quadrantale.
- Cioè se λ è un autovalore, anche $-\lambda$ lo è.
- Ciò discende dal fatto che le matrici $-H$ e H^T sono simili e quindi posseggono gli stessi autovalori

$$-H = JH^T J^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

- Se H non ha autovalori sull'asse immaginario, allora esiste sempre una trasformazione di base U

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}(t) \\ \hat{Y}(t) \end{bmatrix}$$

che porta la matrice Hamiltoniana nella forma

$$\hat{H} = U^{-1} H U = \begin{bmatrix} \Lambda_S & 0 \\ 0 & \Lambda_U \end{bmatrix}$$

dove Λ_S è la forma di Jordan relativa agli autovalori stabili di H e Λ_S è la forma di Jordan relativa agli autovalori instabili di H.

- La matrice di trasformazione U si può partizionare in quattro blocchi di dimensione *nxn* come segue

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Dove

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}$$

è costituita dagli autovettori di H corrispondenti agli autovalori della parte "stabile" di H, mentre

$$\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}$$

è costituita dagli autovettori di H corrispondenti agli autovalori della parte "instabile" di H.

- Dopo alcuni passaggi matematici (si faccia riferimento ai testi suggeriti in precedenza per maggiori dettagli) si trova che

$$P^*(t) = \left[U_{21} + U_{22} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_S (T-t)}\right]\left[U_{11} + U_{12} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_S (T-t)}\right]^{-1}$$

$$G = -\left[U_{22} - MU_{12}\right]^{-1}\left[U_{21} - MU_{11}\right]$$

Data la complessità computazionale nel determinare la trasformazione di base *U*, per sistemi complessi la *P*(.)* viene calcolata spesso attraverso tecniche numeriche. Tuttavia, si noti che il calcolo analitico di *P*(.)* permetterebbe l’implementazione *on*-*line* della legge di controllo.
Inoltre, l’espressione formale di *P*(.)* a cui si è pervenuti sarà fondamentale per derivare alcuni risultati riguardanti il problema LQR su orizzonte infinito.

- Esempio (continuazione). Risolvere il problema LQR utilizzando l'espressione della matrice Hamiltoniana

$$\min_{u_{[0,T]}} \int_0^T \left(x^2 + u^2\right) dt$$

$$\text{s. a}$$

$$\dot{x} = u$$

- Concludiamo la trattazione del problema LQR su orizzonte finito con qualche commento.
- Si noti innanzitutto che per comodità espositiva abbiamo considerato sistemi LTI. Tuttavia la teoria esposta può essere applicata senza alcuna complicazione concettuale a sistemi lineari tempo-varianti.
- L’unica differenza consiste nel fatto che, per sistemi tempo-varianti, il calcolo analitico di $P^*(.)$ non è possibile.
- Questo tuttavia è solo un aspetto formale, in quanto abbiamo visto che anche nel caso LTI, la matrice $P^*(.)$ in pratica viene determinata numericamente.
- Vedremo, invece, che nel problema LQR su orizzonte infinito, l’ipotesi di stazionarietà gioca un ruolo chiave nella determinazione dei principali risultati.

Controllo ottimo LQR su orizzonte infinito

- Considereremo ora il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{+\infty} \left(x^T Qx + u^T Ru \right) dt$$

$$s.a$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) \text{ assegnato}$$

con Q semidefinita positiva e R definita positiva.

- Il problema appena definito, va sotto il nome di problema LQR su orizzonte *infinito*.
- Ovviamente quando si ragiona su un intervallo temporale infinito non ha senso assegnare un peso allo stato terminale.
- Infatti, per garantire l’esistenza dell’integrale, lo stato del sistema deve andare necessariamente a zero.
- Ciò accade se l’azione del controllore ottimo è tale da stabilizzare asintoticamente il sistema a ciclo chiuso.
- Vedremo che ciò è garantito se sono soddisfatte alcune ipotesi sul sistema e sulla scelta dei pesi.

- Abbiamo visto che, quando la matrice Hamiltoniana *H* non possiede autovalori sull’asse immaginario, è possibile esprimere in forma chiusa la soluzione dell’equazione di Riccati

$$P^*(t) = \left[U_{21} + U_{22} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_S (T-t)}\right]\left[U_{11} + U_{12} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_S (T-t)}\right]^{-1}$$

$$G = -\left[U_{22} - MU_{12}\right]^{-1}\left[U_{21} - MU_{11}\right]$$

In questo caso, facendo tendere $T \rightarrow +\infty$ si ottiene:

$$P^*(\cdot) \underset{T \rightarrow \infty}{\rightarrow} U_{21} U_{11}^{-1} =: P^*$$

- In altri termini, sotto opportune ipotesi (le stesse che garantiscono che *H* non abbia autovalori sull'asse immaginario), la soluzione dell'equazione di Riccati su orizzonte infinito tende ad un valore limite

$$P^* = U_{21} U_{11}^{-1}$$

dove P^* è una soluzione (in particolare vedremo che è l'unica soluzione definita positiva) dell'*equazione algebrica di Riccati* (ARE)

$$Q + A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P = 0$$

- La legge di controllo ottima su orizzonte infinito risulta essere una retroazione lineare, con guadagno costante, dello stato

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P^* x(t) =: -Kx(t)$$

Si noti che, su orizzonte infinito, il fatto di trattare sistemi LTI risulta essere fondamentale per arrivare ad una equazione matriciale algebrica.

- Formalizzeremo ciò che è stato detto finora nel seguente teorema.
- Per enunciare in maniera corretta il teorema, si ricordi che una matrice semidefinita positiva Q in R^{nxn} può essere sempre fattorizzata nella forma

$$Q = E^T E \qquad rank(E) = rank(Q)$$

In genere si sceglie una matrice E con r righe linearmente indipendenti, dove $r=rank(Q)$.

- **Teorema [Controllo ottimo LQ su orizzonte infinito]**
- Si consideri il problema LQR su orizzonte infinito e si fattorizzi la matrice $Q=E^TE$. Nell'ipotesi che la coppia (A,B) sia controllabile e la coppia (A,E) osservabile, si verifica quanto segue:
  - Esiste una unica soluzione definita positiva P^* dell'ARE
  - Il sistema a ciclo chiuso

$$\dot{x} = \left(A - BK\right)x \qquad K = R^{-1}B^T P^*$$

è asintoticamente stabile.

- L'indice di costo in corrispondenza dell'ottimo assume il valore $x^T(0)P^*x(0)$.

- Dal punto di vista tecnico, l'ipotesi di controllabilità di *(A,B)* e osservabilità di *(A,E)* garantisce che la matrice Hamiltoniana *H* non abbia autovalori sull'asse immaginario.
- Tuttavia la ragionevolezza delle due ipotesi, senza bisogno di scendere nei dettagli della dimostrazione, si intuisce.
- Infatti l'ipotesi di controllabilità garantisce sul fatto che il controllore riesca a portare a zero tutte le dinamiche facendo sì che l'integrale converga ad un valore finito.

- L’ipotesi di osservabilità garantisce che tutte le eventuali dinamiche instabili siano presenti nell’indice di qualità e quindi vengano stabilizzate dal controllore.
- Se così non fosse potrebbero esistere dinamiche instabili non “visibili” nell’indice di qualità, che il controllore non sarebbe interessato a portare a zero.
- In questo caso l’integrale sarebbe ancora convergente, ma il sistema a ciclo chiuso non sarebbe asintoticamente stabile.

- Da questa discussione si comprende che, in realtà, la semplice stabilizzabilità di *(A,B)* e rivelabilità di *(A,E)* basterebbero a garantire da un lato la convergenza dell'indice di costo, dall'altro la asintotica stabilità del sistema a ciclo chiuso.
- Infatti è proprio così. Esiste una versione "più debole" del teorema ora enunciato che garantisce (quasi) gli stessi risultati sotto l'ipotesi di stabilizzabilità e rivelabilità.
- In questo caso però, è solo garantita la *semidefinita* positività della soluzione dell'ARE P^* .
- Per illustrare meglio questo punto si considerino i due esempi successivi.

- Esempio. Si consideri il problema di ottimizzazione

$$\min_{u[0,+\infty)} \int_0^{+\infty} u^2 dt$$

$$s.a$$

$$\dot{x} = x + u$$

Il sistema è controllabile, ed infatti la soluzione ottima esiste ed è pari a $u^{*}=0$. Tuttavia il sistema risultante a ciclo chiuso è instabile.

Questo è una conseguenza del fatto che il sistema *non* è rivelabile.

- Esempio. Si consideri

$$\min_{u[0,+\infty)} \int_0^{+\infty} u^2 dt$$

$$s.a$$

$$\dot{x} = -x + u$$

Il sistema è ancora controllabile, ed è anche rivelabile (ma non osservabile), dal momento che non ci sono dinamiche instabili.

La soluzione ottima è ancora $u^*=0$ e, come ci si aspettava, il sistema risultante a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

È interessante notare che $P^*=0$. Ciò è conseguenza del fatto che il sistema è rivelabile ma non osservabile.

- Ora si noti che, definita la matrice,

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ P^* & I \end{bmatrix}$$

si ha:

$$T^{-1}HT = \begin{bmatrix} A_C & * \\ 0 & -A_C^T \end{bmatrix}$$

$$A_C = A - BR^{-1}B^T P^*$$

da cui si deduce che gli autovalori stabili di H sono esattamente gli autovalori del sistema a ciclo chiuso quando si applica il controllo ottimo LQR su orizzonte infinito.

Selezione delle matrici di peso

- Un semplice modo per scegliere le matrici di peso è quello di fissare una struttura diagonale, e quindi prendere gli elementi sulla diagonale sufficientemente grandi se si vuol mantenere la corrispondente variabile a valori piccoli (e viceversa).
- È ovvio che in questo modo non si utilizzano tutte le potenzialità del metodo.
- D'altro canto poiché la traslazione di specifiche nel dominio del tempo e/o della frequenza in regole per la selezione delle matrici di peso non è immediata, una scelta non banale di tali matrici può solo essere dettata dall'esperienza del progettista.

- Si segnalano alcune tipologie di problemi che possono aiutare a capire meglio come la scelta delle matrici di peso possa influenzare la soluzione del problema LQR (lo studente è invitato a approfondire la soluzione di questi problemi).
- **Cheap control.** In questo particolare problema l'indice di costo è del tipo

$$\min_{u(t_0,T)} \int_{t_0}^{T} \left(x^T Q x + \rho u^T R u \right) dt + x^T(T) M x(T)$$

dove ρ è uno scalare positivo sufficientemente piccolo.

- Il termine “cheap” si riferisce al fatto che, evidentemente, il controllo costa poco e quindi il corrispondente peso può essere preso piccolo.
- In questo caso è molto interessante studiare cosa succede quando ρ tende a zero.
- **Controllo terminale.** In questo caso l’indice di costo è del tipo

$$\min_{u(t_0,T)} \int_{t_0}^{T} u^T Ru\, dt + x^T(T)\rho M x(T)$$

dove M è *definita* positiva e ρ è un numero positivo sufficientemente grande.

- In altri termini nel problema del controllo terminale l’accuratezza del controllo è penalizzata all’istante terminale.
- Lo stato terminale è forzato al limite ad essere lo stato zero (quando $\rho \rightarrow +\infty$).
- **Controllo LQR con grado di stabilità α.** In questo caso si struttura l’indice di qualità in modo da forzare gli autovalori del sistema a ciclo chiuso ad essere al’interno del semipiano $Re(s)<-\alpha$, con α positivo.
- Come si è detto in precedenza, questo assicura un tasso di convergenza minore di α alle dinamiche del sistema a ciclo chiuso.

- L’indice di qualità in questo caso viene scelto come segue:

$$\int_0^{+\infty} e^{2\alpha t}\left(x^T Q x + u^T R u\right)dt$$

Si comprende facilmente che l’integrale può convergere solo se lo stato del sistema converge a zero esponenzialmente più velocemente di $e^{-\alpha t}$.

In altri termini il controllo è costretto a forzare soluzioni convergenti “velocemente” a zero per far convergere ad un valore finito l’indice di qualità.