

Estensioni del Controllo Ottimo

Docente Prof. Francesco Amato



Il problema del tracking ottimo su orizzonte finito

- Il problema del tracking consiste nel minimizzare un indice di qualità del tipo

$$\min_{u_{(t,T]}} \int_t^T \left((\xi - \tilde{\xi})^T Q (\xi - \tilde{\xi}) + u^T R u \right) d\tau$$

s. a.

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu$$

Dove Q è semidefinita positiva ed R è definita positiva.

$\tilde{\xi}$ rappresenta la traiettoria da inseguire nello spazio di stato



- Effettuando il cambio di variabile di stato

$$x = \xi - \tilde{\xi}$$

si arriva a definire un problema LQ equivalente nella forma

$$\min_{u_{(t,T]}} \int_t^T (x^T Q x + u^T R u) d\tau$$

s. a.

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$w(t) := A\tilde{\xi}(t) - \dot{\tilde{\xi}}(t)$$

Che è equivalente ad un problema di controllo ottimo LQ in presenza di disturbi deterministici.



- Questo problema di carattere più generale sarà discusso a breve.
- Prima si noti che se la traiettoria viene generata da un sistema in evoluzione libera avente A come matrice dinamica

$$\dot{\tilde{\xi}} = A\tilde{\xi} \quad \xi(0) = \xi_0$$

allora nella formulazione precedente risulta $w(t)=0$, e il problema del tracking ottimo si riduce ad un problema LQR standard.

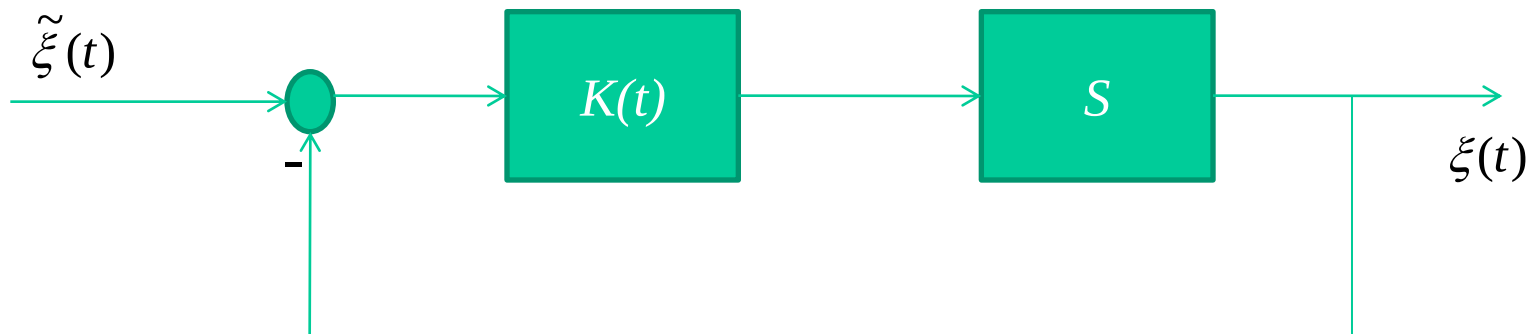


- In questo caso si ha

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^T P^*(t)x(t) \\ &= -R^{-1}B^T P^*(t)(\xi(t) - \tilde{\xi}(t)) \\ &= -K(t)\xi(t) + K(t)\tilde{\xi}(t) \end{aligned}$$

$$K(t) = R^{-1}B^T P^*(t) \quad \dot{P}^* + A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Si perviene in questo modo allo schema di controllo classico



- Se ξ è un segnale polinomiale, la considerazione precedente non è altro che una riformulazione del Principio del Modello Interno.
- Infatti, nell'ipotesi di far tendere T all'infinito, la condizione precedente afferma che, sotto le solite ipotesi, si riesce a inseguire la traiettoria desiderata solo nel caso in cui il sistema possiede le eventuali dinamiche instabili della traiettoria desiderata.
- Ad esempio se la traiettoria desiderata contiene dei riferimenti a gradino la matrice A deve possedere un polo nell'origine.



- Ad esempio si consideri

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{+\infty} \left((\xi - \tilde{\xi})^2 + \rho u^2 \right) d\tau$$

s. a.

$$\dot{\xi} = u$$

dove

$$\tilde{\xi}(t) = 1(t)$$

Il problema si riconduce ad un problema di controllo ottimo standard, in quanto il sistema da controllare contiene un polo nell'origine.



- Infatti, ponendo

$$x(t) = \xi(t) - \tilde{\xi}(t) = \xi(t) - 1(t)$$

il problema si riconduce a

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^{+\infty} (x^2 + \rho u^2) d\tau$$

s. a.

$$\dot{x} = u$$



- Il problema ammette soluzione e si ha

$$p^* = \rho^{1/2}$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{\rho} p^* x(t) = -\frac{1}{\rho^{1/2}} x(t)$$

In definitiva la legge di controllo ottimo è

$$u^*(t) = -\frac{1}{\rho^{1/2}} (\xi(t) - \tilde{\xi}(t)) = -\frac{1}{\rho^{1/2}} \xi(t) + \frac{1}{\rho^{1/2}} \tilde{\xi}(t)$$



Controllo ottimo LQ in presenza di disturbi deterministici

- Il problema del controllo ottimo in presenza di disturbi deterministici, si presenta nella forma

$$\min_{u_{(t,T]}} \int_t^T (x^T Q x + u^T R u) d\tau$$

s. a.

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

dove w è un segnale noto nell'intervallo temporale di interesse.



- La soluzione di questo tipo di problema, si ottiene in maniera analoga al caso del problema LQR classico.
- Tuttavia, a causa della presenza del disturbo nell'equazione del sistema, il funzionale ottimo non è più di tipo quadratico puro:

$$V^*(x, t) = x^T P(t)x + 2b^T(t)x + c(t)$$

In questo caso l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$-x^T \dot{P}(t)x - 2\dot{b}(t)^T x - \dot{c}(t) = \min_u \left[x^T Qx + u^T Ru + \left(\text{grad}_x V^*(x, t) \right)^T (Ax + Bu + w) \right]$$

dove $\text{grad}_x V^*(x, t) = 2(Px + b)$



- Imponendo la condizione necessaria di minimo si ottiene

$$u^* = -R^{-1}B^T(P(t)x + b(t))$$

Dopodiché, sostituendo u^* nell'equazione di Hamilton-Jacobi ed uguagliando i termini con le stesse potenze della x , si ottiene

$$-\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \quad \text{termini quadratici in } x$$

$$\dot{b} = -\left(A - BR^{-1}B^T P\right)^T b - Pw \quad \text{termini lineari in } x$$

$$\dot{c} = b^T BR^{-1}B^T b - 2b^T w \quad \text{termini indipendenti da } x$$



- Per quanto riguarda la condizione terminale si ha $V^*(x,T)=0$, da cui

$$P(T) = 0 \quad b(T) = 0 \quad c(T) = 0$$

Le equazioni differenziali per $P(t)$, $b(t)$ e $c(t)$ possono essere risolte sequenzialmente:

- prima si risolve l'equazione relativa a $P(t)$
- quindi si usa la soluzione per risolvere l'equazione in $b(t)$
- infine si risolve l'equazione in $c(t)$, noti che siano P e b

A questo proposito si noti che, a differenza di $P(t)$, l'equazione per $b(t)$ non può essere risolta analiticamente, a causa della tempo-varianza dei coefficienti, dovuta alla presenza di $P(t)$ nell'equazione.



- La legge di controllo ottimo contiene un termine in feedback e uno in feedforward.
- Infatti

$$u^*(t) = -K(t)x(t) + u_{ff}(t)$$

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t)$$

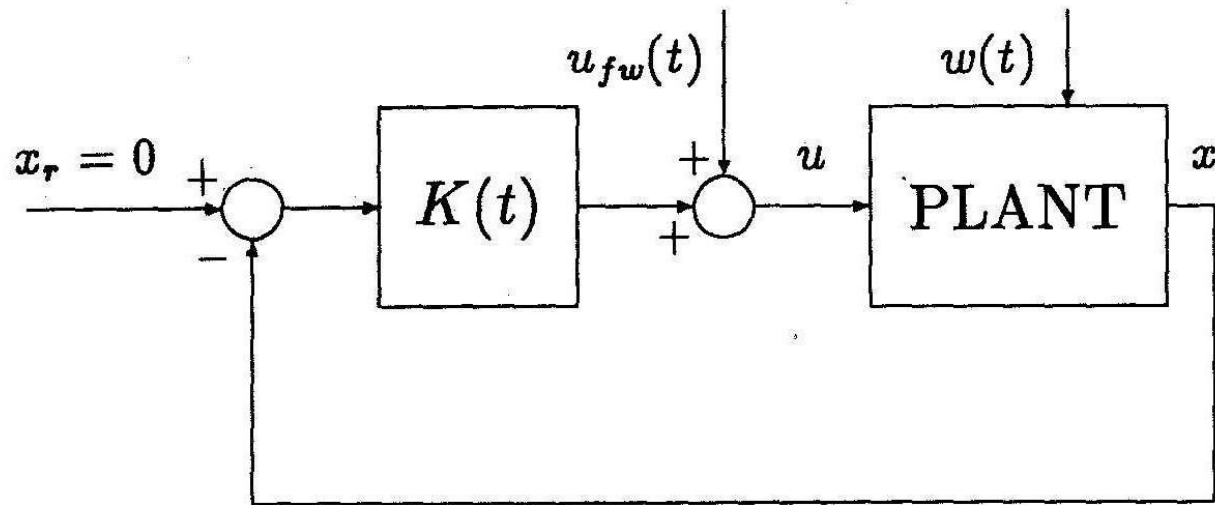
$$u_{ff}(t) = -R^{-1}B^T b(t)$$

Si noti che $c(t)$ non gioca nessun ruolo nella legge di controllo, ma concorre solo alla valutazione ottima dell'indice.

In particolare, quando si parte da una condizione iniziale nulla, risulta

$$V^*(0, t) = c(t)$$





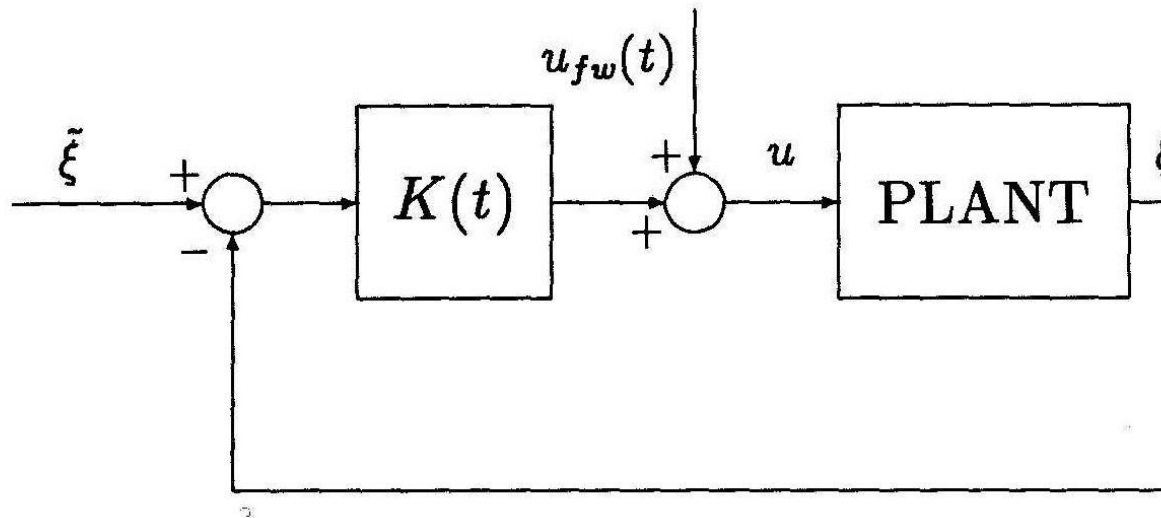
Schema di controllo con reiezione di disturbi deterministici



Nel caso dell'inseguimento di traiettoria, ovviamente si ha

$$x = \xi - \tilde{\xi}$$

E quindi si perviene allo schema in figura.



Schema di controllo per l'inseguimento di traiettoria



- Ritornando al problema della reiezione di disturbi deterministici, si noti che il calcolo di $b(\cdot)$ richiede la conoscenza di $w(\cdot)$ su tutto l'intervallo di integrazione.
- In altri termini u_{ff} risulta essere una funzione anti-causale di $w(\cdot)$.
- Questo, unitamente al fatto che $b(\cdot)$ non è calcolabile analiticamente, escluderebbe la possibilità di implementare on-line la legge di controllo in feed forward.



- Tuttavia se il disturbo è generato da una equazione differenziale del tipo

$$\dot{w} = A_w w$$

dette Φ_b e Φ_w le matrici di transizione associate all'equazione differenziale di b e w rispettivamente, si ha

$$b(t) = \left[\int_t^T \Phi_b(t, \tau) P(\tau) \Phi_w(\tau, t) d\tau \right] w(t)$$

che permette una implementazione on-line della legge in feed forward per la reiezione del disturbo.



- Esempio.

$$\min_u \int_0^T (x^2 + u^2) dt$$

s.a.

$$\dot{x} = u + w$$

dove il disturbo w è generato dall'equazione differenziale

$$\dot{w} = w$$



Controllo ottimo LQ in presenza di disturbi deterministici su orizzonte infinito

- Sotto le stesse ipotesi del controllo ottimo LQR, si ottiene che la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati tende, su orizzonte infinito, alla soluzione P^* dell'ARE.
- Per quanto riguarda l'azione in feed forward (nell'ipotesi che il disturbo sia generato da un sistema lineare), formalmente si ottiene

$$u_{ff}(t) = R^{-1} B^T b(t)$$

$$b(t) = K_{ff} w(t)$$

$$k_{ff} = \int_0^{\infty} e^{A_C^T \tau} P^* e^{A_w \tau} d\tau$$

$$A_C = A - BR^{-1}B^T P^*$$



- Si noti che K_{ff} è ben definito se la matrice a ciclo chiuso A_C possiede autovalori la cui parte reale è sufficientemente negativa da dominare gli eventuali autovalori a parte reale positiva di A_w .
- Si può dimostrare che la matrice K_{ff} , se esiste, può essere calcolata risolvendo una equazione (generalizzata) di Lyapunov

$$A_C^T K_{ff} + K_{ff} A_w = -P^*$$



- In ogni caso, è importante osservare che se il disturbo $w(.)$ non è limitato, allora a sua volta $b(.)$ non è limitato.
- Inoltre anche $c(.)$ può risultare non limitato (anche se $w(.)$ lo è).
- In questi casi l'indice di qualità perde significato.
- Per questo motivo per molti problemi di controllo ottimo con reiezione di disturbi, tipicamente l'indice di qualità viene diviso per T , in modo da mantenerlo finito per $T \rightarrow \infty$.



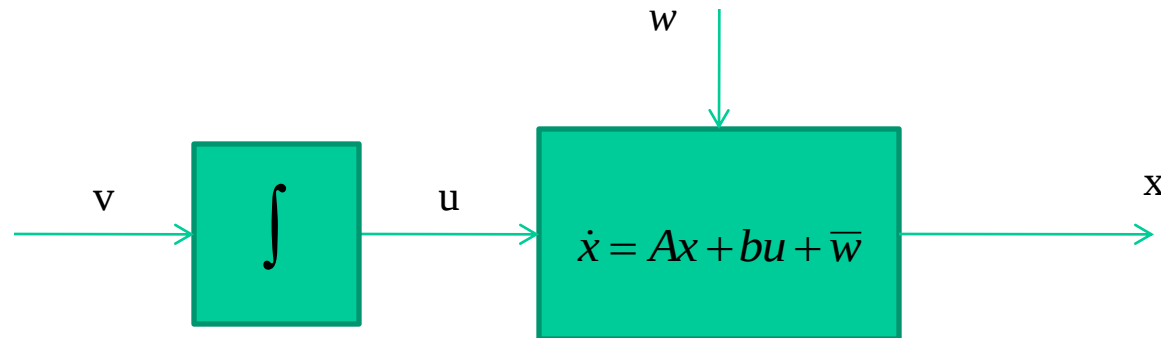
Disturbi non deterministici: Controllo PI

- In alcuni casi si assume che il disturbo agente sul sistema da controllare abbia una espressione determinata, anche se è ignota l'ampiezza.
- Un caso tipico è quello in cui il disturbo è costante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \bar{w}$$
$$\bar{w} \in R$$



- Dalla teoria classica del controllo, sappiamo che in questo caso l'inserzione di una azione integrale nel ciclo ha la capacità di reiettare asintoticamente l'effetto del disturbo.
- Allora l'idea è quella di “aumentare” l'impianto con un integratore.



e risolvere il problema di controllo ottimo per il sistema aumentato con indice di qualità

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^{\infty} (x^T Q x + v^T R v) dt = \min_{v(\cdot)} \int_0^{\infty} ((Ex)^T (Ex) + v^T R v) dt$$



- Derivando l'equazione di stato si ottiene

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + B\dot{u}(t) = A\dot{x}(t) + Bv$$

Allora, definito un sistema fittizio avente come vettore di stato

$$z(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ Ex(t) \end{bmatrix}$$

si ha che il problema di controllo ottimo si può riscrivere

$$\min_{v(\cdot)} \int_0^{\infty} (z^T \tilde{Q} z + v^T R v) dt \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ E & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v$$



- Se questo problema ammette soluzione, a regime si avrà che lo stato aumentato z tende a zero, e quindi

$$\dot{x} \rightarrow 0$$

$$Ex \rightarrow 0$$

$$v = \dot{u} \rightarrow 0$$

E quindi x e u tenderanno ad assumere valori costanti (non nulli) compatibilmente con la tipologia del problema.



- La legge di controllo ottimo è del tipo (si suppone di aver posto a zero la condizione iniziale sull'integratore)

$$v^* = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ Ex \end{bmatrix} = -K_1 \dot{x} - K_2 Ex$$

e quindi

$$u^*(t) = -K_1 x(t) - K_2 \int_0^t Ex(\tau) d\tau$$

Sotto quali ipotesi la legge di controllo ottimo esiste? Come si è visto esiste solo se

$$x(t) \rightarrow \bar{x}$$

$$Ex(t) \rightarrow 0$$

$$u(t) \rightarrow \bar{u}$$



- In questo caso l'equazione del sistema a regime risulta essere

$$A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{w} = 0$$

Premoltiplicando per EA^{-1} si ha

$$EA^{-1}A\bar{x} + EA^{-1}B\bar{u} + EA^{-1}\bar{w} = EA^{-1}B\bar{u} + EA^{-1}\bar{w} = 0$$

Quindi esiste una condizione di regime per u se $EA^{-1}B$ è invertibile.

Questa è esattamente la condizione affinché la MdT $E(sI-A)^{-1}B$ non ha zeri nell'origine, che è una condizione necessaria affinché l'azione integrale non venga cancellata.



Controllo ottimo stocastico

Consideriamo un sistema lineare soggetto a rumore del tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + p(t) \quad t \in [0, T]$$

dove $p(t)$, detto *rumore di processo*, è un segnale stocastico.

Ora faremo delle ipotesi sulle caratteristiche statistiche del rumore $p(t)$.



- Assumeremo che il rumore $p(t)$ sia un segnale stocastico gaussiano bianco e a media nulla.
- Il fatto che il rumore sia *bianco* implica che esso sia incorrelato da istante a istante, quindi:

$$E[p(t)p^T(\tau)] = \Pi(t)\delta(t-\tau) \quad \Pi(t) \geq 0 \quad \forall t, \tau$$

Se il segnale è anche *stazionario*, allora $\Pi(t)$ è indipendente dal tempo. Nel seguito faremo questa ipotesi; dunque $\Pi(t) = \Pi \geq 0$.



- Il fatto che il rumore sia *gaussiano* implica che tutte le informazioni statistiche su $p(t)$ sono contenute nella covarianza del rumore
- Questa assunzione ha basi fisiche, poiché in molte situazioni pratiche il rumore è effettivamente di tipo gaussiano.
- Inoltre molto spesso, e questo ci porta alla terza ipotesi, il rumore è a *media nulla*, cioè

$$E(p(t)) = 0 \quad t \in [0, T]$$



Il problema del controllo ottimo stocastico è quello di trovare una legge di controllo con retroazione di stato $u=K(t)x$ tale da minimizzare l'indice di costo

$$V = E \left[\int_t^T (x^T Q x + u^T R u) d\tau + x^T(T) M x(T) \mid x(t) = x \right]$$

Si ricordi che, a causa della presenza di $p(t)$, il vettore di stato $x(t)$ è una variabile aleatoria; per questo motivo l'indice di costo va definito con l'operatore di media statistica condizionato al valore iniziale.



- Per la risoluzione del problema del controllo ottimo stocastico si fanno una serie di passaggi analoghi al caso in cui sono presenti disturbi deterministici.
- Tuttavia alcuni passaggi (formalmente simili al caso deterministico) per essere validati richiedono conoscenze avanzate del calcolo delle probabilità che qui non è il caso di trattare.



- **Teorema [Controllo ottimo LQR stocastico su orizzonte finito].** Dato il problema di ottimizzazione

$$\min_{u_{[t_0, T)}} E \left[\int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) M x(T) \mid x(t_0) \right]$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + p$$

dove p è rumore gaussiano bianco a media nulla con matrice di covarianza pari a Π , la soluzione ottima è data dalla retroazione lineare dello stato:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P^*(t) x$$

Il valore ottimo dell'indice di costo è $V^* = x^T(t_0) P^*(t_0) x(t_0) + c(t_0)$

dove $P^*(.)$ e $c(.)$ sono soluzioni di

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= A^T P(t) + P(t) A + Q - P(t) B R^{-1} B^T P(t) \quad t \in [t_0, T] \quad P(T) = M \\ -\dot{c}(t) &= \text{Tr}(P(t) \Pi) \quad t \in [t_0, T] \quad c(T) = 0 \end{aligned}$$



- Si noti che deve essere prima risolta l'equazione differenziale di Riccati, ottenendo in questo modo la funzione matriciale $P(t)$ per t nell'intervallo $[t_0, T]$.
- Successivamente, nota $P(\cdot)$, si calcola la funzione scalare $c(\cdot)$.
- Si noti anche che, nel caso stocastico, la legge di controllo ottimo è analoga al caso deterministico, quello che cambia è il valore ottimo dell'indice di qualità, che ovviamente peggiora.



- Infatti $c(t)$ è una funzione positiva ad ogni istante t . Questo si vede facilmente integrando l'equazione differenziale nell'incognita $c(t)$; si ha

$$-\int_t^T \dot{c}(\tau) d\tau = -[c(\tau)]_t^T = c(t) = \int_t^T \text{Tr}(P(\tau)\Pi) d\tau$$

e l'ultimo integrale è sempre nonnegativo essendo sia $P(\cdot)$ che Π semidefinite positive.



- Quando un problema stocastico può essere risolto come un problema deterministico con le variabili stocastiche rimpiazzate dai valori medi, si dice che vale il *Principio della Certezza Equivalente*.
- Tale principio viene comunemente utilizzato nelle applicazioni ingegneristiche anche quando la sua validità non è stata dimostrata rigorosamente.



Controllo ottimo stocastico su orizzonte infinito

- Considereremo ora il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_{u(\cdot)} E \left[\int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \mid x(0) \right]$$

s.a

$$\dot{x} = Ax + Bu + p$$

con Q semidefinita positiva, R definita positiva e p rumore bianco gaussiano a media nulla.



- Fattorizzando $Q=E^TE$ e procedendo come nel caso deterministico, si dimostra che se la coppia (A,B) è stabilizzabile e la coppia (A,E) è rivelabile
 - L'equazione di Riccati $A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0$ ammette un'unica soluzione P^* semidefinita positiva
 - La legge di controllo $u^*=-R^{-1}B^TP^*x$ stabilizza il sistema a ciclo chiuso.
- Si noti tuttavia che il problema di controllo ottimo definito in questo modo è mal posto, nel senso che il valore ottimo dell'indice di costo non esiste.



- Infatti

$$V^*(x, t) = x^T P^*(t)x + \int_t^T \text{tr}(P^*(\tau)\Pi) d\tau$$

Quando $T \rightarrow \infty$ si ha che $P^*(.) \rightarrow P^*$ mentre

$$\int_t^T \text{Tr}(P^*(\tau)\Pi) d\tau \rightarrow +\infty$$

e dunque il valore ottimo dell'indice diverge.



- Allora su orizzonte infinito ha senso definire l'indice di costo in questo modo:

$$V_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \mid x(0) \right]$$

E quindi

$$V_{\infty}^* = \text{Tr}(P^* \Pi)$$



- Esempio. Si consideri

$$\min_{u[0,+\infty)} \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T (x^2 + u^2) dt \right]$$

s.a

$$\dot{x} = x + u + p$$

$$E[p(t)p^T(\tau)] = 10\delta(t - \tau)$$

Il sistema è controllabile e osservabile. Quindi la soluzione esiste. La soluzione ottima è

$$P^* = (1 + \sqrt{2})$$

$$u^* = -(1 + \sqrt{2})x$$

$$V_{\infty}^* = \text{Tr}(P^* \Pi) = (1 + \sqrt{2})10$$

