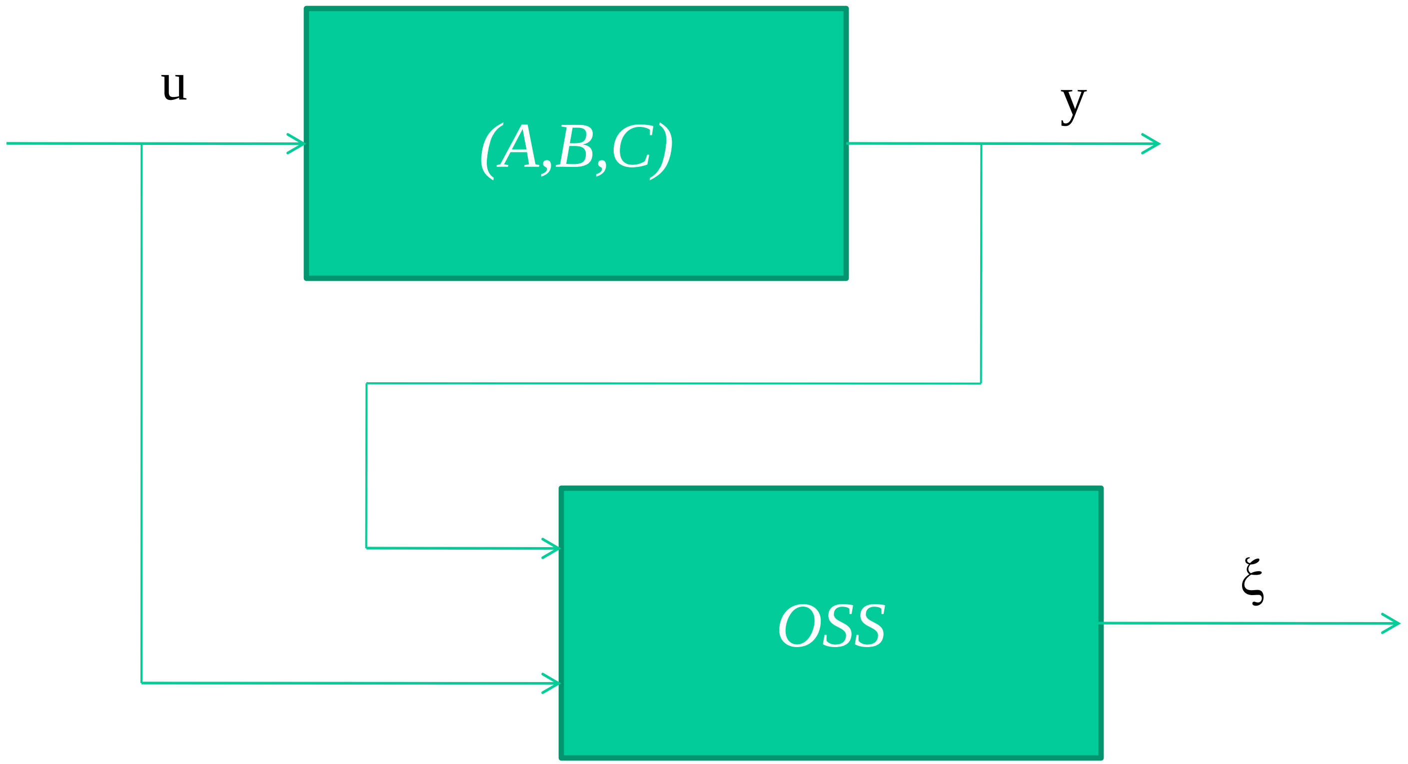
Teoria degli Osservatori e Stabilizzazione con Retroazione di Uscita

Docente Prof. Francesco Amato

- Un osservatore è un sistema dinamico che, ricevendo in input i segnali di ingresso ed uscita di un dato sistema, deve fornire una stima dello stato del sistema stesso.
- In particolare concentreremo la nostra attenzione sugli osservatori per sistemi LTI.
- È ovvio che, non essendo noto lo stato iniziale del sistema, bisognerà accettare un errore di stima diverso da zero.
- Tuttavia vedremo che, sotto opportune ipotesi, è possibile garantire che la stima tenda asintoticamente a zero.


u
(A,B,C)
y
OSS
ξ

- Consideriamo un sistema LTI nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad x(0) = x_0$$
$$y = Cx$$

Come osservatore consideriamo il sistema (osservatore di Luenberger)

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + L(y - C\xi) \qquad \xi(0) = \xi_0$$

Si noti che l'osservatore proposto è una replica del sistema con in aggiunta un termine che pesa l'errore di stima (nell'uscita) secondo una matrice *L*.

- Definendo l’errore di stima dello stato come $e=x-\xi$ si ha

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Dunque se si sceglie L in modo tale che la matrice A-LC sia asintoticamente stabile, ne deriva che l’errore di stima tende asintoticamente a zero.

Ovviamente se, come spesso accade, il sistema è già di per sé asintoticamente stabile si potrebbe scegliere in linea di principio $L=0$.

Tuttavia in questo caso l’errore tenderebbe a zero con le dinamiche del sistema osservato, mentre in genere siamo interessati a garantire una convergenza più rapida.

- Infatti tipicamente lo stato viene stimato ai fini di generare l’azione di controllo; allora, dal punto di vista del sistema, la stima deve avvenire in tempo rapido.
- Ciò significa che spesso siamo interessati a garantire che le costanti di tempo della stima dell’errore siano di un ordine di grandezza inferiore a quelle dell’impianto.
- In altri termini il sistema dinamico “errore di stima” deve essere asintoticamente stabile, con autovalori sufficientemente più lontani dall’origine del piano complesso rispetto ai poli del sistema.
- Tuttavia, un osservatore troppo veloce è più vulnerabile in presenza di rumore di misura.
- In definitiva, il problema è riconducibile a quello di determinare una matrice L tale che la matrice A-LC abbia i propri autovalori in una desiderata regione del piano complesso.

- In virtù di un teorema di stabilità precedentemente enunciato, per un dato L, il sistema errore di stima risulta essere asintoticamente stabile se e solo se esiste una matrice $Q>0$ tale che

$$(A-LC)^T Q + Q(A-LC) < 0$$

Si effettui il cambio di variabile $QL=V$. La condizione precedente si può riscrivere

$$A^T Q + QA - VC - C^T V^T < 0$$

Se il problema ammette una soluzione ammissibile, allora $L=Q^{-1}V$.

- Si comprende facilmente che il problema della stabilizzazione dell’errore di stima dell’osservatore è il duale del problema della stabilizzazione dell’impianto.
- Se si vuole dare una specifica sul tasso di convergenza a zero dell’errore di stima, si può richiedere che gli autovalori della matrice A-LC siano contenuti nel semipiano $Re(z)<-\alpha$, con α scelto in maniera tale da essere molto più lontano dall’origine rispetto ai poli del sistema.

- Dalla teoria sviluppata precedentemente questo equivale a trovare una matrice definita positiva *Q* e una matrice *L* tali da soddisfare la LMI:

$$A^T Q + QA - VC - C^T V^T + 2\alpha Q < 0$$

Ricordiamo che, con opportune LMI, è possibile imporre vincoli sull'appartenenza dei poli ad assegnate regioni del piano complesso (ad es. coni centrati nell'origine).

Infine nel caso in cui il sistema possieda una sola uscita e sia osservabile, è possibile assegnare tutti gli autovalori della matrice A-lc^T utilizzando l'algoritmo fornito a suo tempo per il problema dell'assegnamento dei poli.

- Infatti gli autovalori di A-lc^T coincidono con quelli di A^T-cl^T.
- Dunque è possibile applicare l'algoritmo fornito per la stabilizzazione ponendo $A=A^T$ e $b=c$.

- Ora è opportuno chiedersi cosa succede quando si riuniscono le teorie della stabilizzazione e dell'osservazione.
- In altri termini è importante studiare cosa succede quando si effettua una retroazione dello stato stimato mediante un osservatore.

Principio di Separazione

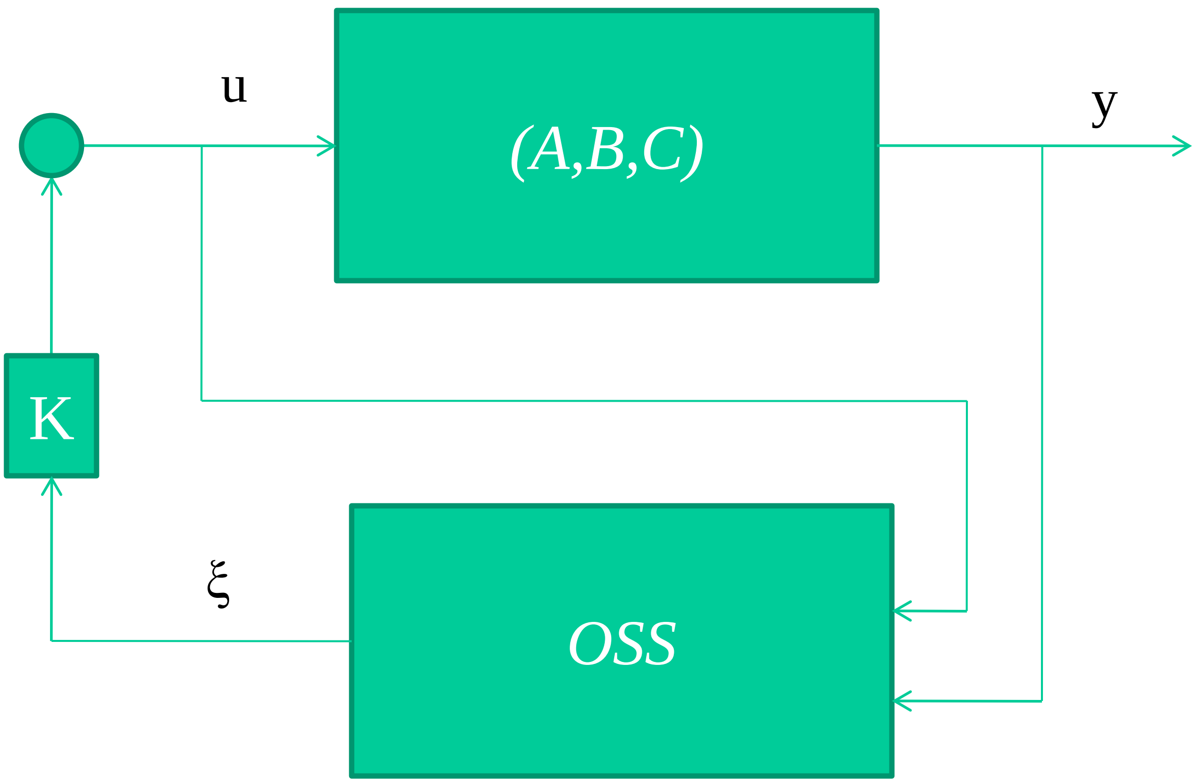
- Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

e il corrispondente osservatore

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + L\left(y - C\xi\right)$$

Vogliamo studiare cosa succede quando si effettua una retroazione dello stato stimato $u=K\xi$.



u
(A,B,C)
y
K
ξ
OSS

- Il sistema “stato-stato stimato” può mettersi nella forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ LC & A+BK-LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

Effettuiamo ora un cambio di variabile:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ x-\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} =: T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

che permette di riscrivere il modello nella forma stato-errore di stima.

- Nella nuova base la matrice dinamica a ciclo chiuso risulta pari a

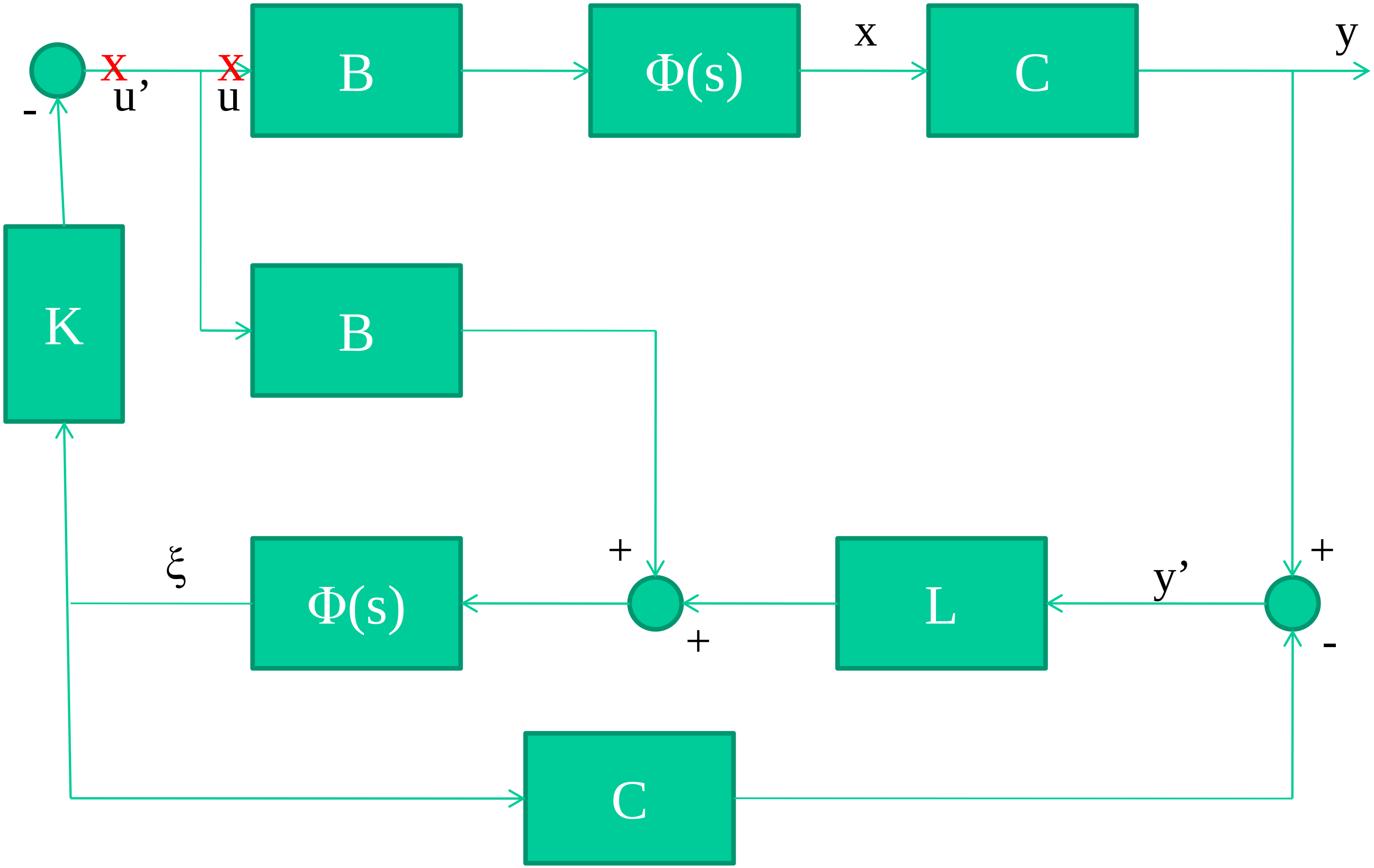
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BK \\ LC & A+BK-LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{pmatrix}$$

Dunque i poli a ciclo chiuso coincidono con quelli dell’osservatore e quelli che si avrebbero supponendo lo stato completamente disponibile e realizzando la legge di controllo $u=Kx$.

- In definitiva il progetto di un controllore con retroazione di uscita può essere effettuato in due fasi.
- Prima si progetta un controllore con retroazione di stato risolvendo ad esempio una LMI con vincolo di appartenenza degli autovalori a una desiderata regione del piano complesso (sulla base di eventuali specifiche).
- Poi si progetta un osservatore di Luenberger ponendo i poli dello stesso in una regione sufficientemente lontana dall'origine rispetto ai poli del sistema da controllare.

Robustezza LQ con retroazione dello stato stimato

- Ora ci poniamo il seguente quesito: se il guadagno K nello schema controllore-osservatore è progettato con tecnica LQ, i risultati trovati precedentemente sulla robustezza valgono ancora?
- Purtroppo la risposta è negativa.
- Facciamo riferimento allo schema nella figura seguente.



x
u'
x
u
-
B
Φ(s)
x
C
y
K
B
ξ
Φ(s)
+
+
L
y'
+
-
C

- È importante notare che i punti indicati con *u* e *u’* hanno un diverso significato dal punto di vista topologico.
- Infatti il punto che corrisponde a *u’* è *interno* al controllore, mentre il punto corrispondente a *u* è situato all’ingresso *fisico* dell’impianto.
- Ora calcoliamo le MdT che si ottengono aprendo il ciclo in corrispondenza del punto *u’* e in corrispondenza del punto *u*, per fare poi delle considerazioni sulla robustezza.

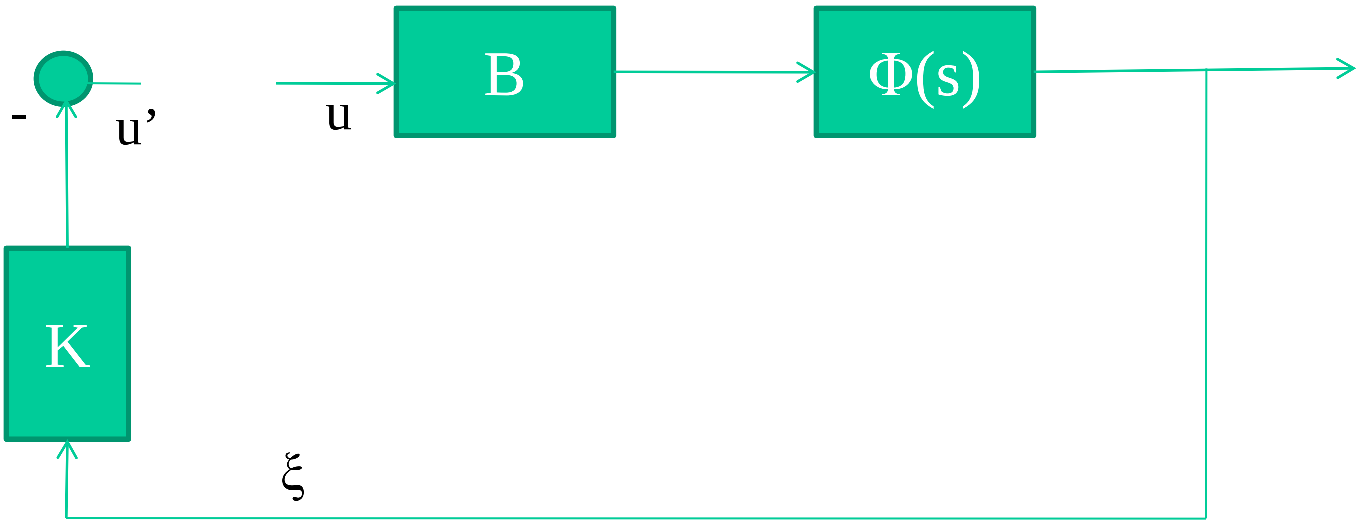
- Per quanto riguarda la MdT che si ottiene aprendo il ciclo in corrispondenza di *u'* si ha:

$$\Phi^{-1}\xi = Bu + LC\Phi Bu - LC\xi$$

Da cui

$$\begin{aligned}\xi &= \left(\Phi^{-1} + LC\right)^{-1}\left(B + LC\Phi B\right)u \\ &= \left(\left(I + LC\Phi\right)\Phi^{-1}\right)^{-1}\left(I + LC\Phi\right)Bu \\ &= \Phi Bu\end{aligned}$$

- Dunque, come si evince dalla figura, la MdT di anello quando si apre il ciclo in corrispondenza del punto *u'*, è pari a *KΦB*.



Per questo motivo la robustezza del regolatore LQ è *conservata* in corrispondenza di *u'*.

Questo ha tuttavia poca rilevanza perché *u'* è fisicamente interno al controllore.

- Calcoliamo ora la MdT che si ottiene aprendo il ciclo in corrispondenza di *u;* si ha

$$\Phi^{-1}\xi = Bu' + LC\Phi Bu - LC\xi$$

Da cui:

$$\xi = \left(\Phi^{-1} + LC\right)^{-1}\left(Bu' + LC\Phi Bu\right)$$

In questo caso non si riesce a pervenire ad una espressione utile per la MdT. Quindi il risultato sui margini di robustezza garantiti in questo caso non si può applicare.

In effetti esistono esempi in letteratura in cui viene mostrato come questi margini possano diventare arbitrariamente piccoli.