Cenni sul filtro di Kalman e il Recupero di Robustezza con la Tecnica LQG/LTR

Docente Prof. Francesco Amato

Filtro di Kalman

- Consideriamo un sistema LTI soggetto a rumore stocastico

$$\dot{x} = Ax + Bu + p$$

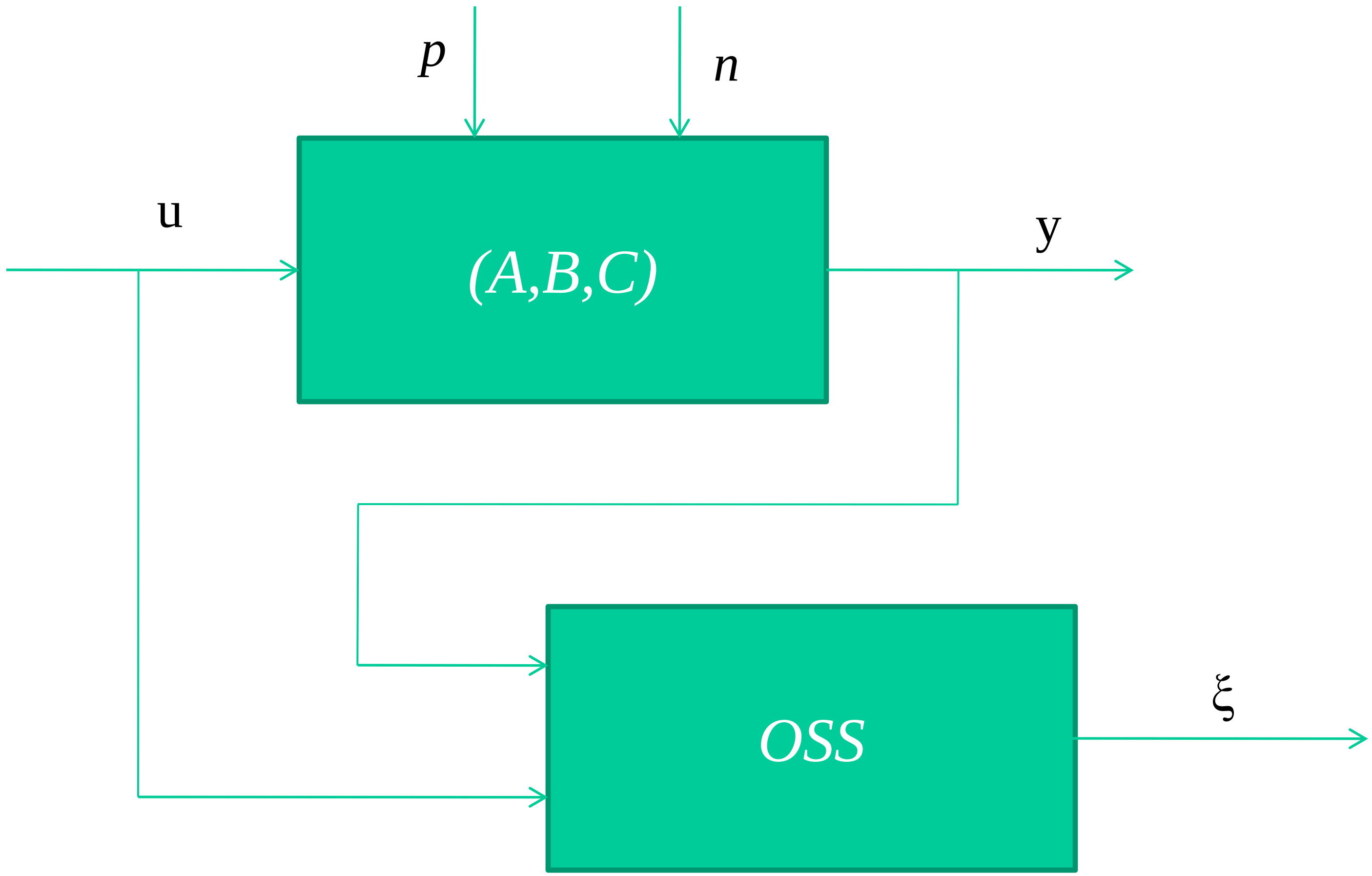
$$y = Cx + n$$

p, n incorrelati, gaussiani, bianchi a media nulla

$$E\left[p(t)p^T(\tau)\right] = \Pi\delta(t-\tau) \quad \Pi = G^T G \geq 0$$

$$E\left[n(t)n^T(\tau)\right] = N\delta(t-\tau) \quad N > 0$$

Consideriamo poi un osservatore dello stato del sistema come in figura.


p
n
u
(A,B,C)
y
OSS
ξ

Il filtro di Kalman è un particolare osservatore descritto dalle equazioni

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + K_f\left(y - C\xi\right)$$

in cui la matrice dei guadagni K_f è scelta con l'obiettivo di minimizzare l'indice di qualità

$$V_f := \lim_{t\to\infty} E\left[e^T(t)cc^T e(t)\right]$$

dove $e:=x-\xi$, rappresenta al solito l'errore di stima e c è un vettore assegnato.

Il prossimo teorema si può dimostrare utilizzando la dualità tra il problema LQ stocastico e il filtraggio ottimo in presenza di rumore.

- **Teorema [Filtro di Kalman].** Dato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + p$$

$$y = Cx + n$$

p, n incorrelati, gaussiani, bianchi a media nulla

$$E\left[p(t)p^T(\tau)\right] = \Pi\delta(t-\tau) \quad \Pi = G^T G \geq 0$$

$$E\left[n(t)n^T(\tau)\right] = N\delta(t-\tau) \quad N > 0$$

e un osservatore nella forma

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + K_f\left(y - C\xi\right)$$

- Se la coppia (A^T,C^T) è stabilizzabile e la coppia (A^T,G^T) è rivelabile, o ciò che è lo stesso la coppia (A,G) è stabilizzabile e la coppia (A,C) è rivelabile, si ha che:
  - L'equazione di Riccati $AS+SA^T+\Pi-SC^TN^{-1}CS=0$ ammette una unica soluzione S^* semidefinita positiva
  - L'osservatore con guadagno $K_f=S^*C^TN^{-1}$ (filtro di Kalman) è asintoticamente stabile
  - Detto $e=x-\xi$ l'errore di stima, viene minimizzato l'indice

$$V_f := \lim_{t\to\infty} E\left[e^T(t)cc^Te(t)\right]$$

il cui valore ottimo è

$$V_f^* = Tr(S^*cc^T)$$

- Si noti che il regolatore ottimo LQ effettua un compromesso tra la velocità con cui lo stato tende a zero e l’ampiezza dei segnali di controllo.
- In maniera duale, il filtro di Kalman effettua un compromesso tra la velocità di ricostruzione dello stato e la depurazione delle uscite dal rumore di misura.

- **Esempio.** Consideriamo il problema di trovare uno stimatore ottimo dello stato per il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + p$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + n$$

$$E\left[p(t)\,p^T(\tau)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \qquad N = \upsilon^2 \delta(t-\tau)$$

Si ha

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\upsilon^{3/2} & \upsilon \\ \upsilon & \sqrt{2}\upsilon^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$K_f = SC^T N^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\upsilon^{-1/2} \\ \upsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

- L’equazione del filtro di Kalman è (*B=0*)

$$\dot{\xi} = \left(A - K_f C\right)\xi + K_f y$$

La FdT tra y e ζ_2 (la variabile di stato stimata) è

$$\frac{s}{\upsilon s^2 + \sqrt{2\upsilon}\, s + 1}$$

Quando υ tende a zero il filtro tende a diventare un derivatore. Questo è un esempio di “cheap estimation”, il duale del cheap control.

Controllo ottimo LQG

- Il controllo ottimo LQG (Linear Quadratic Gaussian) può essere definito come segue. Dato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + p$$

$$y = Cx + n$$

p, n incorrelati, gaussiani, bianchi a media nulla

$$E\left[p(t)p^T(\tau)\right] = \Pi\delta(t-\tau) \qquad \Pi = G^T G \geq 0$$

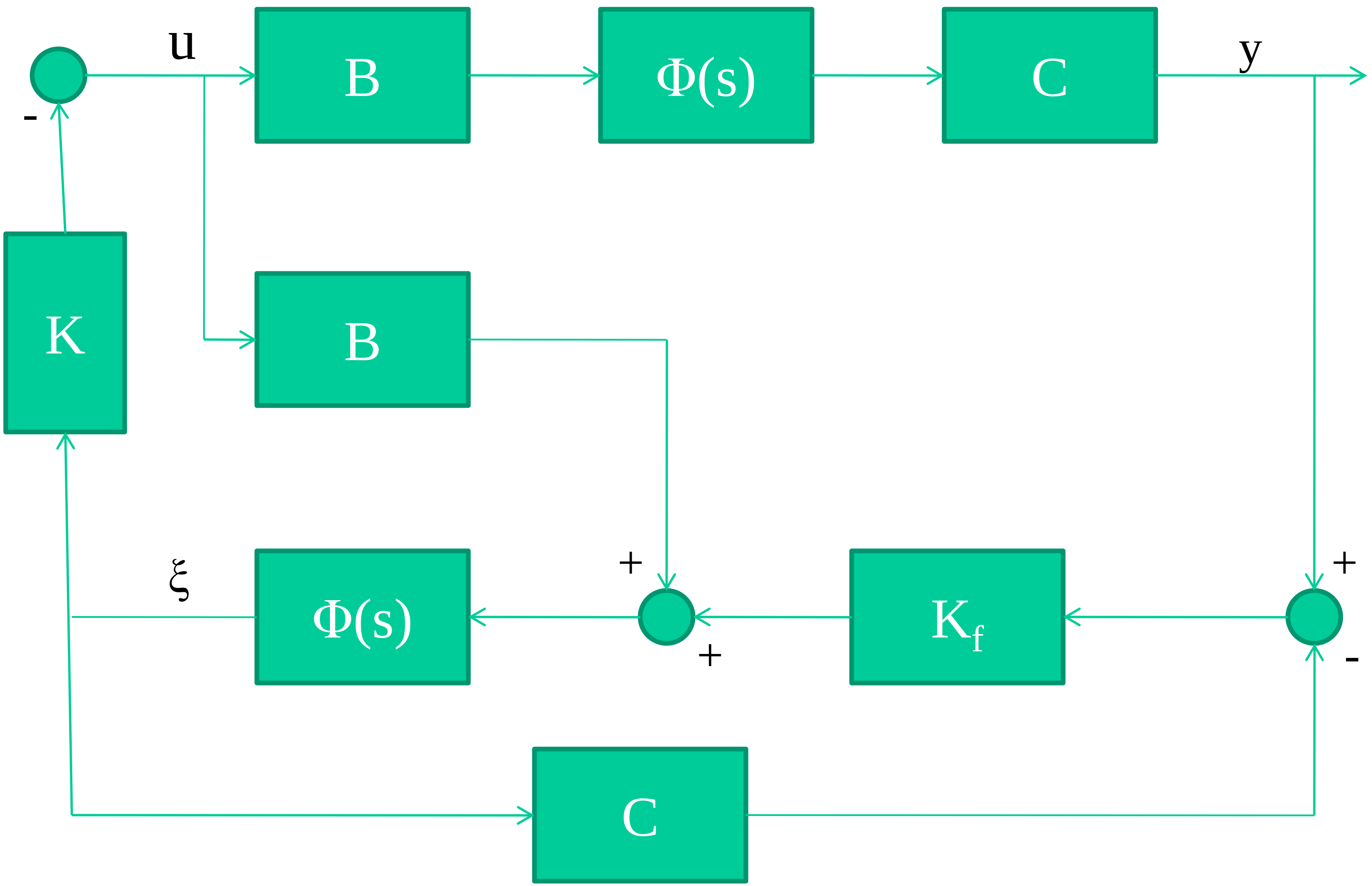
$$E\left[n(t)n^T(\tau)\right] = N\delta(t-\tau) \qquad N > 0$$

trovare un controllore dinamico con retroazione di uscita che minimizza l'indice di qualità

$$\lim_{t\to\infty} E\left[x^T Q x + u^T R u\right]$$

- **Teorema di Separazione.**
  - La legge di controllo ottimo che minimizza l'indice di qualità è data da $u=-K\xi$ dove K è la legge di controllo ottimo LQ e ξ è lo stato stimato da un filtro di Kalman ottimo. Quindi $K=R^{-1}B^TP^*$ dove P^* è soluzione dell'ARE $A^TP+PA+Q-PBR^{-1}B^TP=0$
  - $V^*=Tr(P^*K_f NK_f^T)+Tr(S^*Q)$, $K_f=S^*C^TN^{-1}$ dove S^* è soluzione dell'ARE $AS+SA^T+\Pi-SC^TN^{-1}CS=0$
  - Il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

- Il Teorema di Separazione dimostra che il problema LQG può essere ricondotto alla soluzione di due equazioni di Riccati disaccoppiate.
- Il controllore ottimo è dinamico e dello stesso ordine del sistema.
- Il controllore così ottenuto può essere realizzato in due modi diversi.
- La prima realizzazione che vedremo è quella dello stimatore.


u
B
Φ(s)
C
y
-
K
B
ξ
Φ(s)
+
+
K_f
+
-
C

- Lo svantaggio di questo schema è che per la sua implementazione occorre misurare la *u(t)*.

- Il vantaggio è che il controllore è asintoticamente stabile.
- L’altra realizzazione possibile è quella “in cascata”. In altri termini si valuta la MdT tra *u* e *y* e si implementa un controllore avente tale MdT.

- Sostituendo u=-$K\xi$ nell'equazione dello stimatore

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + K_f\left(y - C\xi\right)$$

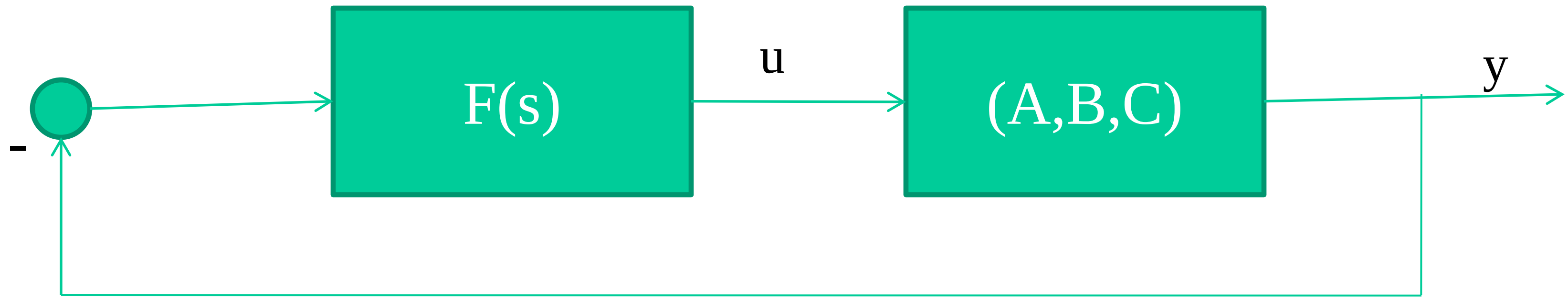
si ottiene l rappresentazione ISU del controllore

$$\dot{\xi} = \left(A - BK - K_f C\right)\xi + K_f y$$

$$u = K\xi$$

Dunque la MdT del controllore risulta essere

$$F(s) = K\left(sI - A + BK + K_f C\right)^{-1} K_f$$



- Lo svantaggio è che, in questo caso il controllore può risultare instabile.

- Però non è necessario misurare *u*.

- **Esempio.** Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + p$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + n$$

$$V = \lim_{t \to \infty} E\left[x^T Q x + u^T R u \right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = 1$$

- La soluzione è

$$S^* = P^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

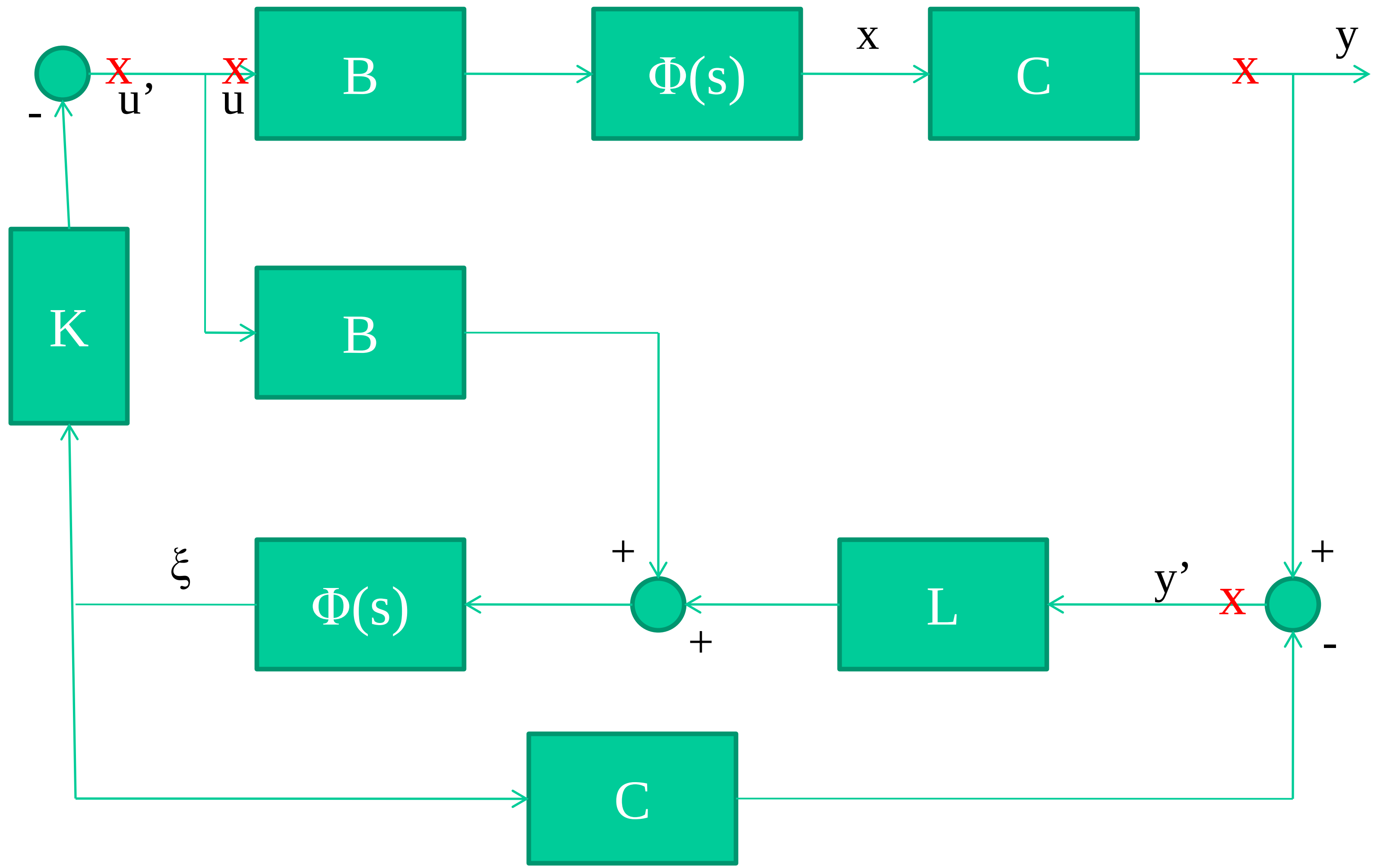
$$K = R^{-1}B^T P^* = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$K_f = S^* C^T N^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V^* = Tr\left[P^* K_f N K_f^T\right] + Tr\left[S^* Q\right] = 6\sqrt{2}$$

Recupero dei margini di robustezza LQ in presenza di osservatore – tecnica LQG-LTR

- Sappiamo che nello schema controllore-osservatore, anche se il guadagno del controllore K è progettato con tecnica LQ, i margini di robustezza non valgono più.
- Facciamo riferimento allo schema nella figura seguente.



x
u'
x
u
B
Φ(s)
x
C
x
y
-
K
B
ξ
Φ(s)
+
+
L
y'
x
+
-
C

- Ricordiamo che la MdT che si ottiene aprendo il ciclo in corrispondenza di *u* è data da

$$\Phi^{-1}\xi = Bu' + LC\Phi Bu - LC\xi$$

Da cui:

$$\xi = \left(\Phi^{-1} + LC\right)^{-1}\left(Bu' + LC\Phi Bu\right)$$

Dall’ultima uguaglianza deriva il fatto che il risultato sui margini di robustezza garantiti non si può applicare.

In effetti esistono esempi in letteratura in cui viene mostrato come questi margini possano diventare arbitrariamente piccoli.

- Un ragionamento analogo si può applicare in riferimento a *y* e *y'* .
- Il punto in corrispondenza di *y'* (interno al controllore) esibisce i margini di fase e guadagno del regolatore ottimo LQ, mentre per il punto in corrispondenza di *y*, che ha rilevanza fisica, non si può dire nulla.
- Tuttavia, è possibile recuperare i margini di robustezza esibiti dal LQR, se, in luogo di un osservatore qualsiasi, si progetta in modo opportuno un filtro di Kalman.

- Per questo scopo risulta utile il prossimo risultato.
- **Definizione.** Un sistema *quadrato* descritto dalla tripla (A,B,C) si dice essere a *fase minima* se la funzione $|C\Phi(s)B|$ non ha zeri nel semipiano destro.

- **Lemma.** Sia $K_f(\upsilon)$ il guadagno del filtro di Kalman ottimo progettato per il sistema descritto dalla tripla (A,B,C) con caratteristiche del rumore pari a

$$\Pi = BB^T$$

$$N = \upsilon^2 I$$

Allora se la tripla (A,B,C) è a fase minima si ha

$$\upsilon \to 0 \quad K_f(\upsilon) \to \frac{1}{\upsilon} BU$$

dove U è una matrice ortonormale.

- Consideriamo l’ARE del filtro di Kalman:

$$AS(\upsilon)+S(\upsilon)A^T+BB^T-S(\upsilon)C^T\frac{1}{\upsilon^2}CS(\upsilon)=0$$

Nell’ipotesi in cui *(A,B)* è stabilizzabile e *(A,B,C)* è a fase minima si dimostra che

$$\lim_{\upsilon\to 0} S(\upsilon)=0$$

e dunque

$$\lim_{\upsilon\to 0} S(\upsilon)C^T\frac{1}{\upsilon^2}CS(\upsilon)=BB^T$$

- Poiché risulta

$$K_f(\upsilon) = \frac{1}{\upsilon^2} S(\upsilon) C^T$$

si ha

$$\upsilon \to 0 \quad K_f(\upsilon) K_f^T(\upsilon) \to \frac{1}{\upsilon^2} BB^T$$

Data una equazione matriciale del tipo $XX^T=DD^T$, con X e D delle stesse dimensioni, la soluzione più generale si può scrivere come $X=DU$, con U arbitraria matrice ortonormale. Da qui si ha l’asserto del lemma.

A questo punto indichiamo con $R(s,\upsilon)$ la MdT del controllore in cui il guadagno dell’osservatore $K_f(\upsilon)$ è quello di un filtro di Kalman ottimo, progettato in base alla procedura descritta prima.

- **Teorema [Loop transfer recovery – ingresso dell’impianto].** Consideriamo il sistema descritto dalla terna *(A,B,C)*, supposto essere quadrato e a fase minima. Allora

$$\upsilon \to 0 \quad R(s,\upsilon)C\Phi(s)B \to K\Phi(s)B$$

In questo modo le caratteristiche di robustezza che si presentano all’ingresso dell’impianto recuperano asintoticamente i margini di robustezza LQ.

- Si noti che in un normale problema LQG le matrici di covarianza del rumore di processo e di misura sono assegnate a priori.
- Nella tecnica LQG-LTR rappresentano dei gradi di libertà che noi utilizzziamo per recuperare i margini.
- In definitiva prima si progetta il guadagno del controllore K con tecnica LQR, dopodiché si passa al progetto del guadagno del filtro di Kalman con $P=BB^T$ e υ sufficientemente piccolo.
- La tecnica ora descritta permette il recupero dei margini all'ingresso dell'impianto; stante la dualità tra regolatore LQ e filtro di Kalman con una procedura del tutto analoga è possibile recuperare i margini all'uscita.

- Nei teoremi che abbiamo enunciato è richiesta l’inversione della matrice $C\Phi(s)B$ che quindi deve essere quadrata; di qui la necessità che il numero di ingressi (m) sia pari al numero di uscite (r).
- Se ciò non si verifica, la procedura si può ancora applicare, ma richiede un accorgimento preliminare.
- **Definizione.** Un sistema descritto dalla tripla (A,B,C) con m ingressi ad r uscite si dice a fase minima se la MdT $C\Phi(s)B$ ha rango massimo nel semipiano destro del piano complesso.

- La definizione ora enunciata recupera quella precedente come caso particolare quando il sistema è quadrato.
- Consideriamo di nuovo il problema del recupero dei margini all’ingresso dell’impianto. Supponiamo $m<r$ e che $C\Phi(s)B$ sia a fase minima.
- *Passo 1*. Si aggiungono $r-m$ colonne a B, diciamole B_a, in modo che $C\Phi(s)\,(B\ B_a)$ sia quadrata, di dimensioni $r x r$ ed ancora a fase minima

- Passo 2. Si aggiungono *r-m* righe nulle a *K* in modo che la matrice

$$\begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \Phi(s) \begin{pmatrix} B & B_a \end{pmatrix}$$

sia quadrata di dimensioni *rxr*.

È facile riconoscere che il Passo 2 equivale ad aggiungere *r-m* righe nulle a *R(s,υ);* definiamo:

$$\hat{R}(s,\upsilon) := \begin{pmatrix} R(s,\upsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ovviamente in questo caso il guadagno del filtro di Kalman $K_f(\upsilon)$ va calcolato in riferimento a matrici di covarianza del tipo:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} B & B_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^T \\ B_a^T \end{pmatrix}$$

$$N = \upsilon^2 I$$

Per il teorema precedente si ha

$$\upsilon \to 0 \quad \hat{R}(s,\upsilon) C \Phi(s) \begin{pmatrix} B & B_a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \Phi(s) \begin{pmatrix} B & B_a \end{pmatrix}$$

Che può riscriversi

$$\upsilon \to 0 \quad \begin{pmatrix} R(s,\upsilon) C \Phi(s) B & R(s,\upsilon) C \Phi(s) B_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K \Phi(s) B & K \Phi(s) B_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- In definitiva

$$\upsilon \to 0 \quad K(s,\upsilon)C\Phi(s)B \to K\Phi(s)B$$

È facile rendersi conto che in questo caso la procedura duale non è applicabile.

Dunque nel caso in cui il sistema abbia più uscite che ingressi è possibile recuperare i margini di robustezza solo all’ingresso dell’impianto.

- Viceversa nel caso in cui $m>r$ (più ingressi che uscite) con la procedura duale di quella descritta è possibile recuperare i margini all’uscita ma *non* all’ingresso.
- Solo se la MdT del sistema è originariamente quadrata è possibile recuperare i margini indifferentemente all’ingresso o all’uscita, *ma non contemporaneamente all’ingresso e all’uscita*.
- Possiamo riassumere questo risultato come segue.

- Sia $C\Phi(s)B$ la MdT di un sistema con m ingressi ed r uscite e a fase minima, allora:
  - Se $m \leq r$ è possibile progettare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso presenti all'**ingresso** dell'impianto i margini di robustezza del regolatore LQ
  - Se $m \geq r$ è possibile progettare un controllore tale che il sistema a ciclo chiuso presenti all'**uscita** dell'impianto i margini di robustezza del regolatore LQ

- Se il sistema non è a fase minima, la tecnica LQG-LTR , non si può applicare.
- Infatti le MdT target $K\Phi(s)B$ e $C\Phi(s)K_f$ sono a fase minima.
- Poiché un controllore stabilizzante non può cancellare gli zeri a parte reale positiva con poli instabili, il prodotto tra controllore e impianto deve conservare anche al limite per υ che tende a zero (o ρ che tende a zero) la struttura non a fase minima dell'impianto.