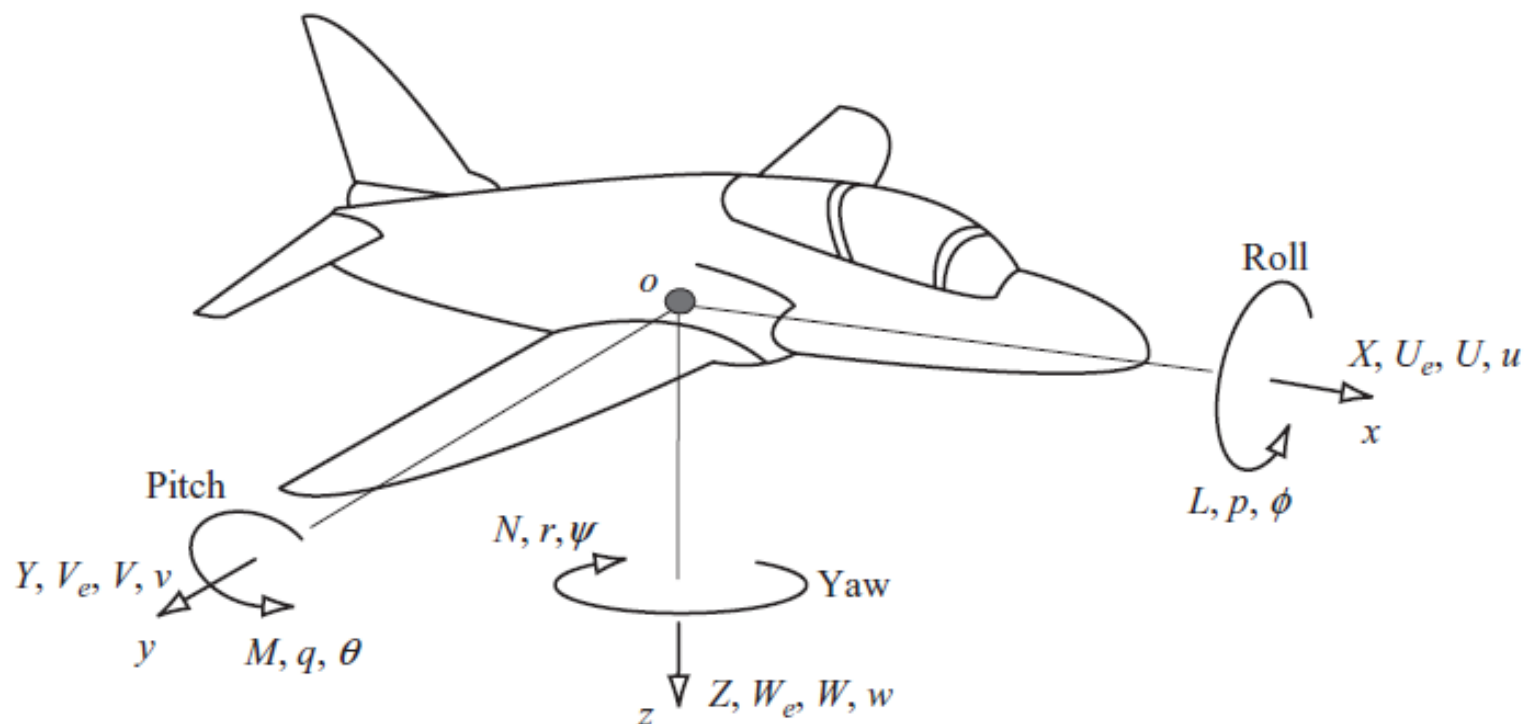


Controllo LQG/LTR di un Aereo

Corso di Controllo Multivariabile

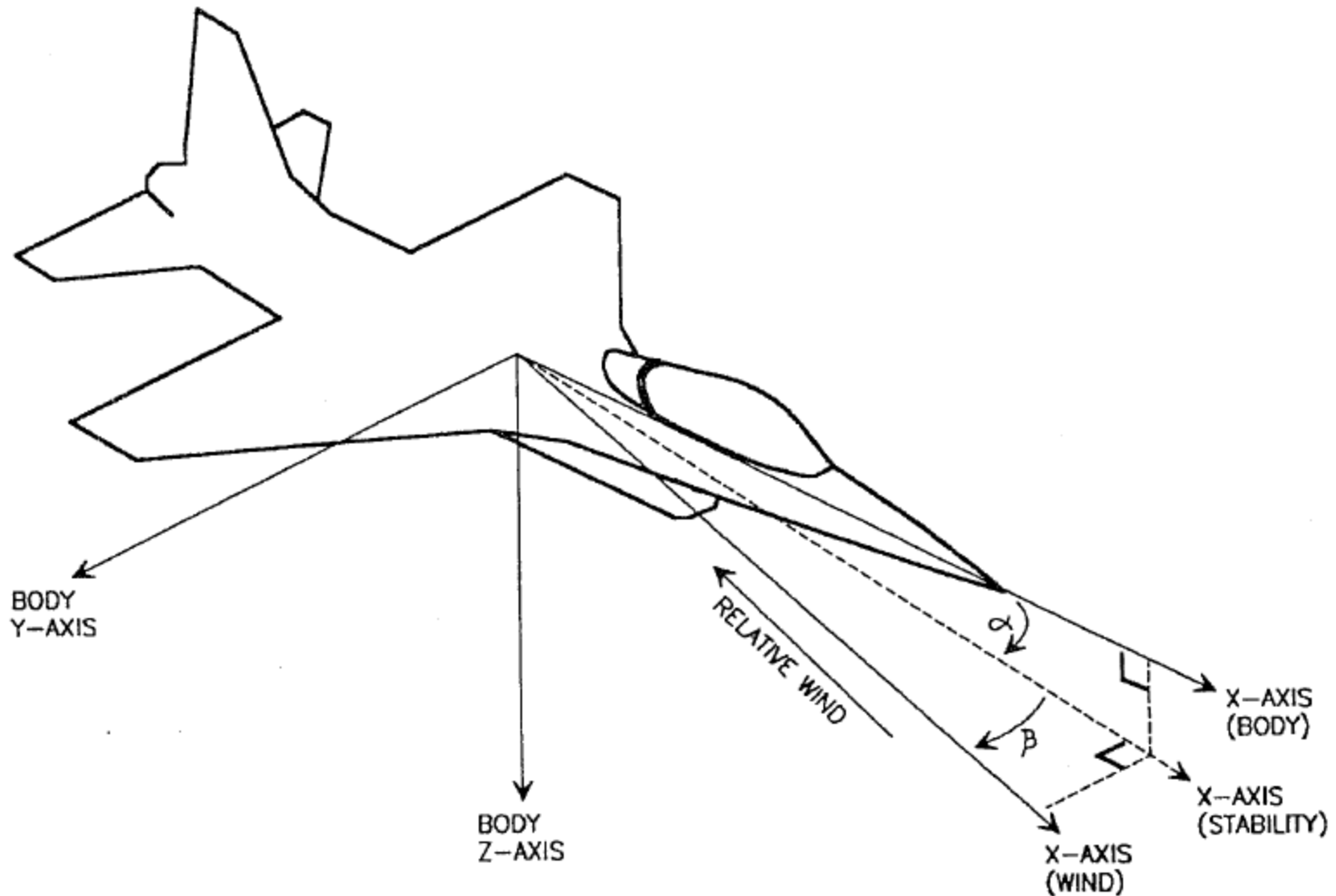
Prof. Francesco Amato

Cenni di Dinamica del Volo: Variabili del Moto

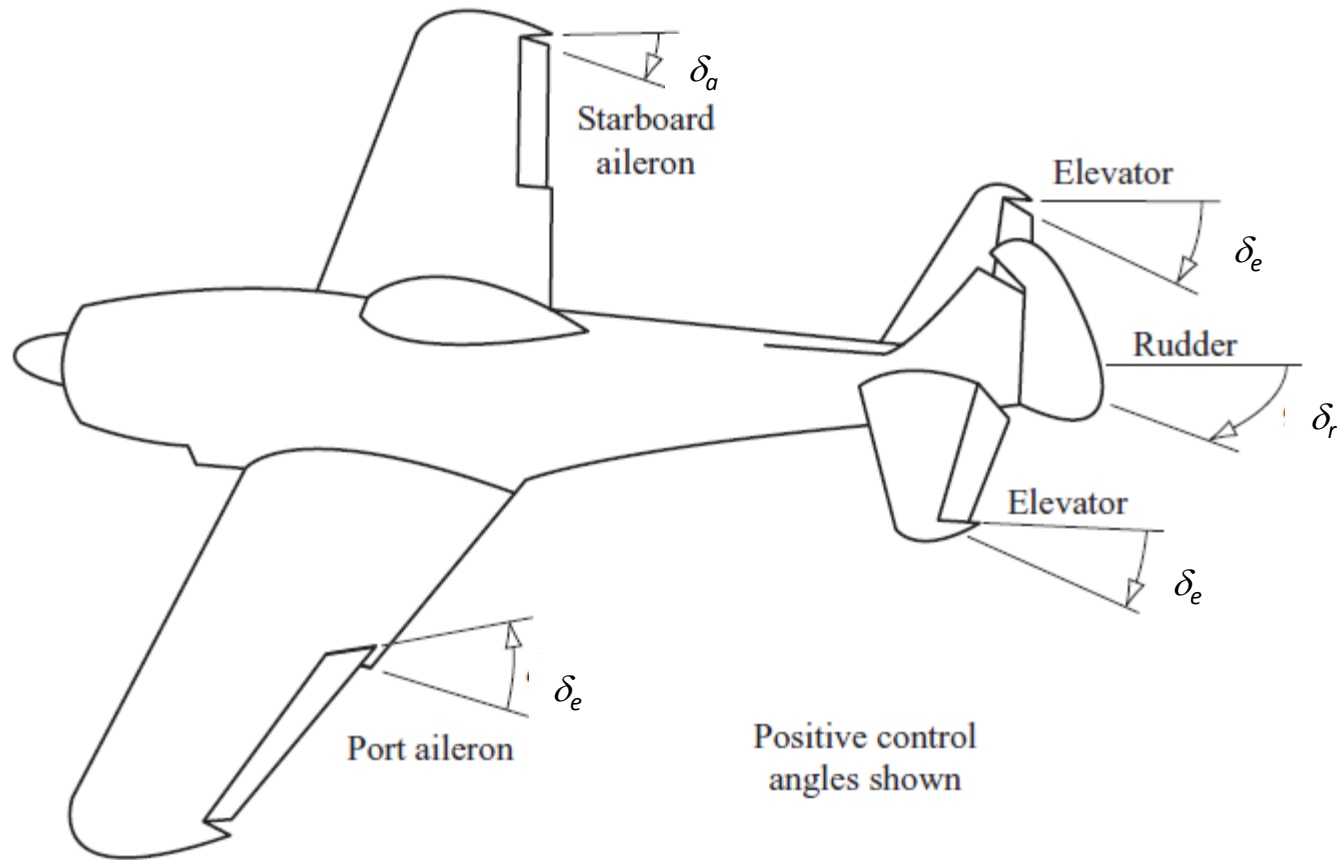


	<i>Trimmed equilibrium</i>			<i>Perturbed</i>		
Aircraft axis	ox	oy	oz	ox	oy	oz
Force	0	0	0	X	Y	Z
Moment	0	0	0	L	M	N
Linear velocity	U_e	V_e	W_e	U	V	W
Angular velocity	0	0	0	p	q	r
Attitude	0	θ_e	0	ϕ	θ	ψ

Cenni di Dinamica del Volo: Assi di Riferimento



Superfici di Controllo



Equazioni del Moto di un Aereo

Force Equations

$$\dot{U} = RV - QW - g'_0 \sin \theta + \frac{F_x}{m}$$

$$\dot{V} = -RU + PW + g'_0 \sin \phi \cos \theta + \frac{F_y}{m}$$

$$\dot{W} = QU - PV + g'_0 \cos \phi \cos \theta + \frac{F_z}{m}$$

Kinematic Equations

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \sin \phi + R \cos \phi)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = \frac{Q \sin \phi + R \cos \phi}{\cos \theta}$$

Moment Equations

$$\dot{P} = (c_1 R + c_2 P)Q + c_3 \bar{L} + c_4 N$$

$$\dot{Q} = c_5 PR - c_6 (P^2 - R^2) + c_7 M$$

$$\dot{R} = (c_8 P - c_2 R)Q + c_4 \bar{L} + c_9 N$$

Navigation Equations

$$\begin{aligned} \dot{p}_N = & U \cos \theta \cos \psi + V(-\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi) \\ & + W(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_E = & U \cos \theta \sin \psi + V(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) \\ & + W(-\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi) \end{aligned}$$

$$\dot{h} = U \sin \theta - V \sin \phi \cos \theta - W \cos \phi \cos \theta$$

Gli ingressi manipolabili (potenza motore, deflessioni di elevatori, alettoni e timone) determinano le forze ed i momenti che compaiono nelle equazioni, secondo relazioni nonlineari

Punti di Equilibrio e Modelli Linearizzati

- Un **punto di equilibrio** per un aereo in volo corrisponde ad una condizione in cui
 - tutte le **velocità** (lineari ed angolari) sono **costanti** (o nulle)
 - tutte le **accelerazioni** (lineari e angolari) sono **nulle**

Steady-State Flight:

$$\dot{P}, \dot{Q}, \dot{R}, \dot{U}, \dot{V}, \dot{W} \left(\text{or } \dot{V}_T, \dot{\beta}, \dot{\alpha} \right) \equiv 0, \quad U = \text{const.} \quad (2.5-3a)$$

with the following additional constraints according to the flight condition:

Steady Wings-Level Flight: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0 \quad (\because P, Q, R \equiv 0)$

Steady Turning Flight: $\dot{\phi}, \dot{\theta} \equiv 0, \quad \dot{\psi} \equiv \text{turn rate}$

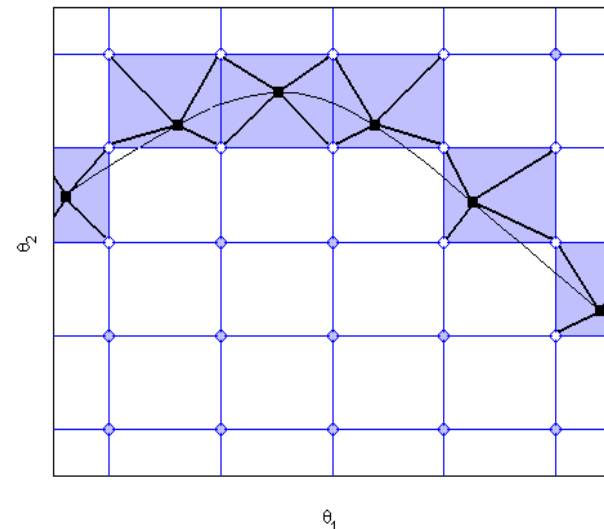
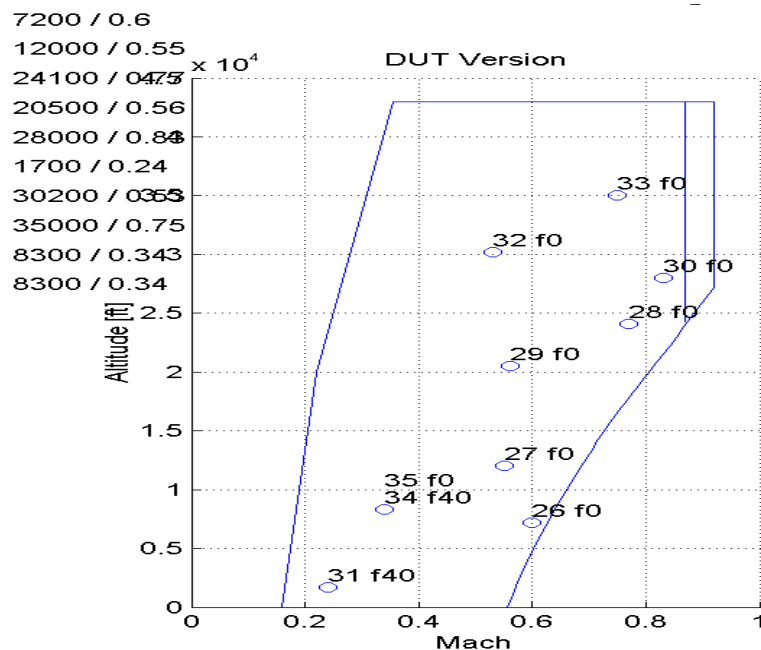
Steady Pull-up: $\phi, \dot{\phi}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\theta} \equiv \text{pull-up rate}$

Steady Roll: $\dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, \quad \dot{\phi} \equiv \text{roll rate}$

(2.5-3b)

Progetto basato su Gain-Scheduling

- L'approccio classico consiste nel
 - derivare tanti modelli linearizzati in diversi punti
 - progettare un controllore per ciascun punto
 - implementare un gain-scheduling nei punti intermedi



Modelli Linearizzati Disaccoppiati

- Nella condizione di volo livellato con sideslip nullo, si ottengono due modelli linearizzati disaccoppiati
 - Modello Linearizzato Longitudinale

$$\mathbf{x}^T = [v_T \quad \alpha \quad \theta \quad q], \quad \mathbf{u}^T = [\delta_{th} \quad \delta_e]$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_T - Z_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -M_{\dot{\alpha}} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} X_{\delta_{th}} \cos \alpha_e & X_{\delta_e} \\ -X_{\delta_{th}} \sin \alpha_e & Z_{\delta_e} \\ 0 & 0 \\ M_{\delta_{th}} & M_{\delta_e} \end{bmatrix}$$

$$E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$A = \begin{bmatrix} X_V + X_{T_V} \cos \alpha_e & X_{\alpha} & -g'_0 \cos \gamma_e & 0 \\ Z_V - X_{T_V} \sin \alpha_e & Z_{\alpha} & -g'_0 \sin \gamma_e & V_T + Z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_V + M_{T_V} & M_{\alpha} & 0 & M_q \end{bmatrix}.$$

Modelli Linearizzati Disaccoppiati

– Modello Linearizzato Latero-Direzionale

$$\mathbf{x}^T = [\beta \quad \phi \quad p_W \quad r_W], \quad \mathbf{u}^T = [\delta_a \quad \delta_r]$$

$$E\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$E = \begin{bmatrix} V_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} Y_{\delta a} & Y_{\delta r} \\ 0 & 0 \\ L'_{\delta a} & L'_{\delta r} \\ N'_{\delta a} & N'_{\delta r} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} Y_\beta & g'_0 \cos \theta_e & Y_p & Y_r - V_T \\ 0 & 0 & \frac{\cos \gamma_e}{\cos \theta_e} & \frac{\sin \gamma_e}{\cos \theta_e} \\ L'_\beta & 0 & L'_p & L'_r \\ N'_\beta & 0 & N'_p & N'_r \end{bmatrix},$$

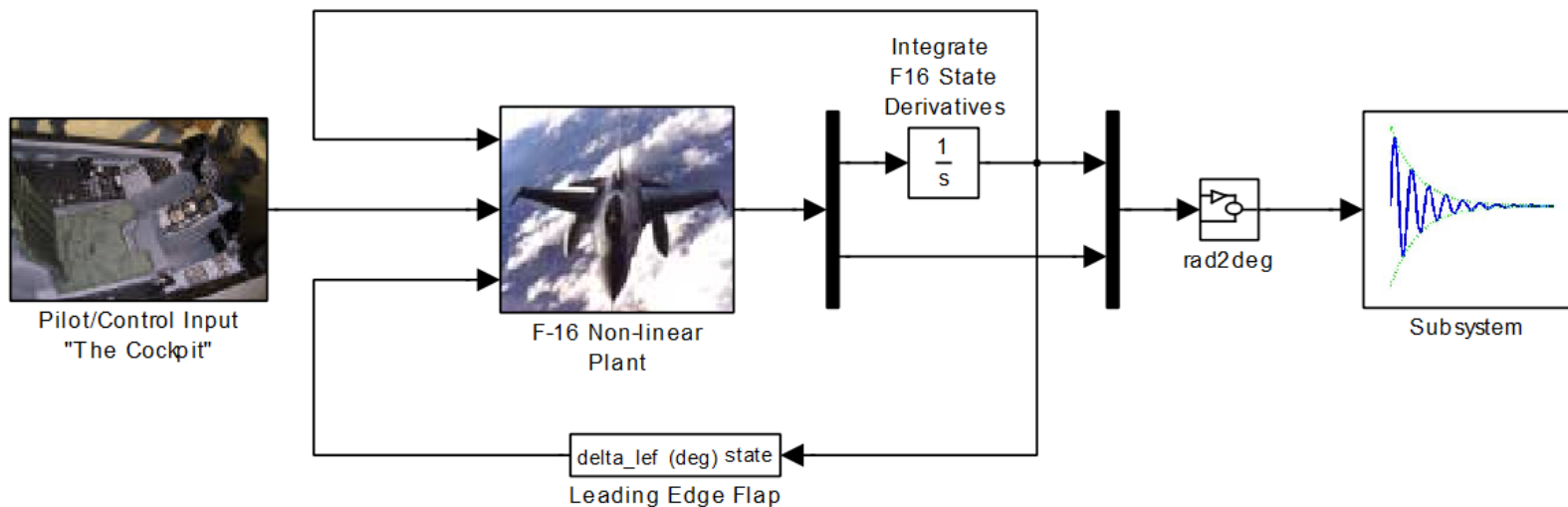
Modello Matlab/Simulink di un F-16



Control	UNITS			
	Input	Used by nlplant	Min	Max.
Thrust	lbs.	lbs.	1000	19000 lbs.
Elevator	deg.	deg.	-25	25 deg.
Aileron	deg.	deg.	-21.5	21.5 deg.
Rudder	deg.	deg.	-30	30 deg.
Leading Edge Flap	deg	deg	0	25 deg.

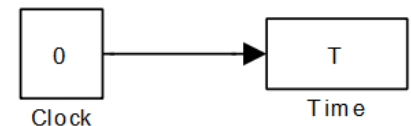
Struttura del Modello Simulink

- Il file Simulink può implementare due modelli: uno semplificato ed uno più complesso (che considera anche l'effetto del Leading Edge Flap)



University of Minnesota / Honeywell
Date : October 25th, 2002

Nonlinear Equations of plant and Aerodynamic Tables :
- Aircraft Control & Simulation, Stevens & Lewis
- NASA Technical Paper 1538 Nguyen et al., 1973



Calcolo Modelli Linearizzati

- Mediante il comando *FindF16Dynamics* è possibile calcolare
 - Modello linearizzato completo
 - Modello linearizzato longitudinale
 - Modello linearizzato latero-direzionale
 - Mappa dei poli di ciascun modello
 - Diagrammi di Bode per ciascun canale In-Out

Modello Linearizzato Latero-Direzionale

- Struttura del modello latero-direzionale (include il throttle come ingresso)

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{v} \\ \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\delta}_t \\ \dot{\delta}_a \\ \dot{\delta}_r \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ v \\ \beta \\ p \\ r \\ \delta_t \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \delta_t \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

Equazione di stato

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ v \\ \beta \\ p \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \\ v \\ \beta \\ p \\ r \end{bmatrix} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} \delta_t \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

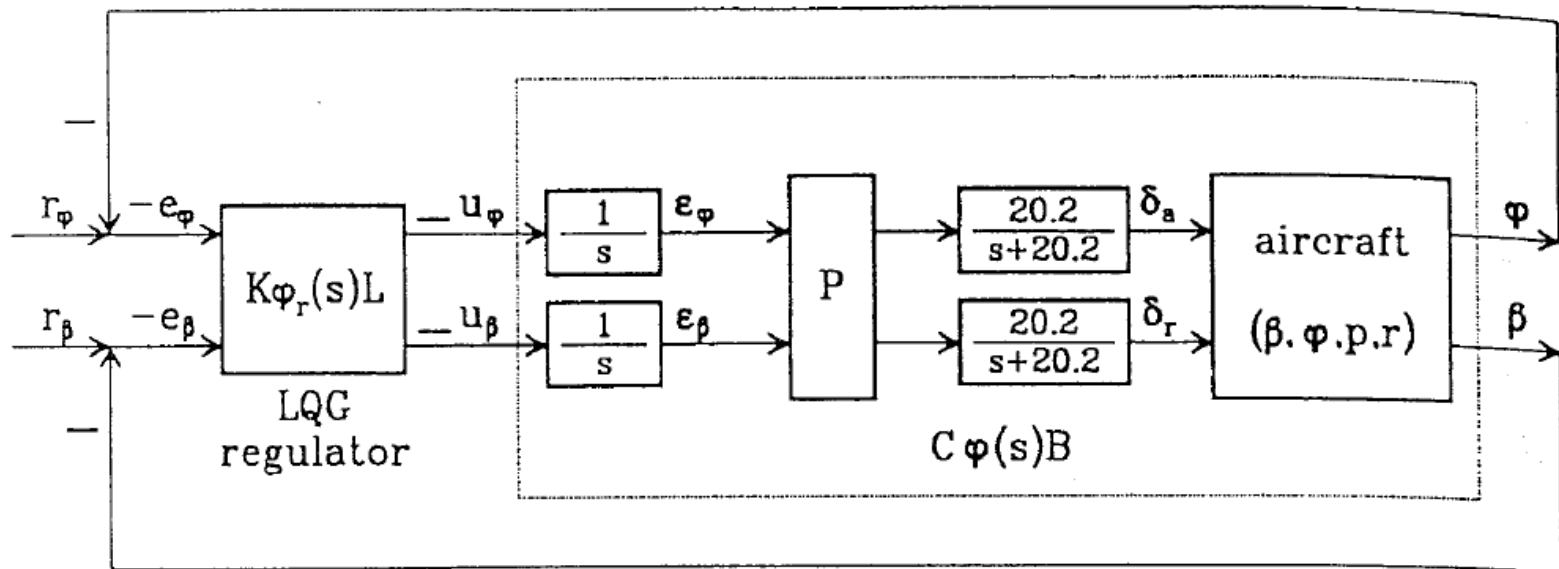
Equazione di uscita

Modello Ridotto

- Consideriamo il sottosistema definito da
 - Ingressi: Aileron e Rudder
 - Uscite: Bank angle and Sideslip angle
- Non considerando il Throttle otteniamo un sistema quadrato
- Effettuiamo l'analisi di controllabilità e osservabilità sul sottosistema ottenuto
- Eliminiamo le parti non control./osserv.

Struttura del Sistema di Controllo

- L'obiettivo è inseguire il riferimento r_ϕ con sideslip nullo
- Il sistema viene precompensato per bilanciare i valori sui due canali
- Viene inoltre aggiunta un'azione integrale su entrambi i canali per ottenere errore nullo



Recupero della Robustezza all'Uscita

- Nel seguito adotteremo l'approccio LTR riferendoci all'uscita del sistema
- Ricordiamo che, in tal caso, la procedura consiste nel
 - calcolare prima il filtro di Kalman
 - poi calcolare il guadagno statico K che recupera la robustezza in uscita
- Mediante la procedura duale è possibile invece progettare un controllore per il LTR all'ingresso del sistema

Progetto del Filtro di Kalman

- Se la coppia (A^T, C^T) è stabilizzabile e la coppia (A^T, G^T) è rivelabile (dove $Q_n = G^T G$)
 - L'eq. algebrica di Riccati
$$AS + SA^T + Q_n - SC^T R_n^{-1} CS = 0$$
ammette un'unica soluzione S^* semidefinita positiva
 - L'osservatore con guadagno $K_f = S^* C^T N^{-1}$ (filtro di Kalman) è ottimo rispetto ad un assegnato indice quadratico

- In Matlab usiamo il comando

kalman(sys, Q_n, R_n)

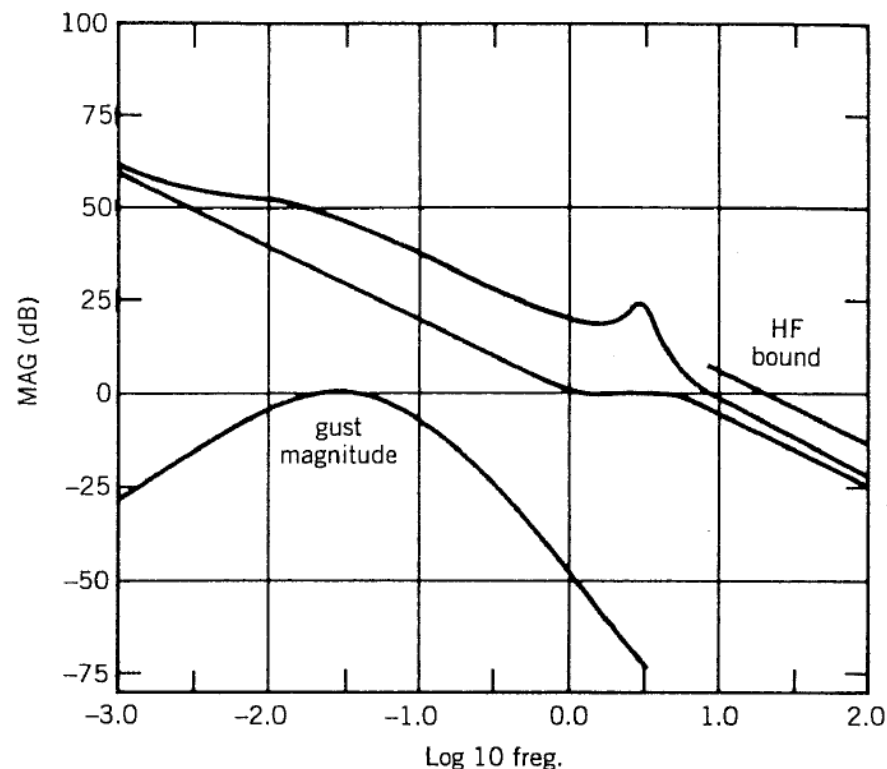
- N.B. il sistema *sys* deve essere nella forma

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fw$$

$$y = Cx + Du + Hw + v$$

Analisi della Robustezza pre-LTR

- Ricordiamo che per la robustezza del sistema a ciclo chiuso si può valutare dalla matrice di trasferimento a ciclo aperto
- Per sistemi MIMO si fa riferimento ai valori singolari



Analisi della Robustezza pre-LTR

- La MdT a ciclo aperto è data da

$$C(sI-A)^{-1}L$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Le$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

- Possiamo tracciare l'andamento in frequenza del max e min valore singolare

- La MdT a ciclo chiuso, invece, è

$$C(sI-(A-LC))^{-1}L$$

$$\dot{\hat{x}} = (A-LC)\hat{x} + Lr$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

- Da questa funzione possiamo ricavare la risposta al gradino del sistema di controllo *ideale*

Progetto del Guadagno del Controllore

- Per recuperare le proprietà di robustezza all'uscita dell'impianto, possiamo calcolare lo state-feedback LQR con le matrici di peso $Q=C^TC$ e $\rho^2 R$
- Ricordiamo che quando $\rho \rightarrow 0$

$$C\Phi(s)BK(s) = C\Phi(s)BK\Phi_r(s)K_f \rightarrow C\Phi(s)K_f$$

- In Matlab usiamo il comando

$$lqr(sys, Q, R)$$

Analisi della Robustezza post-LTR

- Diminuiamo il valore di ρ fino ad ottenere una MdT a ciclo aperto simile a quella del sistema ideale
- Il sistema a ciclo aperto è

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Lw$$

$$u = -K\hat{x}$$

dove $w(t) = -e(t)$

- Possiamo riscriverlo come

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ 0 & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

Analisi della Robustezza post-LTR

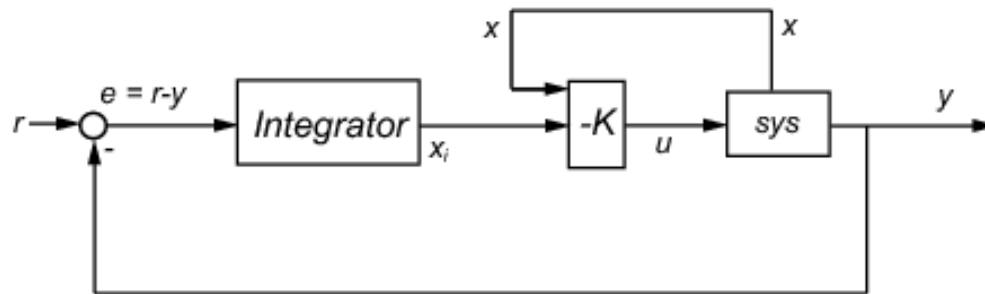
- Sostituendo $w(t)=y(t)-r(t)$, possiamo scrivere il sistema a ciclo chiuso

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-LC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

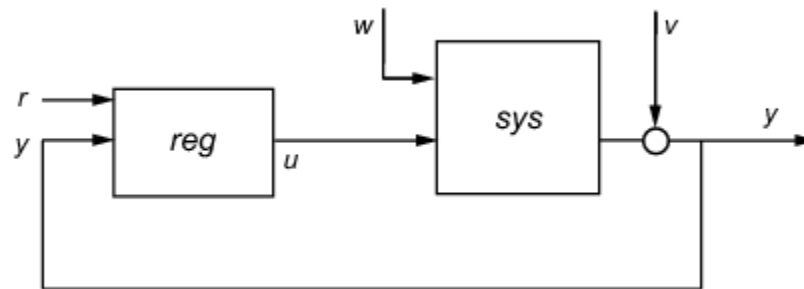
da cui è possibile ottenere le risposte al gradino

Comandi Utili

- *lqi*: genera una matrice K assumendo la presenza di integratori nel ciclo di controllo a 1 grado di libertà



- *lqg*: genera direttamente il controllore completo (a 1 o 2 gradi di libertà) LQG per il tracking del riferimento r



Esercizi

- Progettare dei controllori per l'aereo F-16 in altre condizioni di volo, sia per il sottosistema longitudinale che latero-direzionale
- Provare ad implementare i controllori nel modello non-lineare e confrontare con i risultati del caso lineare
- Valutare il comportamento del sistema a c.c. in punti operativi diversi da quello di progetto (robustezza a fronte di variazioni parametriche)
- Progetto LQG/LTR per altri sistemi MIMO
 - ad es. vedi Case studies nei Demos in Matlab
 - Esempio Colonna di Distillazione
(http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/book/matlab_m/cola/cola.html)
 - Riviste (Control System Technology, Journal of Process Control, ISA Transactions,...)