

ISBN 88-207-1124-9

 LIGUORI EDITORE
€11.36

GIOVANNI CELENTANO

ELEMENTI DI SINTESI DIRETTA DEI SISTEMI MULTIVARIABILI

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1981

Prima edizione italiana Settembre 1981

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1988 1987 1986 1985 1984 1983 1982 1981

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno
dell'ultima ristampa

I diritti di traduzione, di riproduzione e di adattamento totale
o parziale e con qualsiasi mezzo (compresi microfilm, microfiches
e riproduzioni fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi.

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1124 - 9

A Laura ed Eduardo

PREFAZIONE

Il volume trae origine da alcune note preparate dall'autore per un corso monografico rivolto agli studenti del V anno della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli e dall'attività di ricerca che lo stesso autore ha svolto negli ultimi anni prevalentemente in collaborazione con il prof. Aldo Balestrino.

Esso tratta alcuni moderni metodi di sintesi dei sistemi multivariabili, lineari, stazionari, di dimensioni finite. Più precisamente i Capitoli II e III sono dedicati alla sintesi di un controllore statico per l'assegnamento arbitrario dei poli. Il Capitolo IV è dedicato alla sintesi dell'osservatore di un dato sistema. Il Capitolo V è dedicato alla sintesi di un controllore dinamico non interagente (osservatore) per l'assegnamento arbitrario dei poli. Il Capitolo VI è dedicato alla sintesi di un controllore dinamico interagente (compensatore) per l'assegnamento arbitrario dei poli. Il Capitolo VII infine è dedicato alla sintesi di un controllore che, collegato ad un dato impianto, consente di ottenere un sistema di regolazione o un asservimento con poli arbitrari.

Il testo è rivolto agli studenti che si vogliono specializzare nei controlli e agli studiosi che svolgono attività di ricerca nel campo dei controlli e della sistemistica.

Lo sforzo dell'autore è stato rivolto ad una esposizione unitaria e concisa di argomenti non ancora del tutto assestati e con dimostrazioni quanto più possibile semplici e costruttive.

Tutti i risultati fondamentali sono accompagnati da algoritmi di progetto e da numerosi esempi i quali consentono, da una par

- II -

te, di impadronirsi delle relative procedure di sintesi senza entrare nei dettagli dimostrativi, dall'altra, di facilitarne la comprensione.

Nello scrivere un libro si è sempre in debito con qualcuno. A tal proposito l'autore esprime la sua gratitudine al prof. Aldo Balestrino per gli utili consigli e suggerimenti da lui avuti e al prof. Giuseppe Ambrosino per l'attenta rilettura e correzione del manoscritto finale.

Giovanni Celentano

Napoli, ottobre 1980

CAPITOLO I

IL PROBLEMA DELL'ASSEGNAIMENTO DEI POLI

1.1 INTRODUZIONE

Dato un sistema dinamico multivariabile si richiede di progettare un altro sistema, in generale anch'esso dinamico, detto controllore, che, collegato al sistema dato mediante le variabili esterne, faccia assumere al sistema complessivo le caratteristiche imposte dal particolare problema di sintesi in considerazione.

Tra i diversi problemi di sintesi, formulati e sviluppati in modo soddisfacente per far fronte a problemi ingegneristicamente significativi, di fondamentale importanza sono: la stabilità, l'assegnamento dei poli, la regolazione, l'asservimento, la non interazione, l'insensitività, l'ottimalità.

Tali problemi di sintesi non sempre sono indipendenti; ad esempio per i sistemi lineari e stazionari il problema dell'assegnamento dei poli comprende come caso particolare quello della stabilità. Talvolta essi si presentano contemporaneamente; ad esempio si può richiedere che un sistema sia simultaneamente non interagente e stabile.

In questo volume si considera principalmente il problema della sintesi del controllore che realizza il cosiddetto assegnamento arbitrario dei poli per un dato sistema lineare e stazionario; sostanzialmente occorre progettare un sistema lineare e stazionario, tal-

volta di struttura prefissata, da collegare opportunamente ad un dato sistema, lineare e stazionario, in modo che l'insieme dei poli del sistema risultante coincida con uno specificato insieme simmetrico di numeri complessi.

1.2 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Si consideri il sistema, lineare, stazionario e di dimensioni finite, rappresentato implicitamente dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1a)$$

$$y = Cx, \quad (2.1b)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}^r$ è l'ingresso, $y \in \mathbb{R}^m$ è l'uscita ed A , B , C sono matrici costanti di dimensioni opportune con $\text{rang} B = r$ e $\text{rang} C = m$.

Se $x(0) = x_0$ alle (2.1) corrisponde la rappresentazione esplicita:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.2a)$$

$$y(t) = Ce^{At} x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau; \quad (2.2b)$$

se l'ingresso u è $\mathcal{L}$ -trasformabile dalle (2.2) si ha:

$$x(s) = \phi(s)x_0 + \phi(s)Bu(s) \quad (2.3a)$$

$$y(s) = C\phi(s)x_0 + W(s)u(s), \quad (2.3b)$$

dove

$$\phi(s) = \mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1} \quad (2.4)$$

è la trasformata di Laplace della matrice di transizione e

$$W(s) = \mathcal{L}(Ce^{At}B) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.5)$$

è la matrice di trasferimento del sistema.

E' noto dalla Teoria dei Sistemi che i poli di $\phi(s)$ sono gli autovalori della matrice dinamica A mentre i poli di $W(s)$ sono gli autovalori della matrice dinamica della sola parte raggiungibile ed osservabile del sistema.

Nel seguito per poli del sistema si intenderanno i poli di $\phi(s)$, ossia gli autovalori della matrice dinamica del sistema.

Si consideri ora l'interconnessione del sistema dato (2.1) come indicato in Fig.2.1 col più generale controllore (dinamico) lineare, stazionario e di dimensioni finite:

$$\dot{w} = Ww + Zv + Dy \quad (2.6a)$$

$$u = Hw + Lv + Ky, \quad (2.6b)$$

dove $w \in R^r$ è lo stato del controllore, $v \in R^q$, $q \leq r + r$, è il nuovo ingresso, $u \in R^r$ ed $y \in R^m$ sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema (2.1) e W, Z, D, H, L, K sono matrici costanti di dimensioni opportune. Si ottiene così il sistema complessivo

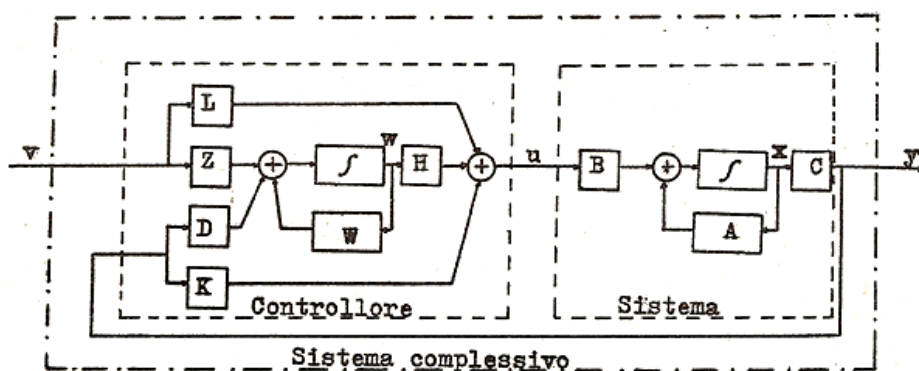


Fig.2.1

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BKC & BH \\ DC & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BL \\ Z \end{bmatrix} v \quad (2.7a)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \quad (2.7b)$$

Se $v = 0$ il controllore si dice statico o puramente algebrico.
In tal caso le (2.6) si riducono all'unica equazione

$$u = Ky + Lv \quad (2.8)$$

e lo schema di Fig.2.1 si semplifica come in Fig.2.2.

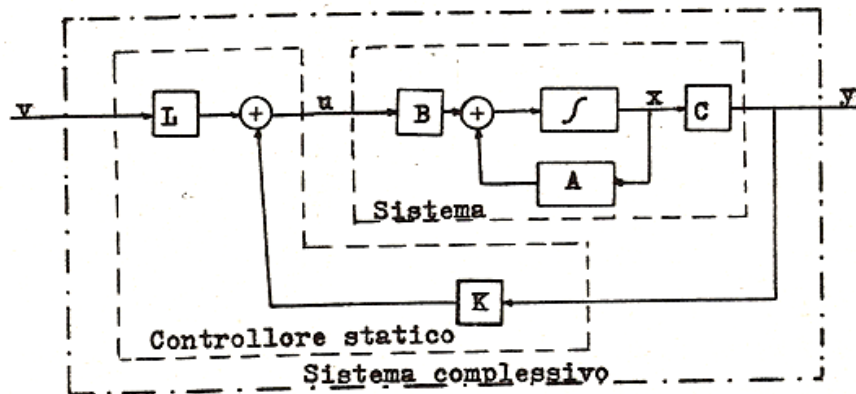


Fig.2.2

I principali problemi di sintesi che vengono trattati in questo volume sono:

PROBLEMA 2.1 (Assegnamento completo dei poli). Dato il sistema (2.1), determinare un controllore di tipo (2.6) in modo che l'insieme dei poli del sistema (2.7) coincida con uno specificato insieme simmetrico Λ di $n + v$ numeri complessi.

PROBLEMA 2.2 (Assegnamento incompleto dei poli). Dato il sistema (2.1), determinare un controllore di tipo (2.6) in modo che l poli del sistema (2.7), con $l < n + v$, coincidano con l specificati numeri complessi simmetrici.

COMMENTO. L'assegnamento dei poli costituisce il metodo più semplice e diretto per modificare il comportamento dinamico di un sistema. Ad esempio, per rendere un sistema asintoticamente stabile, detti λ_i i suoi poli, è necessario che $\text{Re} \lambda_i < 0$ mentre per accelerarne la risposta limitando la frequenza di oscillazione è necessario che $\max \text{Re} \lambda_i \leq -1/\tau$ e $\max \text{Im} \lambda_i \leq \omega$, con $\tau > 0$ ed $\omega > 0$ opportuni.

Prima di esporre i diversi procedimenti di sintesi si premette il seguente risultato.

TEOREMA 2.1 (Assegnabilità dei poli). Mediante un controllore del tipo (2.6) è possibile modificare al più i poli della sola parte raggiungibile ed osservabile del sistema (2.1).

DIMOSTRAZIONE. Si consideri il cambiamento di base

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

dove $\xi = T^{-1}x$ è la trasformazione canonica di Kalman per il sistema (2.1). Essendo

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix}, \quad (2.10a)$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad CT = \begin{bmatrix} 0 & c_b & 0 & c_d \end{bmatrix}, \quad (2.10b)$$

con (A_{bb}, B_b) raggiungibile ed (A_{bb}, C_b) osservabile, la matrice dinamica del sistema complessivo (2.7) nella nuova base diventa:

$$A_r = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} + B_a KC_b & A_{ac} & A_{ad} + B_a KC_d & B_a H \\ 0 & A_{bb} + B_b KC_b & 0 & A_{bd} + B_b KC_d & B_b H \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} & 0 \\ 0 & DC_b & 0 & DC_d & W \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Dalla (2.11), in base alla regola di Laplace generalizzata per lo sviluppo di un determinante, segue:

$$|\lambda I - A_r| = |\lambda I - A_{aa}| |\lambda I - A_{cc}| |\lambda I - A_{dd}| \left| \lambda I - \begin{bmatrix} A_{bb} + B_b KC_b & B_b H \\ DC_b & W \end{bmatrix} \right|. \quad (2.12)$$

Poichè i poli del sistema (2.7) sono gli autovalori della matrice A_r , dalla (2.12) segue che il controllore (2.6) non può modificare gli autovalori di A_{aa} , A_{cc} e A_{dd} , ossia i poli della parte raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile ed osservabile. Il teorema resta quindi dimostrato ■

Dal Teorema 2.1 segue che il problema dell'assegnamento dei poli, in particolare quello completo, ha senso se e solo se il siste-

ma è raggiungibile ed osservabile.

Poichè molte proprietà di interesse sono vere per tutti i valori dei parametri, ad eccezione al più per quelli che corrispondono a punti di ipersuperfici algebriche in un opportuno spazio dei parametri, sono utili le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 2.1 (Ipersuperfici). Sia $f = f(p_1, p_2, \dots, p_N)$ un polinomio a coefficienti reali nelle N variabili reali $p_1, p_2, \dots, p_N$. Un sottoinsieme proprio di R^N si dice ipersuperficie in R^N se coincide con l'insieme degli zeri di un polinomio non costante f .

DEFINIZIONE 2.2 (Proprietà vere "quasi sempre"). Sia $\mathcal{P}$ una proprietà funzione delle matrici $A, B, \dots$. La proprietà $\mathcal{P}$ si dice vera per quasi tutte le matrici $A, B, \dots$ se l'insieme delle matrici $A, B, \dots$ per cui la proprietà $\mathcal{P}$ non è vera è l'insieme vuoto oppure una ipersuperficie nello spazio dei parametri di $A, B, \dots$.

Dalla Definizione 2.2 segue che se la proprietà $\mathcal{P}$ è vera per quasi tutte le matrici $A, B, \dots$, allora la probabilità che, per una scelta a caso delle matrici $A, B, \dots$, la proprietà $\mathcal{P}$ non sia vera è zero.

DEFINIZIONE 2.3 (Proprietà ben poste). Una proprietà $\mathcal{P}$ funzione delle matrici $A, B, \dots$ si dice ben posta se la verità di $\mathcal{P}$ in un punto p_0 dello spazio dei parametri di $A, B, \dots$ implica la verità di $\mathcal{P}$ per ogni punto p di un opportuno intorno di p_0 .

Poichè un polinomio è una funzione continua, per il teorema della permanenza del segno, segue che ogni proprietà $\mathcal{P}$ vera per quasi tutte le matrici $A, B, \dots$ è ben posta.

ESEMPIO 2.1. Una ipersuperficie in R è un insieme finito di punti; una ipersuperficie in R^2 è un insieme finito di curve algebriche;

una ipersuperficie in R^3 è un insieme finito di superfici algebriche $\blacktriangle$

ESEMPIO 2.2. La proprietà "la matrice quadrata A è non singolare" è vera per quasi tutte le matrici quadrate A ed è ben posta. Infatti, una matrice di dimensioni $n.n$ è non singolare se

$$\det A \neq 0. \quad (2.13)$$

Essendo $\det A$ un polinomio non identicamente nullo negli $N = n.n$ elementi di A segue l'asserto $\blacktriangle$

ESEMPIO 2.3. Date due matrici $A \in R^{n.n}$ e $B \in R^{n.r}$, la proprietà "la coppia (A, B) è raggiungibile" è vera per quasi tutte le matrici A, B ed è ben posta. Infatti, (A, B) è raggiungibile se e solo se

$$\text{rango} Q = \text{rango}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \iff \det Q Q^T \neq 0. \quad (2.14)$$

Essendo $\det Q Q^T$ un polinomio negli $N = n.n + n.r$ elementi di A, B non identicamente nullo e poichè si possono facilmente costruire delle coppie (A, B) raggiungibili segue l'asserto $\blacktriangle$

1.3 ESERCIZI

3.1 - Calcolare la risposta al gradino del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -4 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \quad 1 \quad 0)x$$

per $k = 1, 14, 20$.

3.2 - Scrivere un sottoprogramma al calcolatore per determinare il polinomio caratteristico di una matrice $A \in R^{n.n}$.

3.3 - Scrivere un sottoprogramma al calcolatore per determinare gli autovalori di una matrice $A \in R^{n.n}$.

3.4 - Dato il sistema (2.1), dimostrare che i poli della matrice di transizione $\Phi(s)$ sono gli autovalori della matrice dinamica A mentre i poli della matrice di trasferimento $W(s)$ sono gli autovalori della matrice dinamica della sola parte raggiungibile ed osservabile del sistema.

3.5 - Dato il sistema (2.1), supposto per semplicità ad un solo ingresso e ad una sola uscita, dimostrare che se gli autovalori della matrice dinamica della parte osservabile sono a parte reale negativa esiste la risposta a regime per un segnale d'ingresso $u = U_M \sin(\omega t + \varphi)$ e tale risposta è data da:

$$y = U_M M(\omega) \sin(\omega t + \varphi + \psi(\omega)), \text{ dove: } M(\omega) = |W(j\omega)|, \psi(\omega) = \angle W(j\omega).$$

3.6 - Si discuta la banda passante del sistema con

$$W(s) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}$$

al variare dei poli λ_1, λ_2 .

3.7 - Discutere la struttura del controllore (2.6).

3.8 - Dimostrare che la proprietà "la matrice quadrata A è ciclica" è vera per quasi tutte le matrici quadrate A ed è ben posta.

1.4 BIBLIOGRAFIA

Per gli argomenti di Teoria dei Sistemi si rimanda a [1] - [5]. Per i diversi problemi di sintesi si vedano invece [6] - [14].

- [1] L.A. ZADEH e C.A. DESOER, Linear System Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1963.

- [2] R.E. KALMAN, P.L. FALB e M.A. ARBIB, Topics in Mathematical System Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1969.
- [3] L.A. ZADEH e E. POLAK, System Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1969.
- [4] G. MARRO, Teoria dei Sistemi, Patron, Bologna, 1975.
- [5] A. RUBERTI e A. ISIDORI, Teoria dei Sistemi, Sideria, Roma, 1976.
- [6] R. TOMOVIC, Sensitivity Analysis of Dynamic Systems, Mc Graw-Hill, New York, 1963.
- [7] P.L. FALB e W.A. WOLOVICH, Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control System, IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-12, pp. 651-659, 1967.
- [8] W.M. WONHAM, On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-12, pp. 660-665, 1967.
- [9] E.J. DAVISON, On Pole Assignment in Linear System with Incomplete State Feedback, IEEE Tran. Aut. Control, Vol. AC-16, pp. 98-99, 1971.
- [10] B.D.O. ANDERSON e J.B. MOORE, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, 1971.
- [11] W.M. WONHAM, Tracking and Regulation in Linear Multivariable Systems, SIAMJ. Control, Vol. II, pp. 424-437, 1973.
- [12] M. WONHAM, Linear Multivariable Control, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [13] A. LOCATELLI, Teoria della Regolazione, Hoepli, Milano, 1975.
- [14] A. BALESTRINO, G. CELENTANO e L. SCIAVICCO, On Incomplete Pole Assignment in Linear Systems, Systems Science J., Vol. 2, No. 4, pp. 59-69, 1976.

CAPITOLO II

ASSEGNAIMENTO COMPLETO DEI POLI MEDIANTE CONTROLLORE STATICO

2.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

E' evidente che l'impiego di un controllore per l'assegnamento dei poli pone problemi economici e realizzativi crescenti con il suo ordine ν . Risulta pertanto di notevole interesse individuare tra l'insieme dei controllori che risolvono il problema dell'assegnamento dei poli quello di ordine minimo.

In questo capitolo viene mostrato che per sistemi raggiungibili ed osservabili con n uscite e/o ingressi indipendenti descritti dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx, \quad (1.1b)$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rango} B = r$ e $\text{rango} C = m$, il problema dell'assegnamento completo dei poli può sempre essere risolto mediante un controllore statico descritto dall'equazione:

$$u = Ky + Lv, \quad (1.2)$$

in cui $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ed $L \in \mathbb{R}^{r \times \rho}$ con $\rho \leq r$.

Per presentare tale risultato fondamentale è utile premettere

alcuni lemmi i quali consentono di trasformare, mediante un controllo statico del tipo:

$$u = K_0 y + f v, \quad K_0 \in R^{r \cdot m}, \quad f \in R^r, \quad (1.3)$$

il sistema dato, supposto raggiungibile, in un altro sistema pur esso raggiungibile ma con un solo ingresso.

LEMMA 1.1 (Raggiungibilità con un solo ingresso). Se la coppia (A, B) con $A \in R^{n \cdot n}$, $B \in R^{n \cdot r}$ e $\text{rango } B = r$ è raggiungibile, allora per ogni vettore colonna b_i , $i = 1, 2, \dots, r$, di B esiste una matrice $K_i \in R^{r \cdot n}$ tale che la coppia $(A + BK_i, b_i)$ è raggiungibile.

DIMOSTRAZIONE. Poichè la coppia (A, B) è raggiungibile si ha:

$$\text{rango}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n. \quad (1.4)$$

Dalla (1.4) segue che esistono p ($\leq r$) colonne $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{ip}$ di B e p interi $h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ip} \geq 1$, con $h_{i1} + h_{i2} + \dots + h_{ip} = n$, tali che gli n vettori

$$b_{i1}, Ab_{i1}, \dots, A^{h_{i1}-1}b_{i1}; \dots; b_{ip}, Ab_{ip}, \dots, A^{h_{ip}-1}b_{ip} \quad (1.5)$$

sono: a) linearmente indipendenti; b) $\forall j = 1, 2, \dots, p$, il vettore $A^{h_j}b_{ij}$ dipende linearmente dai vettori $b_{ij}, Ab_{ij}, \dots, A^{h_j-1}b_{ij}$.

Da qui in poi, per semplicità di notazione, l'indice i sarà omissso supponendo, senza perdere di generalità, che $i1 = 1, i2 = 2, \dots, ip = p$; ciò può essere ottenuto scambiando opportunamente le colonne di B .

Detta Q la matrice non singolare formata dai vettori (1.5) si definisca la matrice

$$K_1 = SQ^{-1}, \quad (1.6)$$

dove le colonne $s_j, j = 1, 2, \dots, n$, della r.n matrice S sono date da (vedi anche Fig.1.1):

$$s_{ti} = \begin{cases} \text{colonna (i+1)-esima della matrice identit\`a,} \\ \text{per } t_1=h_1, t_2=h_1+h_2, \dots, t_{p-1}=h_1+h_2+\dots+h_{p-1} \\ \\ 0 \text{ altrove.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Dalla relazione $Q^{-1}Q = I$ segue che:

$$Q^{-1}A^1 b_i = \text{colonna k-esima della matrice identit\`a,} \\ \text{per } i=1,2,\dots,p \text{ ed } l=0,1,\dots,h_i-1, \quad (1.8)$$

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 \dots A^{h_1-1} b_1 & b_2 & Ab_2 \dots A^{h_2-1} b_2 & \dots & b_p & Ab_p \dots A^{h_p-1} b_p \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Fig.1.1

dove k \`e l'indice di colonna che caratterizza la posizione di $A^1 b_i$ nella matrice Q. Inoltre dalle (1.6) ed (1.7) si ha:

$$BK_1 A^{h_i-1} b_i = b_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1 \quad (1.9a)$$

$$\begin{aligned} BK_1 A^l b_1 = 0, \quad l=0,1,\dots,h_i-1 \quad \text{per } i=1,2,\dots,p-1 \\ \text{ed } l=0,1,\dots,h_p-1 \quad \text{per } i=p. \end{aligned} \quad (1.9b)$$

Pertanto, posto $\hat{A} = A + BK_1$, il lemma risulta dimostrato se

$$\text{rango}(b_1 \quad \hat{A}b_1 \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}b_1) = n. \quad (1.10)$$

A tal fine, tenendo presente le (1.9), si noti che:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 \\ \hat{A}b_1 &= (A+BK_1)b_1 = Ab_1 \\ \hat{A}^2b_1 &= (A+BK_1)Ab_1 = A^2b_1 \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{A}^{h_1-1}b_1 &= (A+BK_1)A^{h_1-2}b_1 = A^{h_1-1}b_1 \\ \hat{A}^{h_1}b_1 &= (A+BK_1)A^{h_1-1}b_1 = A^{h_1}b_1 + b_2 = b_2 + \dots \\ \hat{A}^{h_1+1}b_1 &= (A+BK_1)(b_2 + \dots) = Ab_2 + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{A}^{n-1}b_1 &= (A+BK_1)(A^{h_p-2}b_p + \dots) = A^{h_p-1}b_p + \dots, \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove i puntini indicano termini che sono combinazioni lineari dei vettori che compaiono nelle precedenti equazioni. Di qui, tenendo presente la definizione della matrice Q ed il fatto che essa è non singolare, segue che i vettori:

$$b_1, \hat{A}b_1, \dots, \hat{A}^{n-1}b_1 \quad (1.12)$$

sono linearmente indipendenti e quindi la (1.10) ■

ESEMPIO 1.1. Si consideri la coppia raggiungibile (A, B) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si vuole determinare una matrice $K_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ tale che la coppia $(A + BK_1, b_1)$, dove b_1 è la prima colonna di B , sia raggiungibile. Si ha:

$$Q = (b_1 \quad Ab_1 \quad b_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$K_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per verifica,

$$\hat{A} = A + BK_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(b_1 \quad \hat{A}b_1 \quad \hat{A}^2 b_1) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

▲

Dal Lemma 1.1 segue l'importante corollario.

COROLLARIO 1.1 (Raggiungibilità con una arbitraria combinazione degli ingressi previa arbitraria reazione dello stato).

Data la terna $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\text{rango } B = r$,

(A, B) raggiungibile e $\text{rango } C = n$, allora per quasi tutte le matrici $K_0 \in \mathbb{R}^{r \cdot n}$ e per quasi tutti i vettori $f \in \mathbb{R}^r$ la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ è raggiungibile.

DIMOSTRAZIONE. Affinchè $(A+BK_0C, Bf)$ sia raggiungibile deve essere

$$\det(Bf (A+BK_0C)Bf \dots (A+BK_0C)^{n-1}Bf) \neq 0. \quad (1.13)$$

Essendo l'espressione al primo membro della (1.13) un polinomio negli $r \cdot n + r$ elementi di K_0 e f , il corollario sarà dimostrato se si fa vedere che tale polinomio non è identicamente nullo, ossia se tale polinomio è diverso da zero per almeno una scelta di K_0 e f . A tale scopo basta scegliere $f = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ e $K_0 = K_1 C^{-1}$, con K_1 determinata mediante la (1.6). Infatti, in tal caso, essendo $Bf = b_1$, ove b_1 è la prima colonna di B , ed $A+BK_0C = A+BK_1$, la (1.13) è soddisfatta per il Lemma 1.1 ■

Il Corollario 1.1 fornisce un procedimento molto semplice per la determinazione di un controllore di tipo (1.3) per trasformare il sistema (1.1), supposto raggiungibile e con $m = n$, in un altro sistema pur esso raggiungibile ma con un solo ingresso.

ESEMPIO 1.2. Si consideri il sistema descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x.$$

La coppia (A, B) è raggiungibile come si può facilmente verificare.

Si vuole determinare una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{2 \cdot 3}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^2$ tali che la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ sia ancora raggiungibile.

Per il Corollario 1.1 ciò può essere ottenuto dando agli elementi di K_0 ed f valori a caso. Per semplicità computazionale, si ponga:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si ha:

$$\det(Bf (A+BK_0 C)Bf (A+BK_0 C)^2 Bf) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0 \quad \blacktriangle$$

E' interessante esaminare se nel controllore (1.3) si può porre $K_0 = 0$. A ciò provvede il Lemma 1.2 ed il relativo Corollario 1.2.

LEMMA 1.2 (Riduzione esterna). Se la coppia (A, B) con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ è raggiungibile allora per quasi tutte le matrici $L \in \mathbb{R}^{r \times \rho}$, con $\rho \geq \nu_c$, dove ν_c è l'indice di ciclicità della matrice A , la coppia (A, BL) è ancora raggiungibile. Inoltre, se la coppia (A, BL) è raggiungibile allora $\rho \geq \nu_c$.

DIMOSTRAZIONE. Sia (A_J, B_J) la forma di Jordan della coppia (A, B) .

Si ricordi che l'indice di ciclicità ν_c di A è il massimo numero di blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore della matrice A_J ; inoltre la coppia (A, B) è raggiungibile se ciascun insieme costituito dalle righe di B_J corrispondenti alle ultime righe dei blocchi di Jordan relativi ad uno stesso autovalore è linearmente indipendente.

Siano ora $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A e

$$b_J^T(i,1), b_J^T(i,2), \dots, b_J^T(i, \nu_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (1.14)$$

le righe di B_J corrispondenti alle ultime righe dei blocchi di Jordan di A_J associati allo stesso autovalore λ_i ; sia inoltre L partizionata come segue:

$$L = (l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_p). \quad (1.15)$$

Facendo uso delle righe di $B_J L$ corrispondenti alle righe (1.14) si costruiscano le matrici:

$$S_i = \begin{bmatrix} b_J^T(i,1)l_1 & \dots & b_J^T(i,1)l_p \\ \dots & \dots & \dots \\ b_J^T(i,\nu_i)l_1 & \dots & b_J^T(i,\nu_i)l_p \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.16)$$

Si considerino quindi le seguenti funzioni:

$$p_i(L) = \det(S_i S_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (1.17)$$

che sono polinomi negli $r \cdot p$ elementi della matrice L . Ciascuno di tali polinomi non è identicamente nullo poichè $p \geq \nu_i$ ed i vettori (1.14) sono linearmente indipendenti a causa della raggiungibilità di (A, B) . Segue allora che anche il polinomio

$$p(L) = p_1(L) \cdot p_2(L) \cdot \dots \cdot p_k(L) \quad (1.18)$$

non è identicamente nullo. Quindi per quasi tutte le matrici L le righe di ogni matrice S_i sono linearmente indipendenti, ossia la coppia (A, BL) è raggiungibile. La prima parte del lemma resta così dimostrata.

Per dimostrare la seconda parte del lemma si noti che affinché (A, BL) sia raggiungibile $B_J L$ deve avere almeno ν_c righe linearmente indipendenti e ciò risulta possibile solo se $p \geq \nu_c$ ■

Dal Lemma 1.2 si ha il seguente corollario.

COROLLARIO 1.2 (Raggiungibilità con una arbitraria combinazione degli ingressi). Data la coppia (A, B) raggiungibile con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, se A è ciclica, ossia se $\nu_c = 1$, allora per quasi tutti i vettori $f \in \mathbb{R}^r$ la coppia (A, Bf) è raggiungibile.

ESEMPIO 1.3. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u.$$

Si verifica facilmente che tale sistema è raggiungibile; inoltre la matrice dinamica A è ciclica poichè i suoi autovalori sono distinti. Pertanto per quasi tutte le matrici $L_{2 \times \rho}$, con $\rho \geq 1$, il sistema considerato con $u = Lv$ è raggiungibile. Per

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ed } L = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si ottengono rispettivamente i sistemi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

che sono raggiungibili come si può facilmente verificare $\blacktriangle$

2.2 TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ASSEGNAZIONE DEI POLI

I risultati presentati nel paragrafo precedente consentono di stabilire il seguente fondamentale teorema.

TEOREMA 2.1 (Assegnamento completo dei poli). Dato il sistema

(1.1) con $\max(m, r) = n$, allora per ogni specificato insieme simmetrico di numeri complessi $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ esiste un controllore statico di tipo (1.2) tale che l'insieme dei poli del sistema risultante

$$\dot{x} = (A + BKC)x + BLv \quad (2.1a)$$

$$y = Cx \quad (2.1b)$$

coincide con Λ se e solo se il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile.

DIMOSTRAZIONE. (Necessarietà)-Si supponga che i poli del sistema (2.1) possano essere assegnati arbitrariamente mediante un'opportuna scelta della matrice K ; allora il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile. Infatti se il sistema (1.1) non fosse raggiungibile e/o osservabile, tenendo presente il Teorema 1.2.1 per $v = 0$, alcuni poli del sistema (2.1) non potrebbero essere modificati; ma ciò è assurdo poichè per ipotesi tutti i poli possono essere assegnati ad arbitrio.

(Sufficienza)- Si supponga ora che il sistema (1.1) sia raggiungibile ed osservabile con n uscite e/o ingressi indipendenti; allora per ogni specificato insieme simmetrico di numeri complessi $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ esiste una matrice $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ tale che $\text{spettro}(A + BKC) = \Lambda$. Per dimostrare ciò si supponga che $m = n$, ovvero che vi siano n uscite indipendenti, il che è lo stesso, che sia disponibile, a meno di una trasformazione lineare, lo stato del sistema.

Per il Corollario 1.1 si scelga a caso una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ in modo che la coppia $(\hat{A}, b)$, con

$$\hat{A} = A + BK_0 C, \quad b = Bf, \quad (2.2)$$

sia raggiungibile. Se la matrice A è ciclica, per esempio ha autovalli distinti, per il Corollario 1.2 si può scegliere $K_0 = 0$.

Sia

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.3)$$

il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ e si consideri la matrice non singolare

$$T = (b \hat{A} b \dots \hat{A}^{n-1} b) \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Si ha:

$$A_c = T^{-1} \hat{A} T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b_c = T^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Si scelga ora la matrice K del tipo:

$$K = K_0 + f k^T, \quad (2.6)$$

dove $k \in \mathbb{R}^n$; allora, ricordando che il polinomio caratteristico di una matrice è uguale a quello di una sua matrice simile, si ha:

$$|\lambda I - (A+BKC)| = |\lambda I - (\hat{A} + b k^T C)| = |\lambda I - (A_c + b_c k^T C T)| \quad (2.7)$$

Ma:

$$b_c k_{CT}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_n & h_{n-1} & \dots & h_1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

dove si è posto:

$$k_{CT}^T = (h_n \ h_{n-1} \ \dots \ h_1). \quad (2.9)$$

Quindi:

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \lambda^n + (a_1 - h_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n - h_n). \quad (2.10)$$

Se si vuole che lo spettro di $A+BKC$ sia Λ , il polinomio (2.10) dovrà essere:

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n \quad (2.11)$$

e quindi:

$$(a_n - h_n \ a_{n-1} - h_{n-1} \ \dots \ a_1 - h_1) = (d_n \ d_{n-1} \ \dots \ d_1). \quad (2.12)$$

Infine, tenendo presente la (2.4), (2.9) e la invertibilità della matrice C , si ottiene:

$$K = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cb & C\hat{A}b & \dots & C\hat{A}^{n-1}b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_n & - & d_n \\ a_{n-1} & - & d_{n-1} \\ . & . & . \\ a_2 & - & d_2 \\ a_1 & - & d_1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Se $r = n$, cioè se il sistema (1.1) ha n ingressi indipendenti, ed $m < n$, considerando la terna (A^T, C^T, B^T) , duale di quella (A, B, C) , e ripetendo la stessa procedura appena esposta, segue che lo spettro della matrice $A^T + C^T K^T B^T$ può essere assegnato arbitrariamente mediante opportuna scelta della matrice K^T . Ma:

$$\text{spettro}(A^T + C^T K^T B^T) = \text{spettro}(A + BKC) \quad (2.14)$$

e quindi la sufficienza.

La dimostrazione del teorema è così completa ■

Nella dimostrazione del Teorema 2.1 non è intervenuta la matrice L ; ciò deriva dal fatto che i poli del sistema non dipendono da L .

In pratica la matrice L va scelta in modo che il sistema (2.1) conservi la proprietà di raggiungibilità e si abbia una riduzione degli ingressi. A tal proposito vale il seguente risultato.

TEOREMA 2.2 (Raggiungibilità con $p \geq 1$ ingressi del sistema complessivo). Per quasi tutte le matrici $L \in \mathbb{R}^{r \times p}$, con $p \geq 1$, il sistema (2.1) con la matrice K determinata come nel Teorema 2.1 è raggiungibile.

Per dimostrare il Teorema 2.2 si richiede il seguente lemma.

LEMMA 2.1 (Invarianza della raggiungibilità e della osservabilità). Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (1.1) sia raggiungibile ed osservabile è che per tutte le matrici $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$

il sistema

$$\dot{x} = (A + BKC)x + Bv \quad (2.15a)$$

$$y = Cx \quad (2.15b)$$

sia raggiungibile ed osservabile.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che il sistema (1.1) sia raggiungibile; allora

$$\text{rango}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n. \quad (2.16)$$

D'altra parte per ogni K si ha:

$$\begin{aligned} B &= B \\ (A+BKC)B &= AB+B(KCB) = AB+\dots \\ (A+BKC)^2B &= (A+BKC)(AB+\dots) = A^2B+\dots \\ &\dots\dots\dots \\ (A+BKC)^{n-1}B &= (A+BKC)(A^{n-2}B+\dots) = A^{n-1}B+\dots, \end{aligned} \quad (2.17)$$

dove i puntini indicano termini che sono combinazioni lineari dei vettori colonna delle matrici che compaiono nelle precedenti equazioni. Pertanto

$$\begin{aligned} \text{rango}(B \ (A+BKC)B \ \dots \ (A+BKC)^{n-1}B) &= \text{rango}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = \\ &= n \end{aligned} \quad (2.18)$$

e cioè la raggiungibilità del sistema (2.15).

Inversamente, se il sistema (2.15) è raggiungibile per ogni K, lo è anche per $K = 0$, ossia lo è anche il sistema (1.1).

La dimostrazione relativa alla osservabilità segue in maniera analoga ■

Il Lemma 2.1 afferma che la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema (1.1) non può essere né "creata" né "distrutta" da un

controllore di tipo:

$$u = Ky + v. \quad (2.19)$$

Si può ora dare la dimostrazione del Teorema 2.2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.2. Poichè la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ (risp. $(A^T+C^TK_0^TB^T, C^Tf)$) è raggiungibile, per il Lemma 2.1, lo è anche la coppia $(A+B(K_0+fk^T)C, Bf)$ (risp. $(A^T+C^T(K_0^T+fk^T)B^T, C^Tf)$) per ogni $k \in \mathbb{R}^n$; quindi la matrice dinamica del sistema (2.1) è ciclica. D'altra parte, sempre per il Lemma 2.1, la coppia $(A+BKC, B)$ è raggiungibile. Pertanto, in base al Lemma 1.2, per quasi tutte le matrici $L \in \mathbb{R}^{r \times p}$, con $p \geq \nu_0 = 1$, il sistema (2.1) è raggiungibile. Il teorema resta così dimostrato ■

E' chiaro che se non si vuole una riduzione degli ingressi, volendo conservare la raggiungibilità, per semplicità realizzativa del controllore, in base al Lemma 2.1, si può scegliere $L = I$.

Dalla dimostrazione della sufficienza del Teorema 2.1 si ha il seguente algoritmo di progetto.

ALGORITMO 2.1 (Assegnamento completo dei poli mediante controllore statico).

PASSO 1. Si scelgano ad arbitrio una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ tali che la coppia $(\hat{A}, b)$, con $\hat{A} = A+BK_0C$ e $b = Bf$, sia raggiungibile. Se la matrice dinamica A è ciclica, ad esempio ha autovalli distinti, si può scegliere $K_0 = 0$.

PASSO 2. Si calcoli il polinomio caratteristico di $\hat{A}$

$$p(\lambda) = |\lambda I - \hat{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.20)$$

ed il polinomio

$$d(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n \quad (2.21)$$

avente per radici i poli desiderati.

PASSO 3. Si calcolino la n.n matrice F e gli n-vettori a, d come segue;

$$F = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^T \\ b^T A^T \\ . \\ . \\ b^T (\hat{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} C^T, \quad a = \begin{bmatrix} a_n \\ . \\ . \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_n \\ . \\ . \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

PASSO 4. Si calcoli l'n-vettore k risolvendo l'equazione

$$Fk = a - d. \quad (2.23)$$

PASSO 5. Il controllore che assegna i desiderati poli risulta:

$$u = (K_0 + fk^T)y + v. \quad (2.24)$$

OSSERVAZIONE. L'Algoritmo 2.1 è stato descritto per il caso $r \leq m = n$; per il caso $m < r = n$ si può usare lo stesso algoritmo applicato però alla terna (A^T, C^T, B^T) .

ESEMPIO 2.1. Si consideri il sistema in forma canonica di controllo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & . & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x$$

rappresentato schematicamente in Fig.2.1.

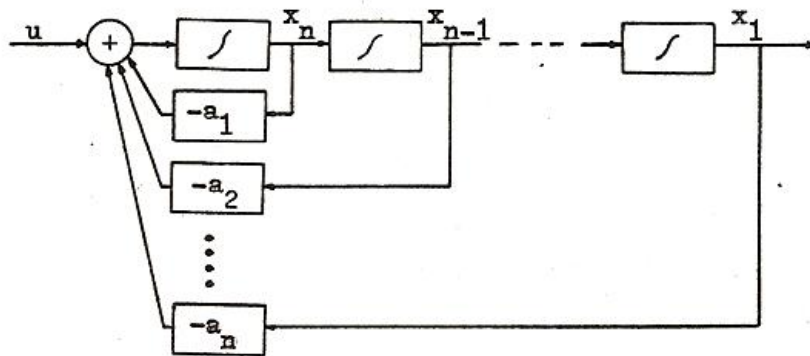


Fig. 2.1

Per tale sistema il teorema dell'assegnamento dei poli è banale. Infatti, se si pone

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n + v = k^T x + v$$

si ha:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k_1 - a_n & k_2 - a_{n-1} & \vdots & \dots & k_n - a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad y = x$$

da cui appare chiaro che il polinomio caratteristico della matrice dinamica può essere assegnato ad arbitrio mediante opportuna scelta del vettore k .

A tale conclusione si può pervenire anche osservando lo schema di Fig.2.2.

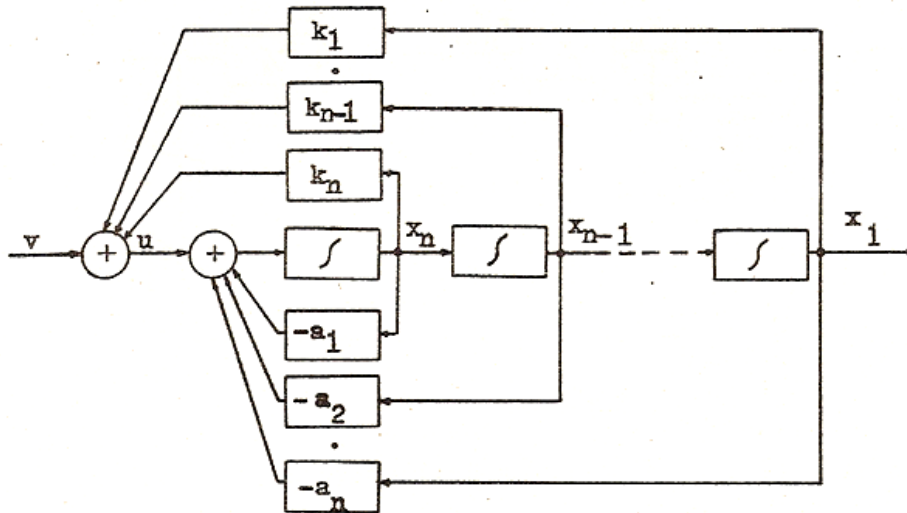


Fig.2.2

ESEMPIO 2.2. Dato il sistema raggiungibile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = x,$$

si vuole determinare un controllore di tipo statico, cioè del tipo

$$u = k^T x + v$$

tale che i poli del sistema complessivo siano in -1 , $-1-j$, $-1+j$.

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema è:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda.$$

Per assegnare i desiderati poli il polinomio caratteristico

della matrice dinamica del sistema complessivo dovrà essere:

$$d(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+1+j)(\lambda+1-j) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

Applicando la (2.13) si ha:

$$k = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-4 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il controllore risulta:

$$u = 2x_1 - 5x_2 - 5x_3 + v$$

mentre il sistema complessivo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} v, \quad y = x.$$

Per verifica,

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda+4 & 5 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2 \quad \blacktriangle$$

ESEMPIO 2.3. Dato il sistema raggiungibile con 4 uscite indipendenti

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia un solo ingresso e tutti i poli in -1.

E' facile constatare che la matrice dinamica del sistema dato non è ciclica. Si ponga pertanto

$$K = K_0 + f k^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} k^T,$$

in cui gli elementi di K_0 ed f sono stati scelti, per semplicità computazionale, tra i numeri 0 ed 1 in maniera casuale.

Si ha:

$$\hat{A} = A + B K_0 C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = B f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{rango}(b \quad \hat{A}b \quad \dots \quad \hat{A}^3b) = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 8 & 22 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = 4;$$

quindi la coppia $(\hat{A}, b)$ è raggiungibile.

Il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ risulta:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

mentre quello della matrice dinamica del sistema complessivo dovrà essere:

$$d(\lambda) = (\lambda+1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Applicando la (2.13) si ha:

$$k = \left[\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 12 & 30 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T \right]^{-1} \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-4 \\ 3-6 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -21 \\ -205 \\ 306 \\ -90 \end{pmatrix}.$$

In definitiva, scegliendo

$$L = f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il controllore che assegna i desiderati poli e riduce il sistema complessivo ad un solo ingresso è:

$$u = (K_o + f k^T) y + L v = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -21 & -192 & 306 & -77 \\ -21 & -205 & 319 & -90 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

mentre il sistema complessivo risulta:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -77/13 & -21/13 & -179/13 & 114/13 \\ -90/13 & -21/13 & -205/13 & 127/13 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}.$$

Per verifica,

$$|\lambda I - (A + BKC)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & -1 \\ 77/13 & 21/13 & \lambda + 179/13 & -114/13 \\ 90/13 & 21/13 & 205/13 & \lambda - 127/13 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

e

$$\text{rango}(BL (A+BKC)BL \dots (A+BKC)^3BL) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 2 & -11 & 32 \\ 1 & -5 & 13 & -302/13 \\ 1 & -6 & 17 & -365/13 \end{pmatrix} = 4 \triangle$$

ESEMPIO 2.4. Dato il sistema osservabile con 3 ingressi indipendenti

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia due ingressi ed i poli in -3 , $-3-j$, $-3+j$.

Si consideri il sistema duale

$$\dot{x}_d = A^T x_d + C^T u_d, \quad y_d = B^T x_d,$$

ovvero

$$\dot{x}_d = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x_d + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_d, \quad y_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_d$$

Essendo la matrice dinamica di tale sistema ciclica (gli autovalori sono distinti, come si può facilmente verificare), si ponga

$$K^T = f k^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} k^T.$$

Si ha:

$$\text{rango}(C^T f \ A^T C^T f \ (A^T)^2 C^T f) = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

quindi la coppia $(A^T, C^T f)$ è raggiungibile.

Il polinomio caratteristico di A^T è:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda + 1) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

mentre quello della matrice dinamica del sistema complessivo dovrà essere:

$$d(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 3 - j)(\lambda + 3 + j) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 28\lambda + 30.$$

Applicando la (2.13) si ha:

$$k = \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1-30 \\ 2-28 \\ 2-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -16 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Infine, scegliendo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

il controllore risulta:

$$u = k f^T y + L v = \begin{bmatrix} 19 & 19 \\ -16 & -16 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

mentre il sistema complessivo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 19 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Per verifica,

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \begin{vmatrix} \lambda & -20 & -19 \\ 1 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & 10 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 28\lambda + 30$$

$$\text{rango}(BL (A+BKC)BL (A+BKC)^2 BL) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 & 19 & -170 & -149 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -48 & -46 \\ 0 & 1 & -10 & -11 & 100 & 91 \end{bmatrix} = 3 \blacktriangle$$

2.3 STABILIZZAZIONE

Un problema strettamente legato a quello dell'assegnamento dei poli è quello della stabilizzazione. Se il sistema (1.1) non è asintoticamente stabile ma è raggiungibile ed osservabile con n uscite e/o n ingressi indipendenti, dal Teorema 2.1 segue banalmente che mediante un controllore statico è possibile rendere asintoticamente stabile il sistema complessivo, cioè il sistema costituito dal sistema originario con in retroazione il controllore. Se invece tale sistema non è raggiungibile e/o non osservabile vale il seguente risultato.

TEOREMA 3.1 (Stabilizzazione). Sia

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} & A_{ad} \\ 0 & A_{bb} & 0 & A_{bd} \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.1a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_b & 0 & c_d \end{bmatrix} \xi \quad (3.1b)$$

la forma canonica di Kalman del sistema (1.1) e si supponga che $\max(\text{rango } B_b, \text{rango } C_b) = n_b$, dove n_b è la dimensione della parte raggiungibile ed osservabile del sistema. Allora il sistema (1.1) può essere reso asintoticamente stabile con un controllore statico descritto da:

$$u = Ky + Lv \quad (3.2)$$

se e solo se le parti raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile ed osservabile sono asintoticamente stabili.

DIMOSTRAZIONE. La matrice dinamica del sistema complessivo, composto dal sistema (1.1) e dal controllore (3.2), nelle base di Kalman risulta:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} + B_a K C_b & A_{ac} & A_{ad} + B_a K C_d \\ 0 & A_{bb} + B_b K C_b & 0 & A_{bd} + B_b K C_d \\ 0 & 0 & A_{cc} & A_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Dalla (3.3) appare chiaro che i poli delle parti raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile e non osservabile, non raggiungibile ed osservabile, coincidenti con gli autovalori di A_{aa} , A_{cc} , A_{dd} , rispettivamente, non possono essere modificati da un controllore di tipo (3.2) mentre, in base al Teorema 2.1, quelli della parte

raggiungibile ed osservabile, coincidenti con gli autovalori di $A_{bb} + B_b K C_b$, possono essere modificati arbitrariamente.

Poichè i poli del sistema risultante coincidono con gli autovalori di A_{aa} , $A_{bb} + B_b K C_b$, A_{cc} , A_{dd} , segue immediatamente che il sistema (1.1) è stabilizzabile asintoticamente se e solo se gli autovalori di A_{aa} , A_{cc} , A_{dd} sono tutti a parte reale negativa. Il teorema resta così dimostrato ■

ESEMPIO 3.1. Si consideri il sistema descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \ 0 \ 0 \ -1).$$

Il polinomio caratteristico della matrice dinamica di tale sistema risulta:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \lambda-2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$$

da cui segue immediatamente che il sistema in considerazione non è asintoticamente stabile.

Inoltre:

$$\text{rango}(B \ AB \ A^2 B) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

e

$$\text{rango}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^3 C^T) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 3;$$

quindi il sistema dato non è nè raggiungibile nè osservabile.

Per ottenere la forma canonica di Kalman si effettui il cambiamento di base:

$$\xi = T^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Si ha:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \xi$$

da cui:

$$A_{aa} = -1, \quad A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{dd} = -2; \quad B_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_b = (1 \ 0)$$

mentre la parte non raggiungibile e non osservabile manca.

Poichè gli autovalori di A_{aa} ed A_{dd} sono reali negativi e $\max(\text{rango} B_b, \text{rango} C_b) = n_b = 2$, il sistema è stabilizzabile asintoticamente.

Se si vuole che i poli della parte raggiungibile ed osservabile siano in $-1+j$, $-1-j$, applicando la (2.13) si ha:

$$K = k = \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pertanto un controllore che stabilizza asintoticamente il sistema è:

$$u = - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} y + v.$$

Il sistema complessivo risulta:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 & 9 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ -11 & 1 & 2 & 11 \\ -6 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \quad y = (1 \ 0 \ 0 \ -1).$$

Per verifica, è facile constatare che le radici del polinomio

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \begin{vmatrix} \lambda+10 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & \lambda+2 & -1 & -2 \\ 11 & -1 & \lambda-2 & -11 \\ 6 & 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 10\lambda^2 + 10\lambda + 4$$

sono tutte a parte reale negativa ▲

2.4 ESERCIZI

4.1 - Dato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dimostrare che se esso è raggiungibile ed osservabile allora $\nu_c \leq \min(m, r)$, dove ν_c è l'indice di ciclicità della matrice dinamica A .

4.2 - Data la terna $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con (A, B) raggiungibile, seguendo il Corollario 1.1, scrivere un sottoprogramma al

calcolatore per determinare una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{r \cdot n}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ tali che la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ sia raggiungibile.

4.3 - Mostrare che il teorema dell'assegnamento completo dei poli è banale nel caso di sistema con una sola uscita e con n ingressi indipendenti, dove n è la dimensione del sistema.

4.4 - Dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u, \quad y = x,$$

si determini un controllore di tipo $u = Ky + v$ tale che il sistema complessivo abbia i poli in $-3, -2, -2+j, -2-j$.

Si descriva inoltre un metodo per l'individuazione di tutti i controllori, sempre di tipo $u = Ky + v$, che assegnino al sistema complessivo i suddetti poli.

4.5 - Tenendo presente l'Algoritmo 2.1, scrivere un sottoprogramma al calcolatore per risolvere il problema dell'assegnamento completo dei poli.

4.6 - Sia dato il sistema raggiungibile ed osservabile $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, con $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \cdot r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$, $\text{rango} B = r$, $\text{rango} C = m$.

Dimostrare che, se tale sistema è asintoticamente stabile ed $r \geq m$, allora per quasi tutte le matrici B esiste un controllore di tipo $u = Lv$, con $L \in \mathbb{R}^{r \cdot m}$, tale che il sistema risultante sia ancora raggiungibile e disaccoppiato staticamente (cioè $W(0) = C(-A)^{-1}BL$ sia diagonale).

4.7 - Dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = x,$$

si progettino almeno due controllori di tipo $u = Ky + v$ tali che il sistema complessivo abbia i poli in -1 , $-1+j$, $-1-j$. Studiarne quindi il comportamento dinamico mediante simulazione al calcolatore.

4.8 - Dato il sistema raggiungibile ed osservabile $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, in cui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dimostrare che, se $\max(\text{rango } B, \text{rango } C) = n$, allora il controllore $u = Ky$ che minimizza l'indice di qualità quadratico $\int_0^\infty (u^T P u + y^T Q y) dt$, dove P e Q sono matrici simmetriche definite positive, rende il sistema complessivo asintoticamente stabile.

2.5 BIBLIOGRAFIA

Il Lemma 1.1 è dovuto ad Heymann [5]. Il Corollario 1.1 è dovuto a Davison e Wang [7]; la dimostrazione qui riportata è dell'autore. Il Lemma 1.2 è dovuto ad Heymann [6]; la dimostrazione qui riportata è di Balestrino e Celentano [8]. Il Teorema 1.1, nel caso di un solo ingresso, è dovuto a Kalman [1], mentre nel caso di più ingressi e più uscite, per A , B , C complesse a Langenhop [2] e Popov [3], per A , B , C reali a Wonham [4]. La dimostrazione qui riportata segue sostanzialmente quella di Wonham [4] con le modifiche apportate da Heymann [5]. Il Lemma 2.1 è stato notato indipendentemente da diversi autori.

- [1] R.E. KALMAN, Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), Vol. 49, pp. 201-205, 1963.
- [2] C.E. LANGENHOP, On the Stabilization of Linear Systems, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 15, pp. 735-742, 1964.
- [3] V.M. POPOV, Hyperstability and Optimality of Automatic Systems with Several Control Functions, Rev. Roum. Sci. Electrotech. et Energ., pp. 629-690, 1964.
- [4] W.M. WONHAM, On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-12, pp. 660-665, 1967.
- [5] M. HEYMANN, Pole Assignment in Multi-Input Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-13, pp. 748-749, 1968.
- [6] M. HEYMANN, On the Input and Output Reducibility of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-15, pp. 563-569, 1970.
- [7] E.J. DAVISON e S.H. WANG, Properties of Linear Time-Invariant Multivariable Systems Subject to Arbitrary Output and State Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-18, pp. 24-32, 1973.
- [8] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, On the Structural Properties and on the Input and Output Reducibility of Multivariable Linear Systems, Ricerche di Automatica, Vol. 7, Nos. 2-3, pp. 199-203, 1976.

CAPITOLO III

ASSEGNAIMENTO INCOMPLETO DEI POLI MEDIANTE CONTROLLORE STATICO

3.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

Si consideri il sistema lineare, stazionario e di dimensioni finite:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx, \quad (1.1b)$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rango } B = r$, $\text{rango } C = m$.

Nel capitolo precedente si è visto che mediante un controllore statico del tipo:

$$u = Ky + Lv, \quad (1.2)$$

in cui $K \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ed $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, è possibile assegnare al sistema complessivo un'arbitraria configurazione di poli nell'ipotesi che il sistema (1.1) sia raggiungibile ed abbia n uscite indipendenti ($m = n$), ovvero sia osservabile ed abbia n ingressi indipendenti ($r = n$).

Spesso il numero degli ingressi e delle uscite indipendenti è minore dell'ordine del sistema. Pertanto è di notevole interesse vedere cosa si può dire, in generale, sull'assegnamento dei poli quando $\max(m, r) < n$, usando sempre controllori statici.

Sia

$$\dot{x} = (A+BKC)x + BLv \quad (1.3a)$$

$$y = Cx \quad (1.3b)$$

il sistema complessivo ottenuto collegando il controllore (1.2) al sistema (1.1) come in Fig.1.1.

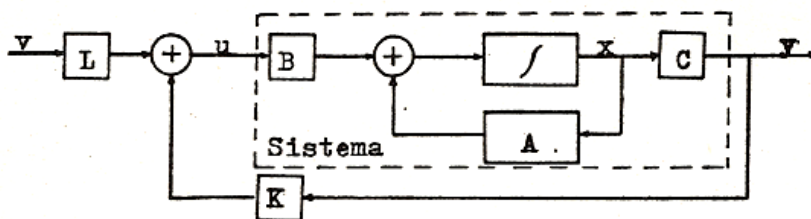


Fig.1.1

Un primo risultato è fornito dal seguente teorema.

TEOREMA 1.1 (Condizione necessaria per l'assegnabilità dei poli). Condizione necessaria perchè i poli del sistema (1.1) siano assegnabili ad arbitrio mediante un controllore di tipo (1.2) è che esso sia raggiungibile, osservabile ed $m.r \geq n$.

DIMOSTRAZIONE. Che il sistema (1.1) debba essere raggiungibile ed osservabile segue direttamente dal Teorema 1.2.1 per $V = 0$.

Per dimostrare la rimanente parte del teorema si noti che gli n coefficienti del polinomio caratteristico di $A+BKC$ sono funzioni polinomiali degli $r.m$ elementi di K ; d'altra parte, tali coefficienti devono essere assegnabili ad arbitrio se si vuole che siano assegnabili ad arbitrio i poli del sistema complessivo (1.3). Pertanto deve risultare $m.r \geq n$. Il teorema resta così dimostrato ■

ESEMPIO 1.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Se si pone:

$$u = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} y + v,$$

il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema complessivo diventa:

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \lambda^4 - \lambda^2(k_{11}+k_{22}+2) + (k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}+k_{11}+k_{22}-k_{12}-k_{21})$$

da cui risulta chiaro che possono essere assegnati ad arbitrio solo due poli ▲

L'Esempio 1.1 mostra che la condizione $m.r \geq n$ non sempre è sufficiente per risolvere il problema dell'assegnamento completo dei poli. D'altra parte, anche quando tale condizione è sufficiente, per assegnare i desiderati poli si deve risolvere un sistema non lineare di n equazioni. In pratica, la risoluzione di tale sistema presenta notevoli difficoltà risultando non agevole la sua stessa scrittura.

Se invece si opera opportunamente con matrici K di rango unitario, detto sistema diventa lineare e di facile scrittura.

Così facendo, i risultati fondamentali che si ottengono assicurano che, in generale, è possibile assegnare ad arbitrio solo un limitato numero di poli.

Per presentare tali risultati fondamentali si richiedono alcuni preliminari.

- Sia M una matrice reale di dimensioni $n.m$ ed i un intero non negativo; con $S_i(M)$ si denota la matrice di dimensioni $(n+i-1).(m.i)$:

$$S_i(M) = \left[\begin{array}{cccc} \boxed{M} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & \boxed{M} & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \boxed{M} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} n+i-1 \quad (1.4)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m.i}$

- Sia

$$p(\lambda) = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n \quad (1.5)$$

un polinomio in λ di grado al più n .

Se si pone:

$$v_n(\lambda) = (1 \ \lambda \ \dots \ \lambda^n)^T \quad (1.6)$$

$$p = (p_n \ p_{n-1} \ \dots \ p_0)^T, \quad (1.7)$$

allora il polinomio (1.5) può essere scritto nella forma:

$$p(\lambda) = v_n^T(\lambda) p. \quad (1.8)$$

- Siano

$$p(\lambda) = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = v_n^T(\lambda) p \quad (1.9)$$

$$e \quad q(\lambda) = q_0 \lambda^m + q_1 \lambda^{m-1} + \dots + q_m = v_m^T(\lambda) q \quad (1.10)$$

due polinomi al più di grado n ed m , rispettivamente, ed

$$r(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = r_0 \lambda^{n+m} + r_1 \lambda^{n+m-1} + \dots + r_{n+m} = v_{n+m}^T(\lambda) r. \quad (1.11)$$

E' facile constatare che:

$$\begin{pmatrix} r_{n+m} \\ r_{n+m-1} \\ \vdots \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & 0 & \dots & 0 \\ p_{n-1} & p_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_0 & p_1 & \dots & \vdots \\ 0 & p_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & p_1 \\ 0 & 0 & \dots & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ q_{m-1} \\ \vdots \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

ovvero, con le notazioni introdotte:

$$r = S_{m+1}(p)q. \quad (1.13)$$

ESEMPIO 1.2. Si considerino i polinomi:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda + 5 = v_2^T(\lambda)p \\ q(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 1 = v_3^T(\lambda)q. \end{aligned}$$

Si ha:

$$S_4(p)q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ 18 \\ 13 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto:

$$r(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 13\lambda^3 + 18\lambda^2 + 32\lambda + 5 \triangle$$

LEMMA 1.1 (I rami del luogo delle radici sono curve semplici).

Si consideri la terna (A, b, c^T) con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b, c \in \mathbb{R}^n$. Se A è ciclica, (A, b) raggiungibile ed (A, c^T) osservabile allora

$$\text{spettro}(A+bk_1c^T) \cap \text{spettro}(A+bk_2c^T) = \emptyset, \quad \forall k_1 \neq k_2. \quad (1.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Si osservi prima che

$$|\lambda I - (A+bkc^T)| = p(\lambda) - kq(\lambda), \quad (1.15)$$

dove:

$$p(\lambda) = |\lambda I - A|, \quad q(\lambda) = c^T \text{Agg}(\lambda I - A)b. \quad (1.16)$$

Si supponga ora per assurdo che esiste almeno una coppia (k_1, k_2) con $k_1 \neq k_2$ tale che

$$\text{spettro}(A+bk_1c^T) \cap \text{spettro}(A+bk_2c^T) = \Lambda \neq \emptyset; \quad (1.17)$$

allora per ogni $\hat{\lambda} \in \Lambda$ si ha:

$$p(\hat{\lambda}) - k_1q(\hat{\lambda}) = p(\hat{\lambda}) - k_2q(\hat{\lambda}) = 0 \quad (1.18)$$

da cui, poichè $k_1 \neq k_2$,

$$p(\hat{\lambda}) = q(\hat{\lambda}) = 0. \quad (1.19)$$

D'altra parte, essendo A ciclica, (A, b) raggiungibile ed (A, c^T) osservabile, i polinomi $p(\lambda)$ e $q(\lambda)$ sono primi fra loro. Pertanto la (1.19) è falsa ed il lemma resta dimostrato ■

LEMMA 1.2 (Esiste una K tale che $A+BKC$ è ciclica). Sia il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile. Allora esiste un controllore di tipo (1.2) tale che il sistema complessivo (1.3) è ciclico, cioè la matrice dinamica $A+BKC$ è ciclica.

DIMOSTRAZIONE. Se $\max(m, r) = n$ la dimostrazione segue facilmente dal Lemma 2.1.1. Si consideri quindi il caso più generale in

cui $\max(m, r) \leq n$.

Detto ν_c l'indice di ciclicità di A, per il Lemma 2.1.2 esiste una matrice $L_1 \in R^{r \times \nu_c}$ tale che la coppia (A, BL_1) è raggiungibile.

Sia

$$p(\lambda) = \lambda^1 + a_1 \lambda^{1-1} + \dots + a_1 \quad (1.20)$$

il polinomio minimo del primo vettore colonna b_1 di BL_1 rispetto ad A e si consideri il cambiamento di variabile:

$$\xi = T^{-1}x = (T_1 D)^{-1}x, \quad (1.21)$$

dove $T_1 \in R^{n \times 1}$ è la matrice di rango 1 data da:

$$T_1 = (b_1 \quad Ab_1 \quad \dots \quad A^{1-1}b_1) \begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{1-2} & a_{1-3} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_1 & 1 & \dots & . & . \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

e $D \in R^{n \times (n-1)}$ è tale che la matrice $(T_1 D)$ è non singolare.

Il sistema (1.1) con tale cambiamento di variabile e con $u = L_1 v$ diventa:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} v \quad (1.23a)$$

$$y = (C_1 \ C_2) \xi, \quad (1.23b)$$

dove:

$$\begin{aligned} A_2 &\in R^{(n-1) \times (n-1)}, A_3 \in R^{1 \times (n-1)}, B_1 \in R^{1 \times (\nu_c-1)}, B_2 \in R^{(n-1) \times (\nu_c-1)} \\ C_1 &\in R^{m \times 1}, C_2 \in R^{m \times (n-1)}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_{1-1} & \cdot & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Dalla raggiungibilità ed osservabilità del sistema (1.1) si ha che la coppia (A_2, B_2) è raggiungibile e la coppia (A_1, C_1) è osservabile; inoltre l'indice di ciclicità di A_2 è pari a $\nu_c - 1$. Infatti, tenendo presente che la raggiungibilità è invariante rispetto ad un cambiamento di base, si ha:

$$\begin{aligned} & \text{rango} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & B_1 & \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & B_1 \end{bmatrix} \\ 0 & B_2 & \begin{bmatrix} 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & B_1 \end{bmatrix} \\ & = \text{rango} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & B_1 & ? & ? & \dots & ? & ? & ? \\ 0 & B_2 & 0 & A_2 B_2 & \dots & 0 & A_2^{n-1-1} B_2 & ? \end{bmatrix} = n, \end{aligned} \quad (1.26)$$

dove i punti interrogativi indicano termini che non interessano ai fini di ciò che si vuol dimostrare. Di qui segue che le $n-1$ righe

$$0 \ B_2 \ 0 \ A_2 B_2 \ \dots \ 0 \ A_2^{n-1-1} B_2 \ ? \quad (1.27)$$

sono linearmente indipendenti e quindi la raggiungibilità della coppia (A_2, B_2) . In modo del tutto analogo si dimostra l'osservabilità della coppia (A_1, C_1) .

Per dimostrare che l'indice di ciclicità ν_{1c} di A_2 è pari a $\nu_c - 1$ si noti che poichè la coppia (A_2, B_2) è raggiungibile e B_2 ha $\nu_c - 1$ colonne, per cui, per il Lemma 2.1.2, dovrà essere $\nu_{1c} \leq \nu_c - 1$. D'altra parte, poichè A_1 è ciclica e la matrice

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

ha indice di ciclicità pari a ν_c dovrà pure essere $\nu_{1c} \geq \nu_c - 1$; quindi $\nu_{1c} = \nu_c - 1$.

Poichè la coppia (A_1, C_1) è osservabile ed A_1 è ciclica, per il Lemma 2.1.2 esiste un vettore $h_1 \in \mathbb{R}^m$ tale che la coppia $(A_1, h_1^T C_1)$ è osservabile.

Si mostrerà ora che scegliendo

$$K = L_1 \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} h_1^T \quad (1.29)$$

l'indice di ciclicità della matrice $A+BKC$ per quasi tutti i valori di k_1 è pari a $\nu_c - 1$. Infatti, con tale scelta di K la matrice $A+BKC$, a meno di una trasformazione di similitudine, è data da:

$$\hat{A}_r = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_3 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

dove:

$$\hat{A}_1 = A_1 + \hat{b}_1 k_1 h_1^T C_1, \quad \hat{A}_2 = A_2, \quad \hat{A}_3 = A_3 + \hat{b}_1 k_1 h_1^T C_2. \quad (1.31)$$

Dal Lemma 1.1 segue che per quasi tutti i valori di k_1 la matrice $\hat{A}_1$ ha spettro disgiunto da quello di $\hat{A}_2$. Per ognuno di tali valori di k_1 si considerino due matrici non singolari T_1, T_2 tali che $T_1^{-1} \hat{A}_1 T_1 = J_1$ e $T_2^{-1} \hat{A}_2 T_2 = J_2$ siano in forma di Jordan. Allora

$$T^{-1} \hat{A}_r T = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

dove:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & -T_1^{-1} T_3 T_2^{-1} \\ 0 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

con T_3 soluzione dell'equazione matriciale

$$\hat{A}_1 T_3 - T_3 J_2 = - \hat{A}_3 T_2 \quad (^{\circ}). \quad (1.34)$$

Poichè l'indice di ciclicità di $\hat{A}_2$ è pari a $\nu_c - 1$ segue che il massimo numero di blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore di J_2 è pari a $\nu_c - 1$. Pertanto, essendo lo spettro di J_1 disgiunto da quello di J_2 , si ha che il massimo numero di blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore della matrice (1.32) è $\nu_c - 1$, ovvero l'indice di ciclicità di $\hat{A}_r$ è pari a $\nu_c - 1$.

Applicando $\nu_c - 1$ volte il procedimento di cui sopra si ha che la matrice K che rende ciclica $A+BKC$ è data da:

$$K = \sum_{i=1}^{\nu_c-1} L_1 \begin{bmatrix} k_i \\ 0 \end{bmatrix} h_i^T. \quad (1.35)$$

Il lemma resta così dimostrato ■

Il Lemma 1.2 è suscettibile della seguente generalizzazione la quale fornisce anche un procedimento molto semplice per la determinazione della matrice K .

LEMMA 1.3 (Per quasi tutte le matrici K $A+BKC$ è ciclica). Sia il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile. Allora per quasi tutte le matrici K la matrice $A+BKC$ è ciclica.

DIMOSTRAZIONE. Perchè la matrice $A_r = A+BKC$ sia ciclica, il suo polinomio minimo deve coincidere con quello caratteristico, ovvero le n matrici

$$I, A_r, A_r^2, \dots, A_r^{n-1} \quad (1.36)$$

(^o) - Si noti che l'equazione (1.34) ha un'unica soluzione T_3 dal momento che $\hat{A}_1$ e J_2 non hanno autovalori comuni (si veda il Cap. IV).

devono essere linearmente indipendenti. Detti $v_i \in R^{n^2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, il vettore ottenuto dalle colonne della matrice A_r^{1-1} ponendole ordinatamente una sotto l'altra, allora $A+BKC$ è ciclica se e solo se la matrice

$$V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \quad (1.37)$$

ha rango n , ovvero se e solo se

$$\det V^T V \neq 0. \quad (1.38)$$

Essendo l'espressione a primo membro della (1.38) un polinomio negli r.m. elementi di K la dimostrazione segue dal fatto che, per il Lemma 1.2, tale polinomio non è identicamente nullo ■

ESEMPIO 1.3. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Si constata facilmente che l'indice di ciclicità della matrice dinamica di tale sistema è pari a 2.

Si vuole determinare una matrice $K \in R^{2 \times 2}$ tale che la nuova matrice dinamica $A_r = A+BKC$ sia ciclica.

Se si sceglie, a caso,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

la matrice A_r risulta:

$$A_r = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è ciclica dal momento che

$$\text{rango } V = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \blacktriangle$$

E' possibile ora dare il seguente fondamentale lemma che costituisce una generalizzazione del Corollario 2.1.1.

LEMMA 1.4 (Raggiungibilità con una arbitraria combinazione degli ingressi). Sia il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile. Allora per quasi tutte le matrici $K_0 \in R^{r \cdot m}$ e per quasi tutti i vettori $f \in R^r$ la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ è raggiungibile.

DIMOSTRAZIONE. In base al Lemma 1.3, per quasi tutte le matrici K_0 $A+BK_0C$ è ciclica. D'altra parte, per il Corollario 2.1.2, se $A+BK_0C$ è ciclica, per quasi tutti i vettori f la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ è raggiungibile. Pertanto per quasi tutte le matrici K_0 e per quasi tutti i vettori f la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ è raggiungibile ■

ESEMPIO 1.3. Sia dato il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Tale sistema non è ciclico, essendo $\gamma_c = 2$ come si può facilmente constatare. Si vuole determinare un controllore di tipo (1.2) per cui il sistema risultante sia raggiungibile con un solo ingresso.

Se si sceglie, a caso,

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

il sistema risultante diventa:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Tale sistema è raggiungibile dal momento che la sua matrice di raggiungibilità

$$Q_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 & -12 \\ 1 & -1 & 3 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$$

è di pieno rango Δ .

LEMMA 1.5 (Mediante riduzione degli ingressi, $r-1$ modi prefissati possono essere resi non raggiungibili). Se la matrice dinamica del sistema (1.1) ha $l = n+1-r$ autovalori simmetrici λ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, con molteplicità geometrica unitaria, allora per quasi tutte le matrici B esiste un vettore $b \in \mathbb{R}(B)$ tale che il polinomio monico

$$p_1(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i) = \lambda^l + \alpha_1 \lambda^{l-1} + \dots + \alpha_l \quad (1.39)$$

è il polinomio minimo di b rispetto ad A .

DIMOSTRAZIONE. Il lemma resta dimostrato se per quasi tutte le matrici B si può determinare un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ tale che:

$$p_1(A)Bf = 0 \quad (1.40a)$$

$$\text{rango}(Bf \ ABf \ \dots \ A^{l-1}Bf) = l. \quad (1.40b)$$

Dal momento che gli autovalori di $p_1(A)$ sono $p_1(\lambda_i)$, dove λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sono gli autovalori di A , segue che $p_1(A)$ ha un autovalore nullo con molteplicità geometrica 1; allora $\dim \mathcal{N}(p_1(A)) = 1$ e $\text{rangop}_1(A) = n - \dim \mathcal{N}(p_1(A)) = r-1$. Quindi, $\text{rango } p_1(A)B \neq \text{rangop}_1(A) = r-1$ per cui un vettore $\hat{f} \neq 0$ che soddisfa la (1.40a) esiste.

Ora, per quasi tutte le matrici B , la (1.40b) è soddisfatta per $f = \hat{f}$. Invero, se per assurdo ciò non fosse vero allora il polinomio minimo $p_{\hat{f}}(\lambda)$ di Bf rispetto ad A avrebbe grado $\hat{l} < l$. Dal momento che $p_{\hat{f}}(\lambda)$ è un divisore di $p_1(\lambda)$ e gli autovalori λ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, hanno molteplicità geometrica unitaria, con ragionamento analogo a quello precedente, si avrebbe $\text{rangop}_{\hat{f}}(A) \geq r$. Da ciò seguirebbe che $\dim \mathcal{R}(B) + \dim \mathcal{N}(p_{\hat{f}}(A)) \leq n$, e perciò, per quasi tutte le matrici B ,

$$\dim(\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(p_{\hat{f}}(A))) = 0. \quad (1.41)$$

La (1.41) implicherebbe che $\text{rangop}_{\hat{f}}(A)B = r$, per quasi tutte le matrici B , e quindi $\hat{f} = 0$ contro l'ipotesi. Il lemma resta così dimostrato ■

ESEMPIO 1.4. Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u.$$

Gli autovalori della matrice dinamica sono -2, -1, 0.

Si vuole individuare una trasformazione degli ingressi

$$u = fv,$$

con $f \in R^2$ tale che siano eccitabili solo i modi corrispondenti agli autovalori $-1, 0$.

Essendo

$$p_1(\lambda) = (\lambda+1)\lambda = \lambda^2 + \lambda,$$

l'equazione (1.40a) diventa

$$p_1(A)Bf = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} f = 0$$

da cui

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, essendo

$$\text{rango}(Bf \ ABf) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

1a (1.40b) è soddisfatta Δ

3.2 PRIMO RISULTATO FONDAMENTALE SULL'ASSEGNAZIONE INCOMPLETO DEI POLI

Nel paragrafo precedente si è messo in luce come il problema dell'assegnamento dei poli, nel caso in cui il massimo tra il numero degli ingressi e quello delle uscite indipendenti è minore dell'ordine del sistema, presenti in generale notevoli difficoltà. Restringendo l'analisi a matrici K con struttura particolare è possibile ricavare dei risultati restrittivi ma di semplice applicazione, come risulta dal seguente teorema.

TEOREMA 2.1 (Assegnamento incompleto dei poli). Se il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile allora è possibile progettare un controllore statico di tipo (1.2) tale che il sistema complessivo (1.3) abbia $\nu = \max(m, r)$ poli arbitrariamente vicini (ma non necessariamente eguali) a ν prefissati valori simmetrici.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $r \leq m$. Essendo il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile, per il Lemma 1.4 si scelga a caso una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$ ed un vettore $f \in R^r$ tali che la coppia $(\hat{A}, b)$, con

$$\hat{A} = A + BK_0 C, \quad b = Bf, \quad (2.1)$$

sia raggiungibile. Se la matrice A è ciclica si può scegliere $K_0 = 0$.

Sia

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = \lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda) a \quad (2.2)$$

il polinomio caratteristico di $\hat{A}$ e si consideri la matrice non singolare

$$T = (b \ \hat{A}b \ \dots \ \hat{A}^{n-1}b) \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Si scelga quindi la matrice K del tipo

$$K = K_0 + f k^T, \quad (2.4)$$

con $k \in R^m$. Procedendo in modo del tutto analogo alla dimostrazione della sufficienza del Teorema 2.2.1 ed indicando con

$$p_k(\lambda) = \lambda^n + a_{1k} \lambda^{n-1} + \dots + a_{nk} = \lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda) a_k \quad (2.5)$$

il polinomio caratteristico della matrice $A+BKC$, si ha:

$$k^T C^T = (a_n - a_{nk} \quad a_{n-1} - a_{n-1k} \quad \dots \quad a_1 - a_{1k}) = a^T - a_k^T. \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) mostra che il vettore dei coefficienti del polinomio $p_k(\lambda)$, al variare di k , descrive una varietà lineare che coincide con R^n se e solo se la coppia $(\hat{A}, b)$ è raggiungibile ed $m = n$. Pertanto, in generale, non è possibile assegnare ad arbitrio tutti i poli del sistema risultante (1.3).

Si dimostrerà che è sempre possibile assegnare $\nu (=m)$ poli arbitrariamente vicini a ν prefissati valori simmetrici.

Allo scopo, sia

$$d(\lambda) = \lambda^\nu + d_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + d_\nu = v^T(\lambda) d \quad (2.7)$$

il polinomio avente per radici i ν poli desiderati e

$$\rho(\lambda) = \lambda^{n-\nu} + \rho_1 \lambda^{n-\nu-1} + \dots + \rho_{n-\nu} = \lambda^{n-\nu} + v_{n-\nu-1}^T(\lambda) \rho \quad (2.8)$$

il polinomio, che moltiplicato per $d(\lambda)$, fornisce $p_k(\lambda)$.

E' facile constatare che:

$$\begin{pmatrix} a_{nk} \\ a_{n-1k} \\ \vdots \\ a_{1k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_\nu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{\nu-1} & d_\nu & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & d_{\nu-1} & d_\nu \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{n-\nu} \\ \rho_{n-\nu-1} \\ \vdots \\ \rho_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_\nu \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

ovvero, ponendo

$$\hat{d} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ d_\nu \ d_{\nu-1} \ \dots \ d_1)^T \quad (2.10)$$

ed usando le notazioni introdotte nel paragrafo precedente,

$$a_k = S_{n-\nu}(d) \rho + \hat{d}. \quad (2.11)$$

Se si sostituisce la (2.11) nella trasposta della (2.6) si ottiene l'equazione notevole:

$$(F \ G) \begin{bmatrix} k \\ \rho \end{bmatrix} = a - \hat{d}, \quad (2.12)$$

dove con $F \in R^{n \times m}$ e $G \in R^{n \times (n-\nu)}$ si sono indicate le matrici:

$$F = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (Cb \ C\hat{A}b \ \dots \ C\hat{A}^{n-1}b) \quad (2.13)$$

$$G = \begin{pmatrix} d_\nu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{\nu-1} & d_\nu & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & d_{\nu-1} & d_\nu \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Se la matrice $(F \ G)$ è invertibile, l'equazione (2.12) consente di calcolare sia il vettore k , che permette di assegnare i ν desiderati poli, sia il polinomio $\rho(\lambda)$ avente per radici gli $n-\nu$ poli rimanenti.

Si farà ora vedere che $(F \ G)$ è invertibile per quasi tutti i vettori d e quindi per quasi tutti gli insiemi $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu)$ dei ν poli desiderati.

Infatti, per la regola di Laplace, si ha:

$$\det(F \ G) = h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_{\binom{n}{m}} g_{\binom{n}{m}}, \quad (2.15)$$

dove h_i e g_i , $i = 1, 2, \dots, \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$, sono i minori di ordine m ed $n-m$ delle matrici F e G , rispettivamente. Per iterazione su $n-m$ e per la regola di Laplace, si verifica facilmente che gli $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ minori g_i sono polinomi nei coefficienti d_j , linearmente indipendenti tra loro in quanto ognuno contiene un monomio diverso dagli altri. D'altra parte, essendo F di rango massimo, almeno un minore h_i è diverso da zero; ciò implica che il polinomio (2.15) non è identicamente nullo, donde l'asserto.

Ora, se per un certo insieme $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ di poli, $(F \ G)$ è singolare, si può assegnare un nuovo insieme $\Lambda + \Delta\Lambda = (\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2, \dots, \lambda_r + \Delta\lambda_r)$ con $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$ in modo che $(F \ G)$ sia invertibile.

Il teorema resta così dimostrato per il caso $r \leq m$; per il caso $r > m$ la dimostrazione segue facilmente considerando il sistema duale individuato dalla terna (A^T, C^T, B^T) ■

Si noti che la (2.12) per $m = n$ è equivalente alla (2.2.23).

ESEMPIO 2.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \ 0)x.$$

Posto $u = ky + v$, il polinomio caratteristico $p_k(\lambda)$ della matrice del sistema risultante vale:

$$p_k(\lambda) = \lambda(\lambda+1) - k(\lambda+2);$$

il relativo luogo delle radici, al variare di k , è riportato in Fig.2.1.

Da tale figura, in accordo con il Teorema 2.1, si nota che è possibile posizionare un polo ad arbitrio purchè distinto da -2 , o al più arbitrariamente vicino a -2 .

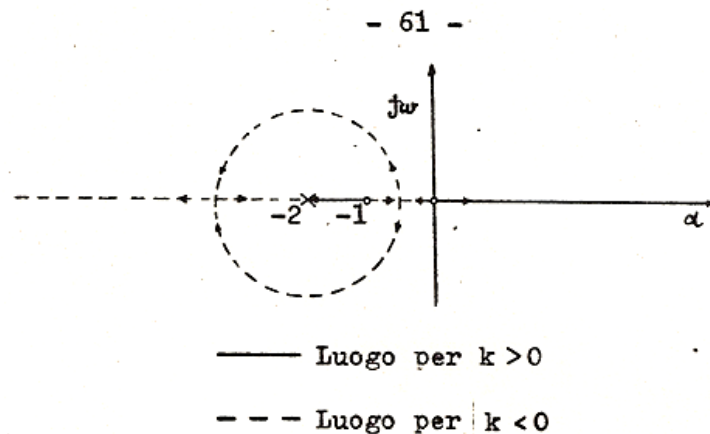


Fig.2.1

ESEMPIO 2.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -26 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Per il Teorema 2.1 è possibile progettare un controllore di tipo (1.2) tale che due poli del sistema complessivo siano assegnabili ad arbitrio; sia, dunque

$$\Lambda = (-4-j2, -4+j2).$$

Posto:

$$K_o = 0, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

è facile verificare che

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 26 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'equazione (2.12) risulta allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 20 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

da cui

$$k = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 924 \\ -54 \end{pmatrix}, \quad \rho = \rho_1 = \frac{24}{5}.$$

Se ne deduce quindi che il terzo polo è in $-24/5$ e che il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

Il controllore che assegna i desiderati poli e riduce il sistema complessivo ad un solo ingresso risulta essere:

$$u = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 924 & -54 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

mentre il sistema complessivo è descritto da:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -26 & -2 & 0 \\ 924/5 & -54/5 & -54/5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Per verifica,

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 26 & \lambda+2 & 0 \\ -924/5 & 54/5 & \lambda+54/5 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{64}{5}\lambda^2 + \frac{292}{5}\lambda + 96$$

le cui radici coincidono con $-4-j2$, $-4+j2$, $-24/5$, come si può facilmente verificare ▲

ESEMPIO 2.3. Dato il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \ 0 \ 0)x,$$

si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia due poli in -3.

Si consideri a tal fine il sistema duale

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Si verifica facilmente che

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

per cui l'equazione (2.12) diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo tale equazione si ottiene:

$$k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 71 \\ -22 \end{bmatrix}, \quad \rho = -3/5$$

da cui risulta che il terzo polo è pari a 3/5; quindi il sistema risultante è instabile ▲

Si noti che il Teorema 2.1, pur assicurando l'assegnabilità di $\nu = \max(m, r)$ poli, non fornisce alcuna indicazione sulla configurazione dei rimanenti poli, i quali possono assumere anche valori tali

da pregiudicare la stabilità del sistema, come risulta chiaramente dagli esempi 2.1 e 2.3.

Nel paragrafo successivo si presenterà una estensione del Teorema 2.1 che consente di ovviare in parte a tali difficoltà.

3.3 TECNICA PER IMPORRE VINCOLI SUI POLI NON ASSEGNABILI ARBITRARIAMENTE

Come già messo in luce alla fine del paragrafo precedente, il Teorema 2.1 non è pratico in quanto nulla dice sui rimanenti poli i quali, perciò, possono risultare anche a parte reale positiva.

Per ovviare a tale inconveniente si può pensare di assegnare un numero di poli minore del $\max(m, r)$ introducendo così gradi di libertà da utilizzare per cercare di confinare i rimanenti poli in qualche desiderata regione del piano complesso. Ciò è possibile, come risulta dal seguente teorema.

TEOREMA 3.1 (Assegnamento di $\nu < \max(m, r)$ poli con gradi di libertà per quelli rimanenti). Se il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile con $q = \max(m, r) < n$, allora è possibile progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia $\nu = q - 1$, $\nu > 0$, poli arbitrariamente vicini a ν prefissati valori simmetrici. Inoltre i rimanenti $n - \nu$ poli sono vincolati dall'equazione

$$\rho(\lambda) = q_0(\lambda) + h_1 q_1(\lambda) + \dots + h_l q_l(\lambda) = 0, \quad (3.1)$$

dove $q_0(\lambda)$, $q_1(\lambda)$, ..., $q_l(\lambda)$ sono degli opportuni polinomi ed h_1 , h_2 , ..., h_l sono scalari che possono essere variati arbitrariamente lasciando inalterati i prefissati ν poli.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $r \leq m$. In tal caso è immediato constatare che si ottiene ancora un'equazione del tipo (2.12) con G matrice reale $n \cdot (n - \nu) = n \cdot (n - m + 1)$, e quindi con $(F \ G)$ matrice reale

$n.(n+1)$. Inoltre per quasi tutti i vettori d , la matrice $(F \ G)$ ha rango n ; infatti eliminando 1 colonne da F si ricade ancora nel caso del Teorema 2.1 in cui $\nu = m$. Pertanto il vettore k che consente di assegnare i desiderati ν poli, non è unico e l'equazione (2.12) può essere risolta, per quasi tutti i vettori d , rispetto ad n componenti dei vettori ρ e k lasciando le rimanenti $n-1$ componenti, diciamo $h_1, h_2, \dots, h_l$, come parametri liberi. Il vettore ρ può allora essere scritto come:

$$\rho = q_0 + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l, \quad (3.2)$$

dove $q_0, q_1, \dots, q_l$ sono $(n-\nu)$ -vettori reali ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati arbitrariamente senza alterare i ν prefissati poli. Di qui segue la dimostrazione per il caso $r \leq m$; per il caso $r > m$ la dimostrazione segue per dualità ■

Dal Teorema 3.1 segue che $\nu = \max(m, r) - 1, l > 0$, poli possono essere assegnati arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici mentre i rimanenti $n-\nu$ poli possono essere confinati in qualche desiderata regione del piano complesso mediante opportuna scelta di $h_1, h_2, \dots, h_l$. A tale scopo può essere utile applicare alla (3.1) ripetutamente la tecnica del luogo delle radici, oppure il criterio di Routh.

Tenendo presente le dimostrazioni dei Teoremi 2.1 e 3.1 si può dare il seguente algoritmo per progettare un controllore statico che assegni $\nu \leq \max(m, r)$ poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici ed eventualmente consenta di avere a disposizione opportuni gradi di libertà per imporre vincoli convenienti sui restanti $n-\nu$ poli.

ALGORITMO 3.1 (Assegnamento di $\nu \leq \max(m, r)$ poli mediante controllore statico).

PASSO 1. Si scelgano a caso una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$ ed un vettore $f \in R^r$ tali che la coppia $(\hat{A}, b)$ sia raggiungibile, dove $\hat{A} = A + BK_0C$ e $b = Bf$. Se la matrice dinamica A è ciclica si può scegliere $K_0 = 0$.

PASSO 2. Si calcolino l'n-vettore

$$a = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1)^T \quad (3.3)$$

e la n.m matrice

$$F = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^T \\ b^T \hat{A} \\ . \\ . \\ b^T (\hat{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} C^T, \quad (3.4)$$

dove

$$|\lambda I - \hat{A}| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n. \quad (3.5)$$

PASSO 3. Si calcolino l'n-vettore

$$\hat{d} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ d_\gamma \ d_{\gamma-1} \ \dots \ d_1) \quad (3.6)$$

e la n.(n-γ) matrice

$$G = S_{n-\gamma}(d) = \begin{bmatrix} d_\gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{\gamma-1} & d_\gamma & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & d_{\gamma-1} & d_\gamma \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

dove

$$d(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^{\nu} + d_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + d_{\nu} = \lambda^{\nu} + v_{\nu-1}^T(\lambda) \hat{a} \quad (3.8)$$

è il polinomio le cui radici sono i desiderati poli. Se la matrice $(F \ G)$ non è di pieno rango i poli desiderati devono essere perturbati leggermente in modo che lo sia.

PASSO 4. Si risolva l'equazione lineare

$$\begin{bmatrix} F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \rho \end{bmatrix} = a - \hat{a} \quad (3.9)$$

assumendo $l = m - \nu$ elementi di k e ρ come parametri, diciamoli $h_1, h_2, \dots, h_l$; in tal modo l' $(n - \nu)$ -vettore ρ risulta esprimibile come:

$$\rho = (\rho_{n-\nu} \dots \rho_2 \ \rho_1)^T = q_0 + \sum_{i=1}^l h_i q_i, \quad (3.10)$$

dove $q_i, i=0,1,\dots,l$, sono $(n - \nu)$ -vettori.

PASSO 5. La matrice di reazione K , per mezzo della quale i poli desiderati sono assegnati, è:

$$K = K_0 + f k^T \quad (3.11)$$

mentre il polinomio residuo, le cui radici sono i rimanenti $n - \nu$ poli, è:

$$\rho(\lambda) = \lambda^{n-\nu} + \rho_1 \lambda^{n-\nu-1} + \dots + \rho_{n-\nu} = q_0(\lambda) + \sum_{i=1}^l h_i q_i(\lambda), \quad (3.12)$$

dove $q_i(\lambda), i=0,1,\dots,l$, sono opportuni polinomi ed $h_i, i=1,2,\dots,l$, sono scalari che possono essere scelti arbitrariamente ■

OSSERVAZIONE. L'algoritmo 3.1 è stato descritto per il caso

$r \leq m$; per il caso $m < r$ si può usare lo stesso algoritmo applicato però alla terna (A^T, C^T, B^T) .

ESEMPIO 3.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Si vuole progettare un controllore statico che renda il sistema complessivo asintoticamente stabile con un polo in -3 .

Essendo

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

l'equazione (3.9) diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo tale equazione rispetto a k_2, ρ_1, ρ_2 si ottiene:

$$k_2 = -9/2 - k_1/6$$

$$\begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} k_1$$

per cui i rimanenti poli sono le radici dell'equazione

$$\lambda^2 + 3/2\lambda + k_1(\lambda/6 - 1/3) = 0$$

il cui luogo delle radici è riportato in Fig.3.1.

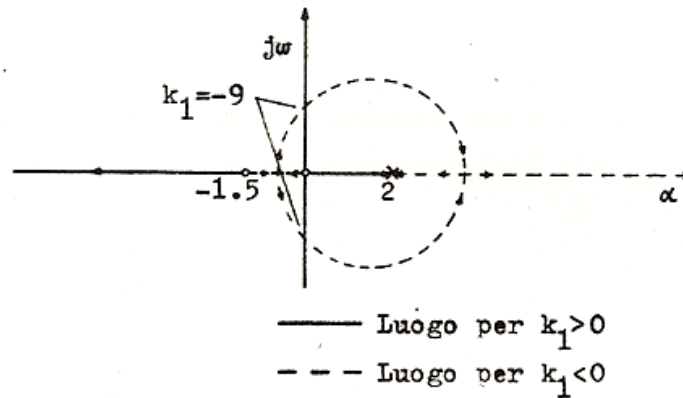


Fig.3.1

Da tale figura risulta che, fermo restando un polo in -3, il sistema complessivo può essere stabilizzato scegliendo $k_1 \in (-9, 0)$ e, corrispondentemente, $k_2 = -9/2 - k_1/6$.

Si noti che, se si fosse applicato l'Algoritmo 3.1 per assegnare esattamente due poli, di cui uno in -3 e l'altro minore di -1.5, allora il terzo polo sarebbe risultato reale positivo ▲

ESEMPIO 3.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Per tale sistema, volendo fissare due poli in -2, applicando l'Algoritmo 3.1 con $V = 2$, si ottiene:

$$k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per cui

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 + \lambda$$

ed il sistema complessivo non risulta asintoticamente stabile.

Si applichi quindi l'Algoritmo 3.1 per assegnare un sol polo in -2. Si ha:

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui l'equazione (3.9) diviene:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \rho_3 \\ \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la quale, risolta in $k_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3$, fornisce:

$$k_2 = 3/2 k_1 - 2$$

$$\begin{pmatrix} \rho_3 \\ \rho_2 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \\ -3/2 \end{pmatrix} k_1.$$

Il sistema complessivo ha così un polo in -2 ed i rimanenti so-
coincidono con le radici dell'equazione:

$$\rho(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - k_1(3/2\lambda^2 + \lambda + 3/2) =$$

$$= \lambda^3 + (3-3/2k_1)\lambda^2 + (2-k_1)\lambda - 3/2k_1 = 0.$$

Applicando il criterio di Routh a $\rho(\lambda)$ si ottiene:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 & 2 - k_1 \\ 2 & 6 - 3k_1 & - 3k_1 \\ 1 & \frac{k_1^2 - 3k_1 + 4}{6 - 3k_1} & 0 \\ 0 & - 3k_1 & \end{array}$$

Pertanto, come si constata facilmente, i rimanenti poli sono a parte reale negativa se $k_1 < 0$.

Per ottenere maggiori informazioni sul posizionamento dei rimanenti poli si può tracciare il luogo delle radici di $\rho(\lambda)$ ▲

A conclusione del presente paragrafo si noti che non sempre con la tecnica di cui sopra si riesce a stabilizzare il sistema; ciò, o perchè il sistema non è stabilizzabile con un controllore statico, o perchè tale tecnica è inefficiente.

3.4 SECONDO RISULTATO FONDAMENTALE SULL'ASSEGNAZIONE INCOMPLETO DEI POLI

Si consideri ancora il sistema (1.1) e si supponga che $\min(m, r) > 1$. In tal caso i Teoremi 2.1 e 3.1 sfruttano solo una parte dei gradi di libertà disponibili. Pertanto viene spontaneo chiedersi se è possibile ottenere risultati migliori sfruttando più efficientemente la presenza sia di più ingressi che di più uscite.

Un risultato in tale direzione, che fa uso ancora di procedure lineari, è fornito dal seguente teorema.

TEOREMA 4.1 (Assegnamento di $\min(n, m+r-1)$ poli). Se il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile allora per quasi tutte le coppie (B, C) è possibile progettare un controllore statico di tipo (1.2) tale che il sistema complessivo (1.3) abbia $\nu = \min(n, m+r-1)$ poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici.

Per dimostrare il Teorema 4.1 si premette il seguente lemma.

LEMMA 4.1 (Assegnamento di $r-1$ modi e simultanea riduzione degli ingressi in modo da renderli non eccitabili). Sia il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile. Allora per quasi tutte le coppie (B, C) esiste: un controllore di tipo

$$u = K_0 y + u_0, \quad (4.1)$$

con $K_0 \in R^{r \cdot m}$, $u_0 \in R^r$, un vettore $f \in R^r$ ed una trasformazione non singolare $\xi = T^{-1}x$, tale che

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_0 \quad (4.2a)$$

$$y = (C_1 \ C_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (4.2b)$$

dove:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_{1-1} & \dots & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

con $l = n+1-r$;

i) A_{22} è una $(r-1) \cdot (r-1)$ matrice reale con i suoi autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici;

$$b_1 = B_1 f = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)^T, \ B_2 f = (0 \ 0 \ \dots \ 0)^T; \quad (4.4)$$

if) la coppia (A_{11}, C_1) è osservabile;

$$\text{rango } C_1 = \min(1, m); \quad (4.5)$$

$$\nu_0 + 1 = \lceil 1/m \rceil, \quad (4.6)$$

in cui $\nu_0 + 1$ è l'indice di osservabilità della coppia (A_{11}, C_1) definito come il più piccolo intero tale che:

$$\text{rango}(C_1^T \ A_{11}^T C_1^T \ \dots \ (A_{11}^T)^{\nu_0} C_1^T) = 1 \quad (4.7)$$

e $\lceil a \rceil$ denota il minimo intero maggiore od uguale al numero a .

DIMOSTRAZIONE. Per mezzo del Teorema 3.1 si determini una matrice K_0 tale che $r-1$ autovalori della matrice $\hat{A} = A + BK_0 C$ siano arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici; se i rimanenti autovalori, λ_i , $i=1,2,\dots,l$, non sono di molteplicità geometrica unitaria, si perturbi leggermente la matrice K_0 in modo che lo diventino (vedi Lemma 1.3).

Per il Lemma 1.5, per quasi tutte le matrici B esiste un vettore $f \in R^r$ tale che

$$p_1(\lambda) = \prod_{i=1}^l (\lambda - \lambda_i) = \lambda^l + \alpha_1 \lambda^{l-1} + \dots + \alpha_l \quad (4.8)$$

è il polinomio minimo di $b = Bf$ rispetto ad $\hat{A}$. Si consideri quindi il cambiamento di variabile

$$\xi = T^{-1}x = (T_1 \ D)^{-1}x, \quad (4.9)$$

dove $T_1 \in R^{n,l}$ è la matrice di rango l data da

$$T_1 = (b \hat{A} b \dots \hat{A}^{1-1} b) \begin{pmatrix} \alpha_{1-1} & \alpha_{1-2} & \dots & 1 \\ \alpha_{1-2} & \alpha_{1-3} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

e $D \in R^{n \cdot (n-1)}$ è tale per cui la matrice $(T_1 D)$ è invertibile.

Dalla (4.10) e per l'osservabilità del sistema (1.1) seguono allora le (4.2), (4.3), (4.4), i), ii).

Per provare le (4.5) e (4.6) si noti che esse sono soddisfatte se:

$$C_1 = \begin{cases} (I_1 \ 0) & \text{se } m \geq 1 \\ (e_{i_1} \ e_{i_2} \ \dots \ e_{i_m})^T & \text{se } m < 1, \end{cases} \quad (4.11)$$

dove e_{i_h} , $h = 1, 2, \dots, m$, è l' i_h -esima colonna della matrice identità I_1 ed $i_1=1$, $i_2=i_1+\lceil 1/m \rceil$, ..., $i_m = i_{m-1} + \lceil 1/m \rceil$; ne segue allora che le (4.5) e (4.6) sono soddisfatte per quasi tutte le matrici CT.

Poichè T è invertibile ed il sistema (1.1) è osservabile per quasi tutte le matrici C , si ha, infine, che le (4.5) e (4.6) sono soddisfatte per quasi tutte le matrici C . La dimostrazione è così completa ■

Si può ora dare la dimostrazione del Teorema 4.1.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.1. Per il Lemma 4.1 si determini prima un controllore di tipo (4.1), un vettore $f \in R^r$ ed una trasformazione non singolare $\xi = T^{-1}x$ in modo da ottenere il sistema (4.2); si consideri allora il controllore

$$u_0 = f k^T y + L v, \quad (4.12)$$

dove $k \in R^m$, $L \in R^{r \cdot \ell}$ e $v \in R^r$ è l'ingresso esterno. Con ciò il sistema

risultante diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + b_1 k^T C_1 & A_{12} + b_1 k^T C_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 L \\ B_2 L \end{bmatrix} v \quad (4.13a)$$

$$y = (C_1 \quad C_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (4.13b)$$

da cui segue che i suoi poli sono dati dagli autovalori di A_{22} , che possono essere assegnati arbitrariamente vicini ad uno specificato insieme simmetrico di numeri complessi, e dagli autovalori della matrice

$$A_{11r} = A_{11} + b_1 k^T C_1. \quad (4.14)$$

Per il Teorema 2.1, mediante opportuna scelta di k , $\min(m, 1)$ autovalori di A_{11r} possono essere assegnati arbitrariamente vicini a $\min(m, 1)$ specificati valori simmetrici. Pertanto, essendo

$$\min(m, 1) + r - 1 = \min(m, n + 1 - r) + r - 1 = \min(n, m + r - 1) \quad (4.15)$$

e tenendo presente che un analogo risultato vale anche per il sistema duale, il teorema resta dimostrato ■.

Si noti esplicitamente che il controllore che assegna i desiderati poli è descritto da

$$u = (K_0 + f k^T) y + L v. \quad (4.16)$$

ESEMPIO 4.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

In base al Teorema 4.1 i suoi poli possono essere assegnati arbitrariamente vicini a tre specificati valori simmetrici. Sia $\Lambda = (-1, -2, -5)$.

Applicando l'Algoritmo 3.1 si assegna prima un polo in -1. Scegliendo

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K_0 = 0,$$

l'equazione (3.9) diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui, ponendo per semplicità computazionale $p_2 = 0$, si ha:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Petranto il controllore (4.1) risulta:

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + u_0$$

mentre il sistema risultante:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_0, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Essendo

$$p_1(\lambda) = \rho(\lambda) = \lambda^2 - \lambda,$$

l'equazione (1.40a) risulta:

$$p_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f = 0$$

da cui

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ora, per la (4.10), si ha:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la trasformazione (4.9) può essere scelta della forma

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Pertanto, il sistema (4.13) in questo caso diventa:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_0, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi$$

da cui risulta chiaramente che per assegnare i rimanenti due poli in -2, -5 basta porre

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-10 \quad -8)y + v.$$

Il controllore che assegna i desiderati poli risulta allora:

$$u = \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + v$$

mentre il sistema complessivo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -8 & 1 \\ -10 & -7 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Per verifica,

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 10 & \lambda+8 & -1 \\ 10 & 7 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10$$

che ha per radici proprio $-1, -2, -5$ Δ

OSSERVAZIONE. Vale la pena osservare che la procedura di cui sopra si semplifica notevolmente nel caso in cui $r-1$ od $m-1$ poli del sistema (1.1) sono già "accettabili". Inoltre, per assegnare i desiderati poli non è necessario eseguire la trasformazione (4.9) dal momento che, essendo la coppia (A_{11}, b_1) in forma compagna, la matrice F si può calcolare mediante la formula

$$F = C_1^T = (CT_1)^T. \quad (4.17)$$

ESEMPIO 4.2. Sia dato il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia i suoi poli in $-1, -2-j2, -2+j2$.

Poichè il sistema dato ha già un polo in -1 , bisogna determinare un vettore $f \in \mathbb{R}^2$ in modo che

$$p_1(A)Bf = 0,$$

dove

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda.$$

Si ha quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} f = 0$$

da cui

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per fissare gli altri due poli in $-2-j2$, $-2+j2$, si osservi che

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad F = C_1^T = (CT_1)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

per cui l'equazione (3.9) diventa:

$$-k = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che il controllore che assegna i desiderati poli risulta:

$$u = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} y + v$$

mentre il sistema complessivo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \\ 12 & 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Per verifica,

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 6 & \lambda+2 & -1 \\ -12 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 10\lambda + 6$$

che ha per radici proprio -1 , $-2-j2$, $-2-j2$, come si può facilmente verificare ▲

Il seguente esempio mostra che il Teorema 4.1 non è vero per tutte le coppie (B, C) ma soltanto per quasi tutte le coppie (B, C).

ESEMPIO 4.3. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Se si pone

$$u = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} y + v$$

il polinomio caratteristico della matrice dinamica del sistema risultante diventa:

$$|\lambda I - (A+BKC)| = \lambda^4 - \lambda^2(k_{11}+k_{22}) + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})$$

da cui appare chiaramente che possono essere assegnati ad arbitrio solo due poli e non tre. Così il Teorema 4.1 non è vero per tutte le coppie (B, C), ma soltanto per quasi tutte le coppie (B, C)▲

Anche il Teorema 4.1, nel caso $m+r-1 < n$, non è pratico dal momento che non fornisce alcuna indicazione sulla configurazione dei restanti poli. In tal caso può essere utile il seguente teorema analogo al Teorema 3.1.

TEOREMA 4.2 (Assegnamento di $\nu < \min(n, m+r-1)$ poli). Se il sistema (1.1) è raggiungibile ed osservabile con $q=m+r-1 < n$, allora per quasi tutte le coppie (B, C) è possibile progettare un controllore statico tale che il sistema complessivo abbia $\nu=q-l$, $0 < l \leq \max(m, r)$, poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici. Inoltre i rimanenti $n-\nu$ poli sono vincolati dall'equazione

$$\rho(\lambda) = q_0(\lambda) + h_1 q_1(\lambda) + \dots + h_l q_l(\lambda) = 0, \quad (4.18)$$

dove $q_i(\lambda)$, $i=0,1,\dots,l$, sono opportuni polinomi ed h_i , $i=1,2,\dots,l$, sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati ν poli.

DIMOSTRAZIONE. Essa è una diretta conseguenza dei Teoremi 3.1 e 4.1 ■

Tenendo presente l'Algoritmo 3.1, la dimostrazione del Teorema 4.1 e la relativa osservazione si può dare il seguente algoritmo per progettare un controllore statico che assegni $\nu \leq \min(n, m+r-1)$ poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici ed eventualmente consenta di avere a disposizione opportuni gradi di libertà per imporre vincoli convenienti sui restanti $n-\nu$ poli.

ALGORITMO 4.1 (Assegnamento di $\nu \leq \min(n, m+r-1)$ poli mediante controllore statico).

PASSO 1. Usando l'Algoritmo 3.1 si calcolino una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$, tale che la matrice $\hat{A} = A + BK_0 C$ sia ciclica con $r-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici, ed il polinomio

$$\hat{p}(\lambda) = \lambda^{n+1-r} + \alpha_1 \lambda^{n-r} + \dots + \alpha_{n+1-r} = \lambda^{n+1-r} + v_{n-r}^T(\lambda) \alpha \quad (4.19)$$

dei poli residui.

PASSO 2. Si calcoli un vettore non nullo $f \in R^r$ tale che:

$$\hat{p}(\hat{A})Bf = 0. \quad (4.20)$$

Se

$$\text{rango}(Bf \ \hat{A}Bf \ \dots \ (\hat{A})^{n-r}Bf) = n-r+1 \quad (4.21)$$

si calcoli la $(n+1-r) \cdot m$ matrice F come segue:

$$F = \begin{bmatrix} \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-r-1} & \alpha_{n-r-2} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (Bf)^T \\ (\hat{A}Bf)^T \\ . \\ . \\ (\hat{A}^{n-r}Bf)^T \end{bmatrix} C^T; \quad (4.22)$$

se invece la (4.21) non è soddisfatta l'algoritmo si ferma poichè non è possibile assegnare i γ poli desiderati.

PASSO 3. Si eseguano i passi 3, 4 e 5 dell'Algoritmo 3.1 sostituendo n con $n+1-r$, γ con $\gamma-r+1$ ed a con α .

OSSERVAZIONE. Chiaramente l'Algoritmo 4.1 può essere applicato anche al sistema duale individuato dalla terna (A^T, C^T, B^T) .

ESEMPIO 4.4. Si consideri il sistema raggiungibile ed osserva-

bile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile con due poli arbitrariamente vicini a -1 , $-3/2$.

Poichè il sistema in oggetto ha già un polo in -1 , si può scegliere $K_0 = 0$, sicchè

$$\hat{A} = A, \quad \hat{p}(\lambda) = \lambda^3, \quad \alpha = (0 \ 0 \ 0)^T.$$

Nel passo 2 si ha:

$$\hat{p}(A)Bf = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T f = 0,$$

quindi, scegliendo $f = (0 \ 1)^T$, si ottiene:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Essendo

$$\hat{d} = (0 \ 0 \ 3/2)^T, \quad G = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

l'equazione (3.9) vale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \ell_2 \\ \ell_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

da cui, scegliendo $k_1 = h$ come parametro, si ha:

$$k_2 = -4/3h - 9/2$$

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema a ciclo chiuso ha per poli -1 , $-3/2$ e le radici dell'equazione

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3 + h(-2/3\lambda + 4/3) = \lambda^2 - 2/3h\lambda + (3 + 4/3h)$$

che risultano a parte reale negativa se $h \in (-9/4, 0) \Delta$

3.5 UN METODO NUMERICO PER L'ASSEGNAIMENTO OTTIMO DEI POLI

E' evidente che anche i Teoremi 4.1 e 4.2 possono risultare non pratici se $m+r-1 < n$. In tal caso, prima di ricorrere ad un controllo dinamico, come si mostrerà in seguito, detto

$$p_K(\lambda) = \lambda^n + a_{1K}\lambda^{n-1} + \dots + a_{nK} = \lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda)a_K \quad (5.1)$$

il polinomio caratteristico di $A+BKC$,

$$d(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_n = \lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda)d \quad (5.2)$$

il polinomio avente per radici i poli desiderati e $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$ una metrica in R^n , si può cercare di minimizzare la funzione

$$e(K) = \mathcal{S}(a_K, d). \quad (5.3)$$

Se il minimo di $e(K)$ risulta nullo allora il problema dell'assegnamento dei poli mediante controllore statico ammette soluzione; se invece tale minimo risulta maggiore di zero, anche se il problema dell'assegnamento dei poli non è risolvibile, resta individuato

un controllore ottimo rispetto alla metrica $S(., .)$.

Allo scopo di minimizzare $e(K)$, si ponga:

$$B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_r) \quad (5.4)$$

$$K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_r)^T \quad (5.5)$$

$$A+BKC = (A + \sum_{j=1}^r b_j k_j^T C) + b_i k_i^T C = A_i + b_i k_i^T C, \quad i=1,2,\dots,r. \quad (5.6)$$

Allora, indicando con

$$p_i(\lambda) = \lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \dots + a_{in} = \lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda)a_i \quad (5.7)$$

il polinomio caratteristico di A_i , e tenendo presente la notevole identità:

$$\det(I + gh^T) = 1 + h^T g, \quad (5.8)$$

dove g ed h sono n -vettori, si ha:

$$\begin{aligned} p_K(\lambda) &= \det(\lambda I - A_i - b_i k_i^T C) = \det(\lambda I - A_i) \cdot \det(\lambda I - (\lambda I - A_i)^{-1} b_i k_i^T C) = \\ &= p_i(\lambda) - p_i(\lambda) k_i^T C (\lambda I - A_i)^{-1} b_i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Poichè

$$p_i(\lambda)(\lambda I - A_i)^{-1} = I\lambda^{n-1} + N_1\lambda^{n-2} + \dots + N_{n-1}, \quad (5.10)$$

dove:

$$N_j = A_i^j + a_{i1}A_i^{j-1} + \dots + a_{ij}I, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.11)$$

dall'eguaglianza dei polinomi a primo e secondo membro della (5.9), si ha:

$$a_K = a_i - F_i k_i, \quad (5.12)$$

in cui

$$F_i = \begin{bmatrix} a_{n-1i} & a_{n-2i} & \dots & a_{1i} & 1 \\ a_{n-2i} & a_{n-3i} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{1i} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i^T \\ b_i^T A_i^T \\ . \\ . \\ b_i^T (A_i^T)^{n-1} \end{bmatrix} c^T. \quad (5.13)$$

Pertanto, scegliendo

$$S(z, w) = \|z - w\|_Q = (z - w)^T Q (z - w), \quad (5.14)$$

con Q matrice simmetrica definita positiva, la (5.3) diventa:

$$e(K) = \|F_i k_i - (a_i - d)\|_Q. \quad (5.15)$$

Ne segue che il minimo di $e(K)$, rispetto al solo vettore k_i , si ottiene per:

$$\hat{k}_i = F_i^\dagger (a_i - d), \quad (5.16)$$

dove $F_i^\dagger$ denota la pseudoinversa generalizzata della matrice F_i data da:

$$F_i^\dagger = F_i^T Q F_{ic} (F_{ic}^T Q F_i F_i^T Q F_{ic})^{-1} F_{ic}^T Q, \quad (5.17)$$

in cui F_{ic} è una matrice le cui colonne formano una base del $\mathcal{R}(F_i)$.

La matrice K che minimizza $e(K)$ può allora essere facilmente calcolata con il seguente algoritmo che è una generalizzazione del metodo discendente delle coordinate cicliche.

ALGORITMO 5.1 (Progetto di un controllore statico ottimo).

PASSO 1. Si ponga $K = K_0$, dove K_0 è un valore iniziale di K , e $\delta_c = 0$.

PASSO 2. Detta $i_1, i_2, \dots, i_r$ una disposizione degli interi $1, 2, \dots, r$, si minimizzi $e(K)$ rispetto ai vettori k_i , $i = i_1, i_2, \dots, i_r$, usando la (5.16) e si ponga di volta in volta $k_i = \hat{k}_i$.

PASSO 3. Si calcoli $e(K)$. Se $|e(K) - \delta_c| < \varepsilon$, dove ε è un numero positivo, predeterminato in base alla precisione desiderata, l'algoritmo si ferma, altrimenti si pone $\delta_c = e(K)$ e si ritorna al passo 2.

L'Algoritmo 5.1 fornisce una sequenza di matrici K_h tali che i valori corrispondenti di $e(K_h)$ formano una successione strettamente decrescente. Tale algoritmo si arresta quando:

- i) si è vicino ad una soluzione del problema;
- ii) si è vicino al minimo assoluto di $e(K)$ che risulta maggiore di zero;
- iii) si è vicino ad un minimo locale o ad un punto a sella. In questi casi per evitare tali punti può essere sufficiente alterare la condizione iniziale K_0 o cambiare la disposizione iniziale $i_1, i_2, \dots, i_r$.

L'algoritmo di cui sopra è stato implementato sull'UNIVAC 1100. Per accelerarne la convergenza la matrice Q è stata scelta diagonale con gli elementi q_{jj} pari ai primi numeri di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8,) ordinati, ad ogni dato numero di iterazioni del passo 2, in modo che a valori crescenti di $|(a_{jk} - d_j)/d_j|$ corrispondano valori crescenti di q_{jj} . Inoltre la disposizione $i_1, i_2, \dots, i_r$ è stata fissata una volta tanto alla prima iterazione del passo 2.

Tra i numerosi esempi sviluppati se ne riportano due.

ESEMPIO 5.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osserva-

bile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Si vuole progettare un controllore statico tale che il sistema a ciclo chiuso abbia i poli in -1, -2, -5.

Il vettore d risulta

$$d^T = (10 \quad 17 \quad 8)$$

mentre l'algoritmo ha dato

$$a_K^T = (10.00000 \quad 17.00000 \quad 8.00000)$$

con

$$K = \begin{bmatrix} -2.62499 & -5.37010 \\ -3.71425 & -9.00000 \end{bmatrix} \triangle$$

ESEMPIO 5.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

con

$$A = \text{diag}(-3, -2, -1, -0.5, -0.7, 1)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Si vuole determinare una matrice $K \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che lo spettro di

$A+BKC$ sia $(-1, -2, -3, -3, -3, -3)$.

Il vettore d risulta

$$d = (162 \ 459 \ 513 \ 294 \ 92 \ 15)^T$$

mentre l'algoritmo ha fornito

$$a_K = (162.00230 \ 459.04817 \ 512.98215 \ 294.10240 \ 91.95721 \ 15.04717)^T$$

con

$$K = \begin{bmatrix} 4.29727 & -12.83096 & 0.26927 \\ -0.85347 & 2.60095 & -0.05079 \\ -0.24646 & 0.69752 & 0.00670 \end{bmatrix}.$$

Questo esempio mostra che il problema dell'assegnamento completo dei poli mediante controllore statico può avere soluzione anche se $m+r-1 < n$ ▲

3.6 ESERCIZI

6.1 - Sia dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b, c \in \mathbb{R}^n$; ponendo $u = ky + v$, dimostrare che i poli del sistema a ciclo chiuso sono dati dalle radici del polinomio $p_k(\lambda) = p(\lambda) - kq(\lambda)$, dove $p(\lambda) = |\lambda I - A|$ e $q(\lambda) = c^T \text{Agg}(\lambda I - A)b$. Dimostrare inoltre che se il sistema dato è raggiungibile ed osservabile i polinomi $p(\lambda)$ e $q(\lambda)$ sono primi fra loro.

6.2 - Data una matrice $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ con indice di ciclicità pari a ν_c , dimostrare che se A_1 ha indice di ciclicità pari a $\nu_{c1} (\leq \nu_c)$, l'indice di ciclicità di A_2 è maggiore od uguale a $\nu_c - \nu_{c1}$.

6.3 - Dimostrare che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è ciclica se e solo se le n matrici $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ sono linearmente indipendenti.

6.4 - Data la terna $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con (A, B) raggiungibile ed (A, C) osservabile, tenendo presente il Lemma 1.4, scrivere un sottoprogramma al calcolatore per determinare una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ tali che la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ sia raggiungibile.

6.5 - Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

progettare un controllore statico tale che il sistema a ciclo chiuso abbia i poli in $-5, -2-j, -2+j$.

6.6 - Dimostrare che mediante un controllore statico è possibile stabilizzare il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

se e solo se si fissa un polo $\lambda_1 \in (-2, 0)$.

6.7 - Scrivere un sottoprogramma al calcolatore che implementi l'Algoritmo 3.1.

6.8 - Scrivere un sottoprogramma al calcolatore che implementi l'Algoritmo 4.1.

6.9 - Estendere il Teorema 4.2 al caso di sistemi non raggiungibili e/o non osservabili.

6.10 - Dare delle condizioni sufficienti affinché il sistema $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ sia stabilizzabile asintoticamente mediante un controllore statico.

3.7 BIBLIOGRAFIA

I Lemmi 1.2 ed 1.3 sono dovuti a Brash e Pearson [1] e Davison e Wang [4]; le dimostrazioni qui riportate sono dell'autore. Il Lemma 1.5 è dovuto a Balestrino e Celentano [8]. Per il Teorema 2.1 si vedano i lavori di Davison [2], Davison e Chatterjee [3] e Balestrino, Celentano e Sciavicco [7]. Il Teorema 3.1 è dovuto a Balestrino, Celentano e Sciavicco [7]. Per il Teorema 4.1 si vedano i lavori di Kimura [5], Davison [6] e Balestrino, Celentano e Sciavicco [7]. Per gli Algoritmi 3.1 e 4.1 si veda il lavoro di Balestrino e Celentano [10]. L'Algoritmo 5.1 è un caso particolare di quello proposto in Balestrino e Celentano [9].

- [1] F.M. BRASH e J.B. PEARSON, Pole Placement Using Dynamic Compensators, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-15, pp. 34-43, 1970.
- [2] E.J. DAVISON, On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-15, pp. 348-351, 1970.
- [3] E.J. DAVISON e R. CHATTERJEE, A Note on Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-16, pp. 98-99, 1971.
- [4] E.J. DAVISON e S.H. WANG, Properties of Linear Time-Invariant Multivariable Systems Subject to Arbitrary Output and State Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-18, pp. 24-32, 1973.
- [5] H. KIMURA, Pole Assignment by Gain Output Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-20, pp. 509-516, 1975.
- [6] E.J. DAVISON, On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-20, pp. 516-518, 1975.

- [7] A. BALESTRINO, G. CELENTANO e L. SCIAVICCO, On Incomplete Pole Assignment in Linear Systems, SYSTEMS SCIENCE, Vol. 10, No. 12, pp. 59-69, Poland, 1976.
- [8] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Observers of Reduced Order, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-24, pp. 144-146, 1979.
- [9] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, CAD of Minimal Order Controller, IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems, pp. 1-8, Zurich, 29-31 August 1979.
- [10] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, Comments on "Pole Assignment and Determination of the Residual Polynomial", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-25, pp. 853-855, 1980.

CAPITOLO IV

TEORIA DEGLI OSSERVATORI

4.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

Da quanto esposto nei capitoli precedenti si desume che il problema dell'assegnamento completo dei poli non sempre è risolvibile con un controllore statico; per contro esso lo è sempre se si fa ricorso ad un controllore dinamico di ordine sufficientemente elevato. A tal proposito il metodo più semplice e naturale per progettare un controllore dinamico che realizza l'assegnamento completo dei poli è quello che fa ricorso alla teoria degli osservatori.

Tale teoria, di fondamentale importanza anche in molti altri problemi di sintesi, si occupa della progettazione di sistemi dinamici che, collegati all'ingresso ed all'uscita di un dato sistema, ne forniscono una stima asintotica di una data trasformazione lineare dello stato.

Si consideri il sistema lineare, stazionario, di dimensioni finite:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx, \quad (1.1b)$$

in cui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ed il sistema, ad esso collegato come in Fig. 1.1:

$$\dot{w} = Fw + Eu + Gy = Fw + (EG) \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (1.2a)$$

$$y_o = Hw + Ky = (KH) \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}, \quad (1.2b)$$

in cui $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $E \in \mathbb{R}^{p \times r}$, $G \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{m \times p}$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

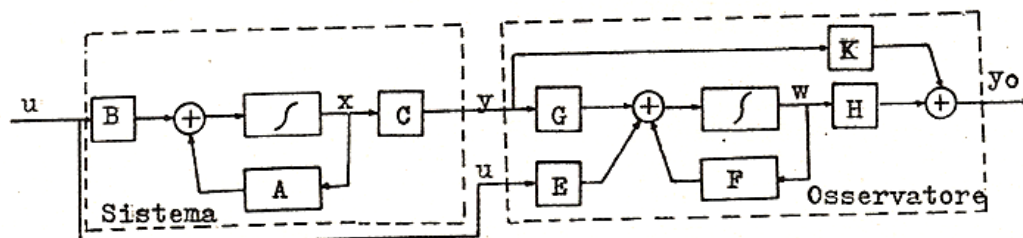


Fig. 1.1

Il sistema (1.2) si dice stimatore asintotico del sistema (1.1), o anche osservatore (di Luenberger) se esiste una trasformazione $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Tx - y_o\| = 0 \quad (1.3)$$

per tutte le funzioni di ingresso u e per tutti gli stati iniziali $x(0)$ e $w(0)$. Se $\text{rang} T = n$ l'osservatore si dice anche osservatore dello stato, in particolare osservatore identità se $T = I$.

Un primo metodo per realizzare un osservatore è quello di usare un modello del sistema. Tale metodo presenta, però, i seguenti inconvenienti:

- i) può essere applicato solo se il sistema è asintoticamente stabile;
- ii) non si può influire sulla prontezza della stima dal momento che essa è legata alle costanti di tempo del sistema.

Infatti, se il modello è descritto dalle equazioni:

$$\dot{w} = Aw + Bu \quad (1.4a)$$

$$y_o = Hw, \quad (1.5b)$$

per $T = H$, dalle (1.1) ed (1.5) si ha:

$$e(t) = Tx(t) - y_o(t) = He^{At}(x(0) - w(0)) \quad (1.6)$$

da cui segue che l'errore di stima $e(t)$ evolve nel tempo con andamento che dipende dagli autovalori della matrice dinamica A e, se la coppia (A, H) è osservabile, tende a zero solo se tali autovalori sono tutti a parte reale negativa.

Per progettare un osservatore che non presenti gli inconvenienti di cui sopra sono necessari alcuni risultati preliminari.

TEOREMA 1.1 (Equazione fondamentale degli osservatori). Ogni sistema asintoticamente stabile descritto da:

$$\dot{w} = Fw + TBu + Gy \quad (1.7a)$$

$$y_o = w, \quad (1.7b)$$

con

$$TA - FT = GC, \quad (1.8)$$

è un osservatore del sistema (1.1).

DIMOSTRAZIONE. Se si pone

$$e = Tx - w, \quad (1.9)$$

dalle (1.1), (1.7) ed (1.8) si ha:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= T\dot{x} - \dot{w} = TAx + TBu - Fw - TBu - GCx = (TA - GC)x - Fw = \\ &= F(Tx - w) = Fe. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dalla (1.10) segue che

$$Tx - w = e^{Ft}(Tx(0) - w(0)) \quad (1.11)$$

da cui, per l'ipotesi di stabilità asintotica su F , l'asserto ■

TEOREMA 1.2 (Soluzione dell'equazione degli osservatori). Si consideri l'equazione, nell'incognita V :

$$VA - FV = GC, \quad (1.12)$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -d_Y & -d_{Y-1} & \cdot & \dots & -d_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Y \times Y}, \quad (1.13)$$

$$V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_Y)^T \in \mathbb{R}^{Y \times n}, \quad (1.14)$$

$$G = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_Y)^T \in \mathbb{R}^{Y \times m}. \quad (1.15)$$

Se lo spettro di F è disgiunto da quello di A allora la (1.12) ha un'unica soluzione V data dalle seguenti formule ricorrenti:

$$v_1 = p_0^{-1}(A^T) \sum_{j=1}^Y p_j(A^T) C^T g_j \quad (1.16a)$$

$$v_{i+1} = A^T v_i - C^T g_i, \quad i=1, 2, \dots, Y-1, \quad (1.16b)$$

dove si è posto

$$\begin{aligned}
 p_0(\lambda) &= \lambda^\nu + d_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + d_{\nu-1} \lambda + d_\nu \\
 p_1(\lambda) &= \lambda^{\nu-1} + d_1 \lambda^{\nu-2} + \dots + d_{\nu-1} \lambda + d_\nu \\
 &\vdots \\
 p_{\nu-1}(\lambda) &= \lambda + d_1 \\
 p_\nu(\lambda) &= 1.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

DIMOSTRAZIONE. Se si sostituiscono nella trasposta della (1.12) le (1.13), (1.14) ed (1.15) si ha:

$$\begin{aligned}
 A^T(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_\nu) - (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_\nu) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -d_\nu \\ 1 & 0 & \dots & -d_{\nu-1} \\ 0 & 1 & \dots & -d_{\nu-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d_1 \end{pmatrix} = \\
 = C^T(g_1 \ g_2 \ \dots \ g_\nu)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 A^T v_1 &= v_2 + C^T g_1 \\
 A^T v_2 &= v_3 + C^T g_2 \\
 &\vdots \\
 A^T v_\nu &= -d_\nu v_1 - d_{\nu-1} v_2 - \dots - d_1 v_\nu + C^T g_\nu.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dalle (1.19) segue

$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_1 \\
 A^T v_1 &= v_2 + C^T g_1
 \end{aligned}$$

$$(A^T)^2 v_1 = v_3 + A^T C^T g_1 + C^T g_2 \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} (A^T)^Y v_1 = & -d_Y v_1 - d_{Y-1} v_2 - \dots - d_1 v_Y + \\ & + (A^T)^{Y-1} C^T g_1 + (A^T)^{Y-2} C^T g_2 + \dots + C^T g_Y. \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri della prima delle (1.20) per d_Y , ambo i membri della seconda per d_{Y-1} e così di seguito fino alla penultima e sommando si ha:

$$\begin{aligned} ((A^T)^Y + d_1(A^T)^{Y-1} + \dots + d_Y I) v_1 = & ((A^T)^{Y-1} + d_1(A^T)^{Y-2} + \dots + \\ & + d_{Y-1} I) C^T g_1 + ((A^T)^{Y-2} + d_1(A^T)^{Y-3} + \dots + \\ & + d_{Y-2} I) C^T g_2 + \dots + C^T g_Y \end{aligned} \quad (1.21)$$

da cui, tenendo presente le (1.17) e che, se gli autovalori di F sono tutti distinti da quelli di A , $p_0(A^T)$ è non singolare, segue la (1.16a). Le (1.16b) seguono in modo ovvio dalle prime $Y-1$ equazioni delle (1.19) ■

ESEMPIO 1.1. Si consideri l'equazione

$$VA - FV = GC,$$

dove:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 1), \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Per le (1.16) si ha:

$$v_1 = ((A^T)^2 + 4A^T + 3I)^{-1} ((A^T + 4I) C^T g_1 + C^T g_2) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = A^T v_1 - C^T e_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la matrice V risulta:

$$V = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2 \\ 1/3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Per verifica,

$$VA - FV = \begin{bmatrix} 4/3 & 1 & -2 \\ -2 & -2/3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 & 1 & -3 \\ -3 & -2/3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = GC \quad \blacktriangle$$

4.2 OSSERVATORE IDENTITÀ

Un osservatore molto conveniente è quello per il quale $T = I$, cioè quello identità. In tal caso, dovendo risultare per la (1.8)

$$F = A - GC, \quad (2.1)$$

il sistema (1.7) diventa:

$$\dot{w} = (A - GC)w + Bu + Gy \quad (2.2a)$$

$$y_o = w. \quad (2.2b)$$

Se, fissate le matrici A e C, è possibile scegliere G in modo che A-GC ha autovalori a parte reale negativa, allora il sistema (2.2) è un osservatore identità del sistema (1.1). A tal proposito vale il seguente risultato.

TEOREMA 2.1 (Osservatore identità). Si può progettare un osservatore identità del sistema (1.1) con poli arbitrari se e solo se

tale sistema è osservabile.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue immediatamente tenendo presente che, se e solo se la coppia (A, C) è osservabile, gli autovalori di $A - GC = A + I(-G)C$ possono essere fissati ad arbitrio (vedi Teorema 2.2.1) e quindi, in particolare, a parte reale negativa ■

In pratica, gli autovalori dell'osservatore vengono scelti più a sinistra di quelli del sistema osservato in modo che si abbia una rapida convergenza a zero dell'errore di stima; essi, però, non devono essere posizionati troppo a sinistra dell'asse immaginario perchè in tal modo si allargherebbe troppo la banda passante dell'osservatore, rendendolo quindi molto sensibile al rumore, e si introdurrebbero altre difficoltà quali ad esempio di tipo realizzativo.

ESEMPIO 2.1. Si consideri il sistema osservabile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \quad 1)x.$$

Si vuole progettare un osservatore identità con i poli in $-2, -3$. In base alle (2.2), un tale osservatore risulta:

$$\dot{\hat{w}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} (1 \quad 1) \right] \hat{w} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} y, \quad y_0 = w,$$

dove g_1 e g_2 devono essere determinati in modo che i suoi poli siano in $-2, -3$.

Applicando l'Algoritmo (2.2.1) alla terna $(A^T, C^T, -I)$ si ha:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -7/2 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} y, \quad y_0 = w. \quad \blacktriangle$$

4.3 OSSERVATORE RIDOTTO

L'osservatore identità (2.2) è un sistema dinamico di ordine n , cioè uguale a quello del sistema osservato; poichè una parte dello stato è già disponibile per misura diretta delle uscite del sistema, risulta evidente la possibilità di progettare un osservatore di ordine ridotto dell'intero vettore di stato. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 3.1 (Osservatore ridotto). Se il sistema (1.1) è osservabile ed ha m uscite linearmente indipendenti si può progettare un osservatore dello stato, con poli arbitrari, di ordine $n-m$.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione del teorema consiste nel far vedere che si può progettare un osservatore di ordine $n-m$, con dinamica arbitraria, che stima una trasformazione dello stato Vx , con $V \in R^{(n-m) \cdot n}$, tale che la matrice $T = \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix}$ risulti non singolare.

Per fare ciò si consideri una matrice $D \in R^{(n-m) \cdot n}$ tale che la matrice $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ risulti non singolare e si effettui il cambiamento di variabile

$$\xi = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} x. \quad (3.1)$$

Con ciò la matrice di uscita diventa :

$$C \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1} = (I \quad 0) \quad (3.2)$$

da cui segue che l'uscita del sistema, nella nuova base, coincide con le prime m variabili di stato, cioè:

$$\xi = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Il sistema (1.1), con tale cambiamento di base, si può riscrivere nella forma:

$$\dot{y} = A_{11}y + A_{12}z + B_1u \quad (3.4a)$$

$$\dot{z} = A_{21}y + A_{22}z + B_2u \quad (3.4b)$$

$$y = y. \quad (3.4c)$$

La (3.4b) può essere vista come l'equazione ingresso-stato di un sistema che ha per ingressi u ed y mentre la (3.4a) ne definisce la sua uscita $A_{12}z$. Per tale sistema, di ordine $n-m$, si può allora progettare un osservatore identità che dia una stima di z .

Tenendo presente la (2.2a), un tale osservatore risulta:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= (A_{22} - GA_{12})\hat{z} + (A_{21}y + B_2u) + G(\dot{y} - A_{11}y - B_1u) = \\ &= (A_{22} - GA_{12})\hat{z} + G\dot{y} + (B_2 - GB_1)u + (A_{21} - GA_{11})y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dalla (3.5) risulta immediatamente che la derivata di y può essere eliminata se si esegue il cambiamento di variabile $w = \hat{z} - Gy$. Infatti si ha:

$$\dot{w} = \dot{\hat{z}} - G\dot{y} = (A_{22} - GA_{11})\hat{z} - (A_{22} - GA_{12})Gy + (B_2 - GB_1)u +$$

$$+ (A_{21} - GA_{11})y = (A_{22} - GA_{12})w + (B_2 - GB_1)u + ((A_{22} - GA_{12})G + A_{21} - GA_{11})y. \quad (3.6)$$

Ora, dall'ipotesi di osservabilità della coppia (A, C) , segue la osservabilità anche della coppia (A_{22}, A_{12}) . Infatti, tenendo presente che l'osservabilità è invariante rispetto ad un cambiamento di base, si ha:

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}^{n-m} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ = \text{rango} \begin{bmatrix} I & A_{11}^T & ? & \dots & ? \\ 0 & A_{12}^T & A_{22}^T A_{12}^{T+****} & \dots & (A_{22}^T)^{n-m-1} A_{12}^{T+****} \end{bmatrix} = n, \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove gli asterischi indicano termini che sono combinazioni lineari dei vettori colonna delle precedenti matrici ed i punti interrogativi indicano termini che non interessano ai fini di ciò che si vuol dimostrare.

Dalla (3.7) segue che le $n-m$ righe

$$0 \quad A_{12}^T \quad A_{22}^T A_{12}^T \quad \dots \quad (A_{22}^T)^{n-m-1} A_{12}^T \quad (3.8)$$

sono linearmente indipendenti e quindi l'osservabilità della coppia (A_{22}, A_{12}) . Da ciò segue che gli autovalori di $A_{22} - GA_{12}$ possono essere fissati ad arbitrio mediante opportuna scelta di G .

Ora, se tali autovalori vengono fissati tutti a parte reale negativa, asintoticamente si ha $\hat{z} = z$ e quindi, sempre asintoticamente,

$$w = z - Gy = (-G \ I)\xi. \quad (3.9)$$

In definitiva, l'osservatore ridotto dell'intero vettore di stato risulta:

$$\dot{w} = (A_{22} - GA_{12})w + (B_2 - GB_1)u + ((A_{22} - GA_{12})G + A_{21} - GA_{11})y \quad (3.10a)$$

$$y_o = \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.10b)$$

Infatti, da quanto detto in precedenza, asintoticamente si ha $y_o = Tx$, dove T è la trasformazione non singolare

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -GC+D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

OSSERVAZIONE. Se si vuole un osservatore identità basta prendere come uscita, invece della (3.10b),

$$y_o = T^{-1} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = Ky + Hw, \quad (3.12)$$

dove si è posto $T^{-1} = (K \ H)$.

ESEMPIO 3.1. Sia dato il sistema osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

In accordo col Teorema 3.1, si vuole progettare un osservatore dello stato con il polo in -5.

Mediante la trasformazione

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

il sistema dato diventa:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi.$$

Quindi, per le (3.10), l'osservatore richiesto è dato da:

$$\dot{w} = (-1 - (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) w + (1 - (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) u + ((-1 - (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) - (g_1 \ g_2) + (-1 \ -2) - (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}) y, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}.$$

Poichè tale osservatore deve avere il polo in -5, si ha: $(g_1 \ g_2) = (-4 \ 0)$. Quindi

$$\dot{w} = -5w + u + (19 \ 2)y, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}.$$

Per la (3.11) si ha:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se si vuole un osservatore identità basta prendere come uscita

$$y_0 = T^{-1} \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} w \quad \blacktriangle$$

Il Teorema 3.1 consente di stabilire il seguente risultato.

TEOREMA 3.2 (Per quasi tutte le matrici $G \in R^{(n-m) \cdot m}$, $\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n$).
Si consideri la coppia osservabile (A, C) , dove $A \in R^{n \cdot n}$, $C \in R^{m \cdot n}$ e $\text{rango} C = m$, ed una matrice $F \in R^{(n-m) \cdot (n-m)}$ ciclica con autovalori distinti da quelli di A . Allora per quasi tutte le matrici $G \in R^{(n-m) \cdot m}$ si ha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n, \quad (3.13)$$

dove $V \in R^{(n-m) \cdot n}$ è la soluzione dell'equazione

$$VA - FV = GC. \quad (3.14)$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè gli autovalori di F sono distinti da quelli di A , si ha che la (3.13) è equivalente ad una disequaglianza polinomiale rispetto agli elementi di G . Pertanto, per dimostrare il teorema, basta far vedere che tale disequaglianza è soddisfatta per almeno una scelta di G .

A tale scopo, posto

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

con $D \in R^{(n-m) \cdot n}$ tale che $\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$ risulti non singolare, con il Teorema 2.2.1 si determini una matrice G' in modo che la matrice $A_{22} - G'A_{12}$ sia ciclica con autovalori coincidenti con quelli di F . Esiste allora una trasformazione non singolare P tale che

$$\hat{F} = P^{-1}FP = A_{22} - G'A_{12}. \quad (3.16)$$

Si scelga quindi

$$G = P((A_{22} - G'A_{12})G' + A_{21} - G'A_{11}); \quad (3.17)$$

essendo l'equazione (3.14) equivalente all'equazione

$$\hat{V}\hat{A} - \hat{P}\hat{V} = \hat{G}\hat{C}, \quad (3.18)$$

dove:

$$\hat{V} = P^{-1}V \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1}, \quad \hat{C} = C \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1}, \quad \hat{G} = P^{-1}G, \quad (3.19)$$

si verifica facilmente che la (3.14), con G data dalla (3.17), è soddisfatta per

$$V = P \begin{pmatrix} -G' & I \end{pmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Infine, essendo

$$\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -G' & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

non singolare, il teorema resta dimostrato ■

Il Teorema 3.2 può essere generalizzato come in seguito.

TEOREMA 3.3 (Per quasi tutte le matrici $G \in R^{\gamma \cdot m}$, $\gamma \leq n-m$, rango $\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = m + \gamma$). Si consideri la coppia osservabile (A, C) , dove $A \in R^{n \cdot n}$, $C \in R^{m \cdot n}$ e rango $C = m$, ed una matrice ciclica $F \in R^{\gamma \cdot \gamma}$, con $\gamma \leq n-m$. Allora, per quasi tutte le matrici $G \in R^{\gamma \cdot m}$, si ha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = m + \gamma, \quad (3.22)$$

dove $V \in R^{\gamma \cdot n}$ è la soluzione dell'equazione

$$VA - FV = GC. \quad (3.23)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\gamma = n-m$, la dimostrazione segue dal Teorema 3.2. Si supponga quindi $\gamma < n-m$. In tal caso, detta $F_a \in R^{\gamma_a \cdot \gamma_a}$ una qualsiasi matrice ciclica con $\gamma_a = n - (m + \gamma)$ e spettro $F \cap \text{spettro} F_a = \emptyset$,

si consideri l'equazione

$$V_a A - F_a V_a = G_a C \quad (3.24)$$

che, accoppiata alla (3.23), dà l'unica equazione

$$\begin{pmatrix} V \\ V_a \end{pmatrix} A - \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ V_a \end{pmatrix} = (G \ G_a) C. \quad (3.25)$$

Essendo la matrice $\text{diag}(F, F_a)$ ciclica, per il Teorema 3.2 per quasi tutte le matrici $(G \ G_a)$ si ha:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ V \\ V_a \end{pmatrix} = n \quad (3.26)$$

e quindi, per quasi tutte le matrici G , la (3.22) ■

Il Teorema 3.3 consente di sviluppare il seguente algoritmo computazionale per sintetizzare un osservatore di ordine $\gamma \leq n-m$, con preassegnato insieme simmetrico di poli $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\gamma)$, che fornisce una stima di $m + \gamma \leq n$ variabili di stato.

ALGORITMO 3.1 (Progetto di un osservatore di ordine ridotto).

PASSO 1. Si scelga

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -d_\gamma & -d_{\gamma-1} & . & \dots & -d_1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

dove

$$\lambda^\gamma + d_1 \lambda^{\gamma-1} + \dots + d_\gamma = \prod_{i=1}^{\gamma} (\lambda - \lambda_i). \quad (3.28)$$

PASSO 2. Si scelga a caso una matrice $G \in \mathbb{R}^{\gamma \times m}$ e si calcoli la matrice $V \in \mathbb{R}^{\gamma \times n}$ risolvendo l'equazione lineare

$$VA - FV = GC \quad (3.29)$$

mediante le (1.16).

PASSO 3. Se $\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix} = m + \gamma$ si va al passo successivo, altrimenti si ritorna al passo 2.

PASSO 4. L'osservatore ridotto risulta:

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (3.30a)$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}. \quad (3.30b)$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo la matrice (3.27) ciclica, in base al Teorema 3.3 per quasi tutte le matrici G , la matrice $\begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix}$, con V soluzione della (3.29), ha rango $m + \gamma$. Detta V una tale soluzione, sia

$$e = Vx - w. \quad (3.31)$$

Dalle (1.1), (3.30) e (3.29) si ha allora:

$$\dot{e} = Fe. \quad (3.32)$$

Pertanto, se gli autovalori di F sono tutti a parte reale negativa, asintoticamente si ha $w = Vx$ e quindi, sempre asintoticamente,

$$y_0 = \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix} x. \quad (3.33)$$

OSSERVAZIONE. Se gli autovalori di F non sono tutti distinti da quelli di A , la (3.29) non può essere risolta mediante le (1.16). Ponendo invece $G = VK_0 + \hat{G}$, con K_0 determinata in modo che gli autovalori di $A - K_0 C$ siano tutti distinti da quelli di F , l'equazione

(3.29) diventa:

$$V(A - K_0 C) - FV = \hat{G}C \quad (3.34)$$

la quale può essere risolta mediante le (1.16).

ESEMPIO 3.2. Si consideri il sistema osservabile dell'Esempio 3.1. Si vuole progettare un osservatore ridotto dello stato con il polo in -5 usando l'Algoritmo 3.1.

Si ha:

$$V = v_1^T, \quad G = g_1^T, \quad p_0(\lambda) = \lambda + 5, \quad p_1(\lambda) = 1;$$

quindi, se si sceglie $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si ottiene:

$$v^T = v_1 = (A^T + 5I)^{-1} C^T g_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/59 \begin{bmatrix} 16 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

Poichè la matrice

$$T = \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 16/59 & 17/59 & 21/59 \end{bmatrix}$$

è non singolare, per le (3.30) l'osservatore richiesto risulta:

$$\dot{w} = -5w + 21/59u + y_1 + y_2, \quad y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w \end{bmatrix},$$

dove si è posto $y = (y_1 \ y_2)^T$ ▲

4.4 OSSERVATORE DI UN FUNZIONALE LINEARE

Finora si sono considerati principalmente osservatori dello stato, ovvero di una sua trasformazione non singolare. In alcuni casi, però, non è necessaria una stima dell'intero vettore di stato in quanto basta disporre di una opportuna combinazione lineare delle variabili di stato, cioè di un opportuno funzionale lineare $l^T x$ dello stato. La stima di un tale funzionale lineare può essere ottenuta con un osservatore di ordine considerevolmente ridotto, come risulta dal seguente teorema.

TEOREMA 4.1 (Osservatore di un funzionale lineare). La stima di un funzionale lineare $l^T x$ dello stato del sistema (1.1), supposto osservabile, si può ottenere con un osservatore di ordine ν_0 , dove $\nu_0 + 1$ è l'indice di osservabilità del sistema definito come il più piccolo intero tale che la matrice

$$(C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{\nu_0} C^T) \quad (4.1)$$

ha rango n .

DIMOSTRAZIONE. Dato un vettore $l \in \mathbb{R}^n$ ed un insieme simmetrico $\Lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu_0})$ di numeri complessi, si incominci col dimostrare che esistono tre matrici $V \in \mathbb{R}^{n \times \nu_0}$, $F \in \mathbb{R}^{\nu_0 \times \nu_0}$, $G \in \mathbb{R}^{\nu_0 \times m}$ e due vettori $k \in \mathbb{R}^{\nu_0}$, $h \in \mathbb{R}^m$ tali che

$$VA - FV = GC, \quad (4.2)$$

con spettro di F pari a Λ_0 , ed

$$h^T V + k^T C = l^T. \quad (4.3)$$

A tal fine si scelga

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_{\nu_0} & -d_{\nu_0-1} & . & \dots & -d_1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

dove

$$\lambda^{\nu_0} + d_1 \lambda^{\nu_0-1} + \dots + d_{\nu_0} = \prod_{i=1}^{\nu_0} (\lambda - \lambda_i) = p_0(\lambda). \quad (4.5)$$

Allora, se si pone

$$V = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{\nu_0})^T \quad (4.6)$$

$$G = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{\nu_0})^T \quad (4.7)$$

e se lo spettro di A è disgiunto da Λ_0 , valgono le (1.16) con $\nu = \nu_0$.

Ora, moltiplicando ambo i membri della trasposta della (4.3) per $p_0(A^T)$ e ponendo

$$h = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T, \quad (4.8)$$

si ottiene l'equazione

$$p_0(A^T)C^T k + p_0(A^T)v_1 = p_0(A^T)l, \quad (4.9)$$

ovvero, per la (1.16a),

$$\begin{bmatrix} p_0(A^T)C^T & p_1(A^T)C^T & \dots & p_{\nu_0}(A^T)C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{\nu_0} \end{bmatrix} = p_0(A^T)l. \quad (4.10)$$

Poichè i polinomi $p_0(\lambda)$, $p_1(\lambda)$, ..., $p_{\nu_0}(\lambda)$ sono linearmente

indipendenti, mediante una loro opportuna combinazione lineare è possibile ottenere i polinomi $\lambda^{\gamma_0}, \lambda^{\gamma_0-1}, \dots, 1$; quindi, mediante opportune operazioni elementari sulle colonne della matrice a primo membro della (4.10), si ottiene la matrice (4.1) che è di pieno rango per ipotesi. Pertanto l'equazione (4.10) è compatibile, anzi ha più di una soluzione se $m(\gamma_0+1) > n$.

Una volta calcolati i vettori k e $g_i, i=1,2,\dots,\gamma_0$, la matrice V che soddisfa la (4.2) si ottiene usando le (1.16).

Se lo spettro di A non è disgiunto da quello di F , cioè da Λ_0 , si può porre $G = VK_0 + \hat{G}$ con K_0 determinata in modo che $\text{spettro}(A - K_0 C) \cap \Lambda_0 = \emptyset$ e considerare la (3.34) invece della (4.2).

Ora è facile verificare che l'osservatore richiesto è descritto dalle equazioni

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (4.11a)$$

$$y_0 = h^T w + k^T y. \quad (4.11b)$$

Infatti, se gli autovalori di F sono tutti a parte reale negativa, asintoticamente si ha $w = Vx$ e quindi, sempre asintoticamente, per la (4.3),

$$y_0 = h^T Vx + k^T Cx = l^T x. \quad (4.12)$$

OSSERVAZIONE. Poichè, per quasi tutti i sistemi, $\gamma_0 = [n/m] - 1 \leq n - m$, dove $[a]$ denota il più piccolo intero maggiore od uguale al numero a , segue che l'osservazione di un funzionale lineare dello stato è più semplice rispetto a quella dell'intero stato. Per esempio, per stimare lo stato di un sistema di ordine 20 con 4 uscite indipendenti, è necessario un osservatore di ordine 16, mentre per stimarne un funzionale lineare dello stato, può essere sufficiente un osservatore di ordine 4.

$$y_o = h^T w + k^T y, \quad (4.16b)$$

dove:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_{v_0} & -d_{v_0-1} & \cdot & \dots & -d_1 \end{pmatrix}, \quad h = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T; \quad (4.17)$$

$$G = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{v_0})^T. \quad (4.18)$$

■

ESEMPIO 4.1. Si consideri il sistema indicato in Fig. 4.1,

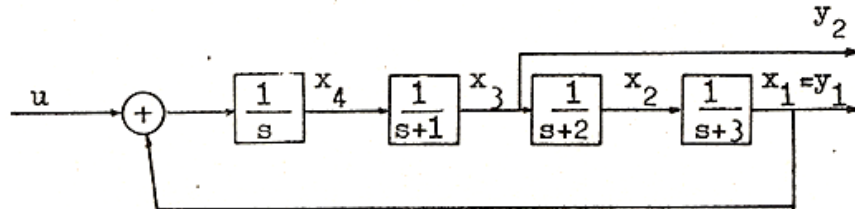


Fig. 4.1

ovvero descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Si vuole progettare un osservatore che dia una stima del funzionale lineare $l^T x = (1 \ 1 \ 1 \ 1)x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Poichè l'indice di osservabilità di tale sistema è pari a 2, per il Teorema 4.1 l'osservatore deve essere del primo ordine.

Se si sceglie $\lambda_0 = (-5)$ si ha:

$$p_0(\lambda) = \lambda + 5, \quad p_1(\lambda) = 1.$$

Pertanto l'equazione (4.13) diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

da cui

$$k = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, per la (1.16a), si ha:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva, l'osservatore richiesto, per le (4.16), risulta:

$$\dot{w} = -5w + u - (7 \ 9)y, \quad y_o = w + (4 \ 6)y.$$

Uno schema realizzativo di tale osservatore è riportato in Fig.

4.2.

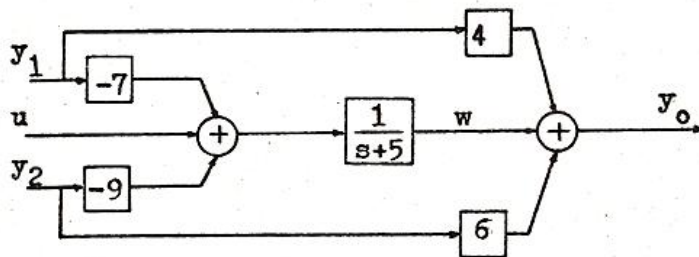


Fig. 4.2

ESEMPIO 4.2. Sia dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Si vuole progettare un osservatore che dia una stima del seguente funzionale lineare:

$$l^T x = (1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1)x = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6.$$

Poichè l'indice di osservabilità è pari a 3 l'osservatore deve essere del secondo ordine.

Se si fissano i poli in $-3-j$, $-3+j$ si ha:

$$p_0(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10, \quad p_1(\lambda) = \lambda + 6, \quad p_2(\lambda) = 1.$$

Pertanto l'equazione (4.13) diventa:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

da cui

$$k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Inoltre, per le (1.16), si ha:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -40 \\ 8 \\ -40 \\ 16 \\ 16 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -8 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 8 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

In conclusione si ha:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 40 & -15 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 10 & 0 & 8 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad h^T = (1 \ 0), \quad k^T = (2 \ -1/2).$$

Pertanto l'osservatore cercato vale:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 5/2 \\ -2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 40 & -15 \end{bmatrix} y$$

$$y_0 = (1 \ 0)w + (2 \ -1/2)y$$

4.5 ESERCIZI

5.1 - Data l'equazione

$$VA - FV = P,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $V \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$, dimostrare che, se gli autovalori di A sono distinti da quelli di F , la soluzione V può essere calcolata mediante la formula

$$v = \sum_{j=1}^v d_j \sum_{i=0}^{j-1} F^{iPA} j^{-1-i},$$

dove

$$\lambda^v + d_1 \lambda^{v-1} + \dots + d_v$$

è il polinomio caratteristico di F.

5.2 - Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

progettare un osservatore identità con tutti i poli in -3.

5.3 - Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

progettare un osservatore dello stato con poli in $-5-j$, $-5+j$, usando sia le (3.10) che l'Algoritmo 3.1.

5.4 - Seguendo l'Algoritmo 3.1, scrivere un sottoprogramma al calcolatore per progettare un osservatore dello stato di ordine ridotto con poli preassegnati.

5.5 - Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

progettare un osservatore del funzionale lineare $l^T x = (1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0)x$.

5.6 - Tenendo presente l'Algoritmo 4.1, scrivere un sottoprogramma al calcolatore per progettare un osservatore di un dato funzionale lineare dello stato con poli preassegnati.

5.7 - Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

determinare un osservatore del primo ordine per stimare la trasformazione lineare

$$Tx = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} x.$$

5.8 - Descrivere un metodo per progettare un osservatore di ordine ridotto per stimare più funzionali lineari.

4.6 BIBLIOGRAFIA

I Teoremi 1.1, 1.2, 2.1 e 3.1 sono dovuti a Luenberger [1] - [3]. La versione del Teorema 1.2 del testo è nuova. I Teoremi 3.2 e 3.3 e gli Algoritmi 3.1 e 4.1 sono nuovi. Per il Teorema 4.1 si vedano i lavori [3] - [5]; la dimostrazione qui riportata è nuova.

- [1] D.G. LUENBERGER, Observing the State of a Linear System, IEEE Trans. Milit. Electronics, Vol. MIL-8, pp. 74-80, 1964.
- [2] D.G. LUENBERGER, Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-11, pp. 190-197, 1966.
- [3] D.G. LUENBERGER, An Introduction to Observers, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-16, pp. 596-602, 1971.

- [4] W.M. WONHAM e A.S. MORSE, Feedback Invariants of Linear Multi-variable Systems, Automatica, Vol. 8, pp. 93-100, 1972.
- [5] P. MURDOCH, Observers Design for a Linear Functional of the State Vector, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-18, pp. 308-310, 1973.

CAPITOLO V

CONTROLLORI DINAMICI NON INTERAGENTI

5.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

Si consideri il sistema lineare, stazionario, raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx, \quad (1.1b)$$

in cui $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}^r$ è l'ingresso ed $y \in \mathbb{R}^m$ è l'uscita. Si supponga inoltre, senza perdere di generalità, che $\text{rango} B = r$ e $\text{rango} C = m$.

Nel Capitolo 2 si è mostrato che se $\max(m, r) = n$ allora il problema dell'assegnamento completo dei poli può sempre essere risolto mediante un controllore statico, mentre, se $\max(m, r) < n$, nel Capitolo 3 si è visto che ciò non sempre è possibile.

In questo capitolo viene mostrato che mediante un controllore dinamico di dimensioni al più n si riesce sempre ad assegnare ad arbitrio i poli del sistema complessivo. La progettazione di un tale controllore diventa più semplice ed elegante se viene divisa in due fasi come segue:

i) progettazione di un sub-controllore con poli preassegnati le cui uscite (risp. ingressi) possano essere riguardate, ai fini dell'assegnamento dei poli, come ulteriori uscite (risp. ingressi)

del sistema (1.1);

ii) progettazione di una legge di controllo di tipo statica in modo che il sistema complessivo conservi i poli del sub-controllore e si modifichino nel modo desiderato solo quelli rimanenti.

Tale modo di procedere, abbastanza suggestivo, deve la sua fortuna alla teoria degli osservatori; più precisamente esso scaturisce dai seguenti risultati fondamentali.

TEOREMA 1.1 (Prima proprietà di separazione). Si supponga di comandare il sistema

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy + u_Y \quad (1.2a)$$

$$y_Y = w, \quad (1.2b)$$

in cui $w \in \mathbb{R}^Y$ e

$$VA - FV = GC, \quad (1.3)$$

mediante il sistema (1.1) (vedi Fig. 1.1); allora gli

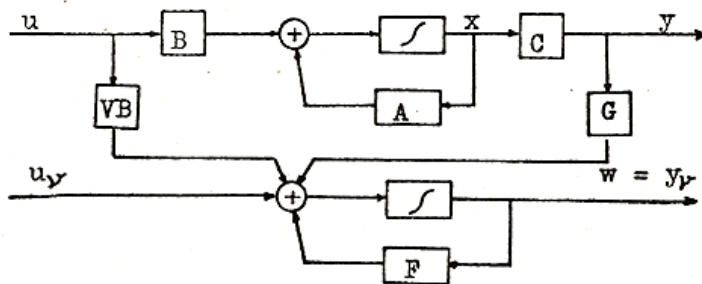


Fig. 1.1

autovalori del sistema complessivo che si ottiene utilizzando la legge di controllo

$$u = (K \ H) \begin{bmatrix} y \\ y_v \end{bmatrix} + Lv = Ky + Hy_v + Lv \quad (1.4a)$$

$$u_v = Z_0 v \quad (1.4b)$$

sono quelli della matrice F e quelli della matrice $A+B(K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$, ovvero quelli del sistema (1.2) e quelli che si avrebbero se il sistema (1.1) avesse altre v uscite y_a , con relativa matrice di uscita V , e si fosse utilizzata la legge di controllo

$$u = (K \ H) \begin{bmatrix} y \\ y_a \end{bmatrix} + \sigma = (K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} x + \sigma \quad (1.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Effettuando il cambiamento di variabile

$$z = Vx - w \quad (1.6)$$

ed usando la (1.3), il sistema complessivo, composto dai sistemi (1.1) ed (1.2), diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.7a)$$

$$\dot{z} = Fz - u \quad (1.7b)$$

$$y = Cx \quad (1.7c)$$

$$y_v = Vx - z, \quad (1.7d)$$

mentre lo schema di Fig. 1.1 si trasforma in quello di Fig. 1.2. Da

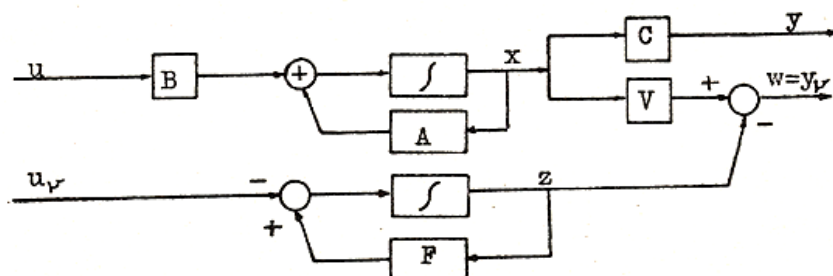


Fig. 1.2

tale figura la dimostrazione segue in modo ovvio.

Per altra via, in modo più esplicito, se si usa la legge di controllo (1.4), il sistema (1.7), in forma compatta, diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B(KH) & \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BL \\ -Z_0 \end{bmatrix} v \quad (1.8a)$$

$$y = (C \ 0) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.8b)$$

in cui non si è presa in considerazione l'uscita y_v .

La matrice dinamica del sistema (1.8) è triangolare a blocchi; quindi i suoi autovalori sono quelli di F e di $A+B(KH) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$ ■

TEOREMA 1.2 (Seconda proprietà di separazione). Si supponga di comandare il sistema (1.1), come indicato in Fig. 1.3, mediante il sistema

$$\dot{w} = Fw + u_v \quad (1.9a)$$

$$u = Gw + u_e, \quad (1.9b)$$

in cui $w \in \mathbb{R}^V$ ed

$$AV - VF = BG \quad (1.10)$$

per qualche matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times V}$; allora gli autovalori del sistema comples-

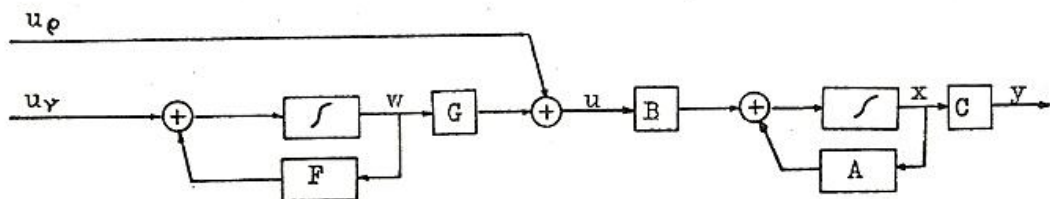


Fig. 1.3

sivo che si ottiene utilizzando la legge di controllo

$$\begin{pmatrix} u_p \\ u_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} y_\mu + \begin{pmatrix} L \\ Z \end{pmatrix} v, \quad (1.11)$$

dove

$$y_\mu = CVw + y = C(Vw + x) = C\xi, \quad (1.12)$$

sono quelli del sistema (1.9), ovvero della matrice F , e quelli che si avrebbero se il sistema (1.1) avesse altri v ingressi u_a , con relativa matrice di ingresso V , e si fosse utilizzata la legge di controllo

$$\begin{pmatrix} u \\ u_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} y + \sigma, \quad (1.13)$$

ovvero della matrice $A + (B \ V) \begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} C$.

DIMOSTRAZIONE. Effettuando il cambiamento di variabile

$$\xi = Vw + x \quad (1.14)$$

ed usando la (1.10), il sistema complessivo, composto dai sistemi (1.1) ed (1.9), diventa:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu_p + Vu_v = A\xi + (B \ V) \begin{pmatrix} u_p \\ u_v \end{pmatrix} \quad (1.15a)$$

$$\dot{w} = Fw + u_v \quad (1.15b)$$

$$y = C\xi - CVw = y_\mu - CVw, \quad (1.15c)$$

mentre lo schema di Fig. 1.3 si trasforma in quello di Fig. 1.4. Da tale figura la dimostrazione segue in modo ovvio.

Per altra via, in modo più esplicito, se si usa la legge di

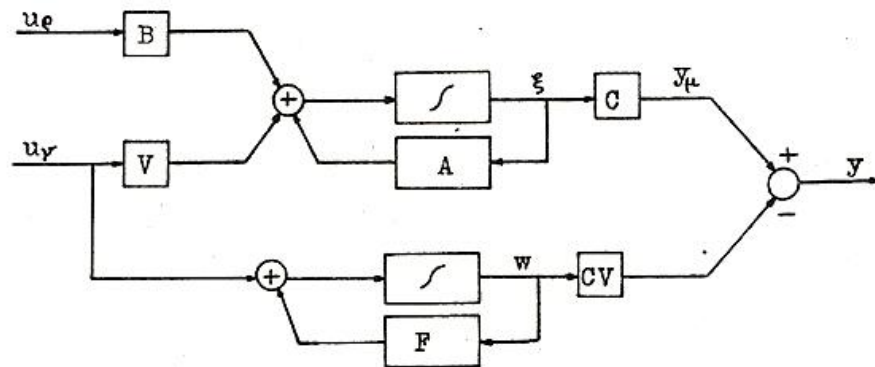


Fig. 1.4

controllo (1.11), il sistema (1.15), in forma compatta, diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + (B \ V) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C \\ HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} BL + VZ \\ Z \end{bmatrix} v \quad (1.16a)$$

$$y = (C \ -CV) \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \quad (1.16b)$$

la cui matrice dinamica ha per autovalori quelli di F e quelli di $A + (B \ V) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C$ ■

OSSERVAZIONE. Il Teorema 1.1 afferma che è possibile progettare un sistema - che, per relativo ingresso esterno nullo e nell'ipotesi che sia stabile asintoticamente, è un osservatore del sistema (1.1) - la cui uscita può essere vista, ai fini dell'assegnamento dei poli, come un'ulteriore uscita del sistema (1.1); il Teorema 1.2, duale di quello 1.1, afferma invece che è possibile progettare un sistema - che, per ingressi esterni nulli e nell'ipotesi di stabilità asintotica della matrice dinamica A , è tale per cui il sistema (1.1) è un suo osservatore - il cui ingresso può essere visto, sempre ai fini dell'assegnamento dei poli, come un ulteriore ingresso del sistema (1.1).

In base ai Teoremi 1.1 ed 1.2, quindi, per progettare un controllore che assegna i desiderati poli, conviene riferirsi allo schema di Fig. 1.5, dove il sub-controllore è descritto da:

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy + u_Y \quad (1.17a)$$

$$y_Y = w, \quad (1.17b)$$

in cui $w \in R^V$ e

$$VA - FV = GC, \quad (1.18)$$

e la legge di controllo statica da:

$$u = (K \ H) \begin{bmatrix} y \\ y_Y \end{bmatrix} + Lv \quad (1.19a)$$

$$u_Y = Z_0 v, \quad (1.19b)$$

in cui $v \in R^f$ è l'ingresso esterno, oppure allo schema di Fig. 1.6,

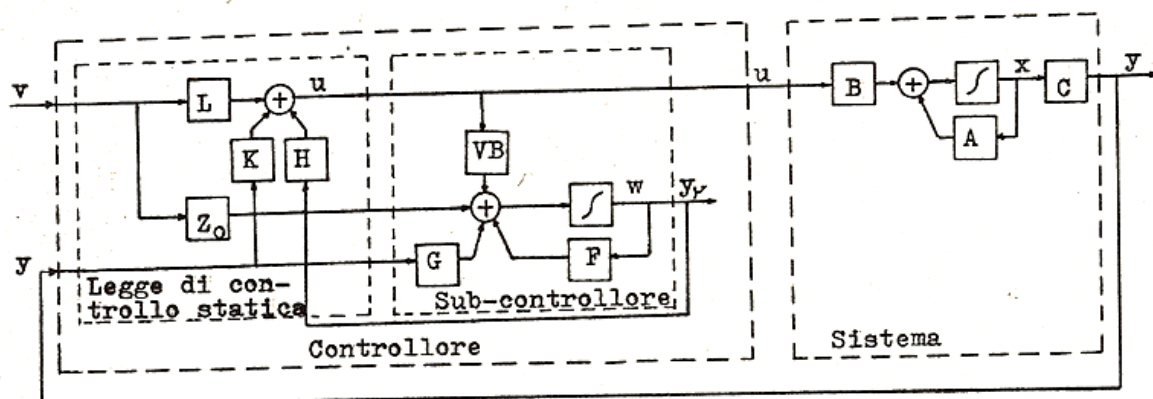


Fig. 1.5

dove il sub-controllore è descritto da:

$$\dot{w} = Fw + u_Y \quad (1.20a)$$

$$u = Gw + u_p, \quad (1.20b)$$

in cui $w \in \mathbb{R}^p$ ed

$$AV - VF = BG \quad (1.21)$$

per qualche matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$, e la legge di controllo statica da:

$$\begin{bmatrix} u_e \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} y_\mu + \begin{bmatrix} L \\ Z \end{bmatrix} v, \quad (1.22)$$

in cui

$$y_\mu = CVw + y \quad (1.23)$$

e $v \in \mathbb{R}^p$ è l'ingresso esterno.

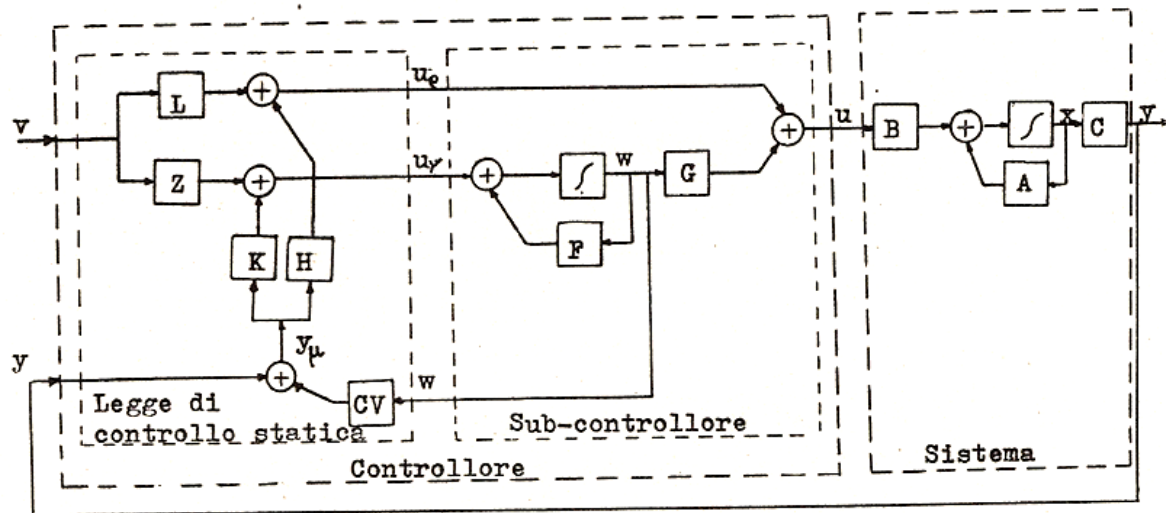


Fig. 1.6

I controllori di cui sopra a causa delle proprietà di separazione vengono detti non interagenti.

Dalle (1.17) ed (1.19) segue che il controllore di Fig. 1.5 è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{w}} &= (F+VBH)w + (G+VBK)y + (Z_0+VBL)v = \\ &= Ww + Dy + Zv\end{aligned}\quad (1.24a)$$

$$u = Hw + Ky + Lv \quad (1.24b)$$

mentre, dalle (1.20), (1.22) ed (1.23) segue che il controllore di Fig. 1.6 è descritto dalle equazioni:

$$\dot{\hat{w}} = (F+HCV)w + Hy + Zv = Ww + Dy + Zv \quad (1.25a)$$

$$u = (G+KCV)w + Ky + Lv = Hw + Ky + Lv. \quad (1.25b)$$

Pertanto agli schemi di Fig. 1.5 ed 1.6 si può far corrispondere l'unico schema di Fig. 1.7.

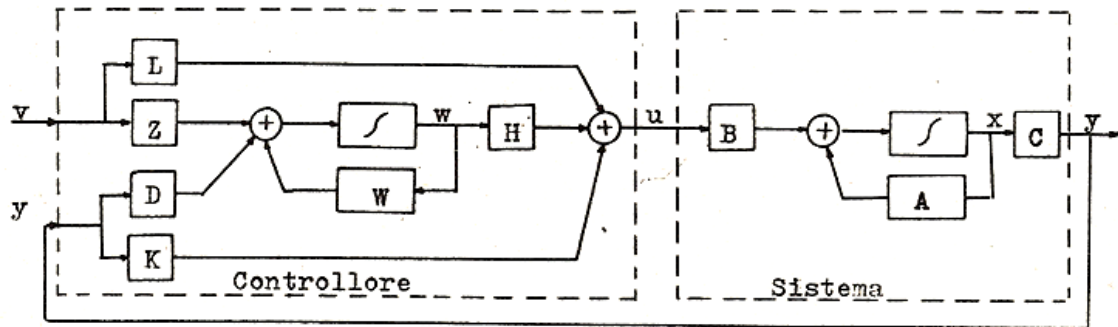


Fig. 1.7

Si noti che i poli del sistema risultante non dipendono dalle matrici Z_0 (risp. Z) ed L . Pertanto esse possono essere scelte per soddisfare altre specifiche quali, ad esempio, la non interazione, la raggiungibilità del sistema complessivo, la riduzione degli ingressi. Se non viene richiesta nessuna di tali specifiche, per semplicità realizzativa, si può porre $Z_0 = 0$ (risp. $Z = 0$) ed $L = I$.

A tal proposito è interessante osservare che, ponendo $Z_0 = 0$, i modi del sub-controllore non sono eccitabili, pertanto essi non intervengono nella risposta forzata dell'intero sistema. Inoltre, in tal caso, essendo il sub-controllore un osservatore che stima la

trasformazione Vx , il Teorema 1.1 afferma che per risolvere il problema dell'assegnamento dei poli, in luogo di una data trasformazione dello stato si può sostituire la sua stima; ciò, paradossalmente, anche quando la dinamica dell'osservatore non è più veloce di quella del sistema.

Si è ora in grado di progettare un controllore per l'assegnamento arbitrario dei poli; ciò sarà fatto nei prossimi paragrafi ponendosi via via l'obiettivo della riduzione del suo ordine γ .

5.2 CONTROLLORI DI ORDINE n

In base ai risultati stabiliti nel paragrafo precedente risulta immediato il seguente teorema.

TEOREMA 2.1 (Assegnabilità mediante controllori di ordine n).
Si può sempre progettare un controllore di ordine n tale che il sistema complessivo di Fig. 1.7 abbia un preassegnato insieme simmetrico di poli.

DIMOSTRAZIONE. In base al Teorema 1.1 (risp. 1.2) ed al Teorema 2.2.1 esiste un controllore che assegna i desiderati poli del sistema complessivo se è possibile determinare una terna di matrici V, F, G tali che:

$$VA - FV = GC \quad (\text{risp. } AV - VF = BG) \quad (2.1)$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix} = n \quad (\text{risp. } \text{rango}(B \ V) = n) \quad (2.2)$$

con gli autovalori di F coincidenti con un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi. In base al Teorema 4.2.1 oppure 4.3.3 ciò risulta chiaramente possibile se $\gamma = n$ e quindi la dimostrazione ■

Per progettare un controllore di ordine n si può far ricorso ad uno dei seguenti algoritmi.

ALGORITMO 2.1 (Progetto di un controllore di ordine n).

PASSO 1. Si scelga $V = I$ e si determini, mediante l'Algoritmo 2.1, una matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (risp. $\in \mathbb{R}^{r \times n}$) tale che la matrice

$$F = A - GC \quad (\text{risp. } F = A - BG) \quad (2.3)$$

abbia come spettro un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 2. Si determini una matrice $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ (risp. $\in \mathbb{R}^{n \times m}$) tale che la matrice

$$A + BH \quad (\text{risp. } A + HC) \quad (2.4)$$

abbia come spettro un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 3. Si costruisca il controllore mediante le equazioni:

$$\dot{w} = Fw + Bu + Gy \quad (\text{risp. } \dot{w} = Fw + H(Cw + y)) \quad (2.5a)$$

$$u = Hw + v \quad (\text{risp. } u = Gw + v) \quad (2.5b)$$

ALGORITMO 2.2 (Progetto di un controllore di ordine n).

PASSO 1. Si scelga

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & \dots & \dots & -d_1 \end{pmatrix} \quad (\text{risp. } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -d_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -d_1 \end{pmatrix}), \quad (2.6)$$

dove

$$\lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n \quad (2.7)$$

ha per radici un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 2. Si scelga a caso una matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (risp. $\in \mathbb{R}^{r \times n}$) e si calcoli, mediante le 4.1.16, la matrice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ resolvendo l'equazione

$$VA - FV = GC \quad (\text{risp. } AV - VF = BG). \quad (2.8)$$

PASSO 3. Se V è singolare si ritorna al passo 2, altrimenti si va al passo successivo.

PASSO 4. Si determini una matrice $H \in \mathbb{R}^{r \times n}$ (risp. $\in \mathbb{R}^{n \times m}$) tale che lo spettro della matrice

$$A + BHV \quad (\text{risp. } A + VHC) \quad (2.9)$$

coincida con un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 5. Si costruisca il controllore mediante le equazioni

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (\text{risp. } \dot{w} = Fw + H(CVw + y)) \quad (2.10a)$$

$$u = Hw + v \quad (\text{risp. } u = Gw + v) \quad (2.10b)$$

ESEMPIO 2.1 Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \quad 1)x.$$

Si vuole progettare un controllore del secondo ordine tale che il sistema risultante abbia i suoi poli in $-1, -1, -2, -3$.

Seguendo l'Algoritmo 2.1, la matrice G , tale che $\text{spettro}(A - GC) = (-2, -3)$, risulta (si veda l'Esempio 4.2.1):

$$G = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

mentre la matrice H, tale che $\text{spettro}(A+BH) = (-1, -1)$, vale:

$$H^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore risulta:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -7/2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} y, \quad u = (-3 \quad 1)w + v$$

mentre il sistema complessivo è descritto dalle equazioni:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \\ 3/2 & 3/2 & -3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 & -5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}.$$

Per verifica,

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda+3 & 3 & -1 \\ -3/2 & -3/2 & \lambda+3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & \lambda+5/2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6$$

le cui radici sono proprio -1, -1, -2, -3.

Seguendo l'Algoritmo 2.1 nella forma duale, la matrice G, tale che $\text{spettro}(A-BG) = (-2, -3)$, risulta:

$$G^T = -\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mentre la matrice H, tale che $\text{spettro}(A+HC) = (-1, -1)$, vale:

$$H = \left[\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore risulta:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} ((1 \ 1)w+y), \quad y = (8 \ 2)w + v.$$

Seguendo l'Algoritmo 2.2, la matrice F risulta:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

mentre, scegliendo $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, si ha:

$$v_1 = p_0^{-1}(A^T)p_1(A^T)C^T = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = A^T v_1 - C^T = 1/4 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/4 \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$V = (v_1 \ v_2)^T = 1/4 \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}.$$

Essendo V non singolare la matrice H, tale che $\text{spettro}(A+BHV) = (-1, -1)$, risulta:

$$H^T = \left[1/4 \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -18 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4/3 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore vale:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} w + 1/4 \begin{bmatrix} 5 \\ -18 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, \quad u = (-4 \ -4/3)w + v.$$

Infine, seguendo l'Algoritmo 2.2 nella forma duale, si ha:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad G = (1 \ 0), \quad V = 1/4 \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -24 \end{bmatrix}, \quad H = -\begin{bmatrix} 4 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza il controllore risulta:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} 4 \\ 4/3 \end{bmatrix} ((5/4 - 18/4)w + y), \quad u = (1 \ 0)w + v \quad \blacktriangle$$

5.3 CONTROLLORI DI ORDINE $\nu = \min(n-m, n-r)$

Tenendo presente i Teoremi 1.1, 1.2 e 4.3.2, risulta chiaro che è possibile progettare controllori di ordine inferiore ad n . Infatti vale il seguente teorema.

TEOREMA 3.1 (Assegnabilità mediante controllori di ordine $\nu = \min(n-m, n-r)$). Esiste un controllore di ordine $\nu = \min(n-m, n-r)$ in grado di risolvere il problema dell'assegnamento completo dei poli relativamente al sistema (1.1).

DIMOSTRAZIONE. Si supponga $m \geq r$; allora per il Teorema 4.3.2 esiste una terna di matrici $V \in \mathbb{R}^{(n-m) \cdot n}$, $F \in \mathbb{R}^{(n-m) \cdot (n-m)}$, $G \in \mathbb{R}^{(n-m) \cdot m}$ tale che:

$$VA - FV = GC, \quad \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n \quad (3.1)$$

con spettro di F preassegnato. La dimostrazione segue quindi dai Teoremi 1.1 e 2.2.1.

Nel caso in cui $m < r$ la dimostrazione segue per dualità ■

Un controllore dinamico di ordine ν per risolvere il problema dell'assegnamento dei poli può essere determinato mediante il seguente algoritmo.

ALGORITMO 3.1 (Progetto di un controllore di ordine $n-m$ (risp. $n-r$)).

PASSO 1. Si scelga

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_{n-m} & -d_{n-m-1} & \dots & -d_1 \end{pmatrix} \quad (\text{risp. } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_{n-r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -d_{n-r-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & . \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -d_1 \end{pmatrix}), \quad (3.2)$$

dove

$$d(\lambda) = \lambda^{n-m} + d_1 \lambda^{n-m-1} + \dots + d_{n-m} \quad (\text{risp. } d(\lambda) = \lambda^{n-r} + d_1 \lambda^{n-r-1} + \dots + d_{n-r}) \quad (3.3)$$

ha per radici un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 2. Si scelga a caso una matrice $G \in R^{(n-m) \times m}$ (risp. $\in R^{r \times (n-r)}$) e mediante le (4.1.16) si calcoli la matrice $V \in R^{(n-m) \times n}$ (risp. $\in R^{n \times (n-r)}$) soluzione dell'equazione:

$$VA - FV = GC \quad (\text{risp. } AV - VF = BG). \quad (3.4)$$

PASSO 3. Se

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix} = n \quad (\text{risp. } \text{rango}(B \ V) = n) \quad (3.5)$$

si va al passo successivo, altrimenti si ritorna al passo 2.

PASSO 4. Si determini una matrice $(K \ H) \in R^{r \times n}$ (risp. $\begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} \in R^{n \times m}$) tale che lo spettro di

$$A + B(K \ H) \begin{pmatrix} C \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{risp. } A + (B \ V) \begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} C) \quad (3.6)$$

coincida con un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 5. Il controllore desiderato risulta:

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (\text{risp. } \dot{w} = Fw + H(CVw + y)) \quad (3.7a)$$

$$u = Ky + Hw + v \quad (\text{risp. } u = Gw + K(CVw + y) + v) \quad (3.7b)$$

ESEMPIO 3.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Essendo $\nu = \min(n-r, n-m) = 1$, si vuole determinare un controllore del primo ordine tale che il sistema risultante abbia i suoi poli in $-2, -2+j, -2-j, -3$.

Seguendo l'Algoritmo 3.1, la matrice F risulta:

$$F = -3$$

mentre, scegliendo

$$G = (0 \ 1),$$

la matrice V è data da:

$$V = GC(A-FI)^{-1} = (0 \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} (0 \ 2 \ -1).$$

Poichè la matrice

$$\begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

è non singolare, si può passare alla determinazione della matrice (KH) tale che $A + B(KH) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$ abbia i suoi autovalori in $-2, -2-j,$

$-2+j$.

Si ha:

$$(KH) = -(10 \ 12 \ 5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/7 & -1/7 \end{bmatrix}^{-1} = (-10 \ -22 \ 35).$$

Pertanto il desiderato controllore risulta:

$$\dot{w} = -3w - 1/7u + (0 \ 1)y$$

$$u = -(10 \ 22)y + 35w + v \quad \Delta$$

ESEMPIO 3.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritte dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (0 \ 0 \ 0 \ 1)x.$$

Essendo $\nu = \min(n-r, n-m) = 2$, si vuole determinare un controllore del secondo ordine tale che il sistema risultante abbia tutti i poli in -1 .

La matrice F risulta:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

mentre, scegliendo

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$v_1 = p_0^{-1}(A)p_2(A)Bg_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice

$$(B \ V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è non singolare, si può passare alla determinazione della matrice $\begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix}$ tale che $A + (B \ V) \begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} C$ abbia tutti gli autovalori in -1 .

Si ha:

$$\begin{pmatrix} K \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-4 \\ 1-6 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ -17 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza il desiderato controllore risulta:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} -17 \\ -12 \end{pmatrix} ((-1 \ 2)w + y) \\ u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} ((-1 \ 2)w + y) + v \end{aligned}$$

5.4 CONTROLLORI DI ORDINE $\nu = n+1-m-r$

Se si tiene presente il Teorema 3.5.1, risulta evidente che, nel caso in cui $\min(m, r) > 1$, i risultati dei paragrafi precedenti possono essere migliorati. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 4.1 (Assegnabilità mediante controllori di ordine $\nu = n+1-m-r$). Sia dato il sistema (1.1); allora, per quasi tutte le coppie (B, C) , esiste un controllore di ordine $\nu = n+1-m-r$ che risolve il problema dell'assegnamento arbitrario dei poli.

DIMOSTRAZIONE. In base al Teorema 1.1 (risp. 1.2), per risolvere il problema dell'assegnamento dei poli si devono poter assegnare ad arbitrio gli autovalori della matrice $A + B(KH) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$ (risp. $A + (BV) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C$), dove V è soluzione dell'equazione (1.18) (risp. (1.21)) con gli autovalori di F preassegnati. Per il Teorema 3.4.1, per quasi tutte le coppie $(B, \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix})$ risp. $((BV), C)$, ciò è possibile se

$$\text{range} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} + r - 1 = \kappa \quad (\text{risp. } \text{range}(BV) + m - 1 = n). \quad (4.1)$$

Per il Lemma 4.3.2, tale condizione è chiaramente soddisfatta se $\nu = n+1-r-m$, e quindi la dimostrazione ■

Per progettare un controllore dinamico di ordine $\nu = n+1-m-r$ si può usare il seguente algoritmo, molto simile a quello 3.1.

ALGORITMO 4.1 (Progetto di un controllore di ordine $\nu = n+1-m-r$).

PASSO 1. Si scelga

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_\nu & -d_{\nu-1} & \dots & \dots & -d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{risp. } F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -d_\nu \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -d_{\nu-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -d_1 \end{bmatrix}), \quad (4.2)$$

dove

$$d(\lambda) = \lambda^\nu + d_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + d_\nu \quad (4.3)$$

ha per radici un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 2. Si scelga a caso una matrice $G \in R^{\nu \times m}$ (risp. $R^{r \times \nu}$) e, mediante le (4.1.16), si calcoli la matrice $V \in R^{\nu \times m}$ (risp. $R^{m \times \nu}$) soluzione dell'equazione:

$$VA - FV = GC \quad (\text{risp. } AV - VF = BG). \quad (4.4)$$

PASSO 3. Se

$$\text{range} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = m + \nu = n + 1 - r \quad (\text{risp. } \text{range}(B V) = r + \nu = n + 1 - m) \quad (4.5)$$

si va al passo successivo, altrimenti si ritorna al passo 2.

PASSO 4. Seguendo l'Algoritmo 3.4.1 si calcoli una matrice $(K H) \in R^{r \times (n+1-r)}$ (risp. $\begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} \in R^{(n+1-m) \times m}$) tale che lo spettro di

$$A + B(K H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{risp. } A + (B V) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C) \quad (4.6)$$

sia arbitrariamente vicino ad un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 5. Si costruisca il controllore mediante le equazioni (3.7) (risp. le duali) ■

ESEMPIO 4.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Essendo $\nu = n + 1 - m - r = 1$, si vuole sintetizzare un controllore del primo ordine tale che il sistema complessivo abbia i poli in -2 , -1 , -1 , $-1/2 - j/2$, $-1/2 + j/2$.

Prendendo

$$F = -2$$

e scegliendo

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$V = (1/8 \quad -1/4 \quad 1/2 \quad 0)^T.$$

Poichè la matrice

$$(B \ V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/8 \\ 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 3, bisogna determinare una matrice $\begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} \in R^{3 \times 2}$ tale che la matrice $A + (B \ V) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C$ abbia gli autovalori arbitrariamente vicini a -1 , -1 , $-1/2 - j/2$, $-1/2 + j/2$.

Poichè la matrice A ha già un autovalore in -1 , bisogna determinare un vettore non nullo $f \in R^2$ tale che $p_3(A^T)C^T f = 0$, dove $p_3(\lambda) = \lambda^3$.

Si ha:

$$f = (1 \quad 1)^T.$$

Per fissare gli altri poli, seguendo la rimanente parte dell'Algoritmo 3.4.1, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/8 \\ 3/8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/8 & -15/8 \\ 3/8 & 3/8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il desiderato controllore risulta:

$$\dot{w} = -2w + (1 \ 1) \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/4 \end{bmatrix} w + y,$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -15/8 & -15/8 \\ 3/8 & 3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/4 \end{bmatrix} w + y \quad \blacktriangle$$

OSSERVAZIONE. Si noti che tutti i controllori studiati finora hanno la peculiare proprietà che, agendo sulle matrici K ed H , si possono variare ad arbitrio n poli del sistema risultante, in particolare quelli corrispondenti agli autovalori della matrice $A + B(KH) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$ (risp. $A + (BV) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C$), lasciando inalterati i rimanenti che si riconoscono come autovalori di F . Pertanto, da un punto di vista realizzativo, conviene riferirsi agli schemi di Fig. 1.5 ed 1.6 e non a quello equivalente di Fig. 1.7.

5.5 CONTROLLORI DI ORDINE $\nu = \min(\nu_o, \nu_r)$

Si noti che, per assegnare ad arbitrio gli autovalori della matrice $A + B(KH) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix}$ (risp. $A + (BV) \begin{bmatrix} K \\ H \end{bmatrix} C$), ponendo

$$K = K_o + fk^T \quad (\text{risp. } K = K_o + kf^T) \quad (5.1a)$$

$$H = fh^T \quad (\text{risp. } H = hf^T), \quad (5.1b)$$

con K_o ed f tali che la coppia $(A+BK_oC, Bf)$ (risp. $(A+BK_oC, f^TC)$) sia raggiungibile (risp. osservabile), basta poter assegnare ad arbitrio il vettore

$$l^T = k^TC + h^TV \quad (\text{risp. } l = Bk + Vh). \quad (5.2)$$

Pertanto, tenendo presente il Teorema 4.4.1, si può stabilire il seguente risultato.

TEOREMA 5.1 (Assegnabilità mediante controllori di ordine $\nu = \min(\nu_o, \nu_r)$). Esiste un controllore di ordine $\nu = \min(\nu_o, \nu_r)$, dove ν_o+1 (risp. ν_r+1) è l'indice di osservabilità (risp. di raggiungibilità) della coppia (A, C) (risp. (A, B)), in grado di risolvere il proble-

ma dell'assegnamento arbitrario dei poli relativamente al sistema (1.1).

DIMOSTRAZIONE. Essa è una conseguenza diretta dei Teoremi 1.1, 1.2 e 4.4.1 ■

Un controllore dinamico di ordine $\nu = \nu_o$ (risp. ν_r) può essere progettato mediante il seguente algoritmo.

ALGORITMO 5.1 (Progetto di un controllore di ordine $\nu = \nu_o$ (risp. ν_r)).

PASSO 1. Si scelgano ad arbitrio una matrice $K_o \in R^{r \times m}$ ed un vettore $f \in R^r$ (risp. R^m) in modo che la coppia $(A+BK_oC, Bf)$ (risp. $(A+BK_oC, f^TC)$) sia raggiungibile (risp. osservabile). Se A è ciclica si può scegliere $K_o = 0$.

PASSO 2. Mediante l'Algoritmo 2.2.1 si determini il vettore $l \in R^n$ tale che gli autovalori della matrice $A+BK_oC+Bfl^T$ (risp. $A+BK_oC+lf^TC$) coincidano con un preassegnato insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 3. Mediante l'Algoritmo 4.4.1 si calcolino le matrici V, F, G ed i vettori h, k tali che

$$VA - FV = GC \quad (\text{risp. } AV - VF = BG) \quad (5.3)$$

$$h^TV + k^TC = l^T \quad (\text{risp. } Vh + Bk = l) \quad (5.4)$$

con spettro di F preassegnato.

PASSO 4. Si costruisca il controllore desiderato mediante le equazioni (3.7) (risp. le duali) con K ed H date dalle (5.1) (risp. le duali) ■

ESEMPIO 5.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Essendo $\nu = \min(\nu_o, \nu_r) = \min(1, 3) = 1$, si vuole determinare un controllore del primo ordine che assegna al sistema complessivo i seguenti poli: -3, -1, -1, -2, -2.

Il vettore $l \in \mathbb{R}^4$ tale che $A + bl^T$ abbia per poli -1, -1, -2, -2 risulta:

$$l = \begin{bmatrix} 1-4 \\ 1-12 \\ 1-13 \\ 2-6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 12 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Essendo la matrice $F = -3$, la (4.4.13) diventa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \xi_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 \\ 32 \\ 43 \\ 16 \end{bmatrix}$$

da cui

$$k = - \begin{bmatrix} 32 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} 91 \\ 5 \end{bmatrix};$$

inoltre, per la (4.1.16a), si ha:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 91 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -11 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore richiesto risulta:

$$\dot{w} = -3w - 4u + (91 \ 5)y, \quad u = -(32 \ 16)y + w + v \Delta$$

ESEMPIO 5.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritte dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (0 \ 0 \ 0 \ 1)x.$$

Essendo $\rho = \min(\rho_o, \rho_r) = \min(3, 1) = 1$, si vuole progettare un controllore del primo ordine tale che il sistema complessivo abbia per poli $-2, -1, -1, -1-j, -1+j$.

Il vettore l tale che $A + lc^T$ abbia per autovalori $-1, -1, -1-j, -1+j$ vale:

$$l = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-6 \\ 1-7 \\ 1-4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Essendo $F = -2$, la corrispondente della (4.4.13) diventa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \xi_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

da cui

$$k = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il controllore cercato risulta:

$$\dot{w} = -2w + (-9w+y), \quad u = \begin{pmatrix} 24 \\ -21 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix} (-9w+y) \quad \blacktriangle$$

5.6 CONTROLLORI DI ORDINE $\nu = \min \left(\lceil (n-r+1)/m \rceil, \lceil (n-m+1)/r \rceil \right) - 1$

Il risultato del paragrafo precedente non tiene conto della presenza di più ingressi (risp. uscite); ne segue che esse può essere migliorate nel caso in cui $\min(m, r) > 1$. Un risultato in tal senso è dato dal seguente teorema.

TEOREMA 6.1 (Assegnabilità mediante controllori di ordine $\nu = \min \left(\lceil (n+1-r)/m \rceil, \lceil (n+1-m)/r \rceil \right) - 1$). Sia dato il sistema (1.1); allora per quasi tutte le coppie (B, C) esiste un controllore di ordine $\nu = \min \left(\lceil (n+1-r)/m \rceil, \lceil (n+1-m)/r \rceil \right) - 1$ in grado di risolvere il problema dell'assegnamento arbitrario dei poli.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 3.4.1, per quasi tutte le coppie (B, C) , esiste un controllore del tipo

$$u = K_0 y + u_0, \quad (6.1)$$

un vettore non nullo f ed una trasformazione non singolare $\xi = T^{-1}x$ tale che:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_0, \quad y = (C_1 \ C_2) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

dove:

- i) A_{22} è una $(r-1) \cdot (r-1)$ matrice reale con i suoi autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici;
- ii) la coppia $(A_{11}, B_1 f)$ è raggiungibile;

$$B_2 f = 0 \quad (6.3)$$

$$\nu_0 + 1 = \lceil (n+1-r)/m \rceil, \quad (6.4)$$

in cui $\nu_0 + 1$ è l'indice di osservabilità della coppia (A_{11}, C_1) .

Si consideri quindi l'equazione:

$$(V_1 \ V_2) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} - F(V_1 \ V_2) = G(C_1 \ C_2) \quad (6.5)$$

che si sdeppia nelle seguenti:

$$V_1 A_{11} - F V_1 = G C_1 \quad (6.6a)$$

$$V_2 A_{22} - F V_2 = G C_2 - V_1 A_{12}; \quad (6.6b)$$

allora, per il Teorema 4.4.1 e per la (6.4), è possibile determinare tre matrici F , V_1 e G e due vettori k ed h tali da soddisfare la (6.6a) e l'equazione

$$h^T V_1 + k^T C_1 = 1^T, \quad (6.7)$$

con $1 \in R^{[(n+1-r)/m]-1}$ e spettro di F preassegnati. Per tali valori di F e V_1 si determini quindi V_2 dalla (6.6b). Essendo, infine,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} f(k^T \ h^T) \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} A_{11} + B_1 f(k^T C_1 + h^T V_1) & A_{12} + B_1 f(k^T C_2 + h^T V_2) \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

segue che un controllore che risolve il problema dell'assegnamento dei poli è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Fw + (V_1 B_1 + V_2 B_2) u_e + Gy = \\ &= Fw + (V_1 B_1 + V_2 B_2) u + [G - K_e (V_1 B_1 + V_2 B_2)] y \end{aligned} \quad (6.9a)$$

$$u = (K_e + f k^T) y + (f h^T) w + v. \quad (6.9b)$$

Il teorema resta così provato per il caso $(n+1-r)/m \geq (n+1-m)/r$; per il caso $(n+1-m)/r < (n+1-r)/m$ il teorema segue per dualità ■

Il Teorema 6.1 consente di dare il seguente algoritmo di progetto.

ALGORITMO 6.1 (Progetto di un controllore di ordine $\nu = [(n+1-r)/m]$ (risp. $[(n+1-m)/r]$)).

PASSO 1. Mediante l'Algoritmo 3.3.1 si calcolino una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$, tale che la matrice $\hat{A} = A + BK_0C$ sia ciclica con $r-1$ (risp. $m-1$) autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ (risp. $m-1$) specificati valori simmetrici, ed il polinomio degli autovalori residui:

$$\hat{p}(\lambda) = \lambda^{n+1-r} + \alpha_1 \lambda^{n-r} + \dots + \alpha_{n+1-r} \quad (\text{risp. } \lambda^{n+1-m} + \alpha_1 \lambda^{n-m} + \dots + \alpha_{n-m+1}) \quad (6.10)$$

PASSO 2. Si calcoli un vettore non nullo $f \in R^r$ (risp. $\in R^m$) tale che:

$$\hat{p}(\hat{A})Bf = 0 \quad (\text{risp. } \hat{p}(\hat{A}^T)C^T f = 0) \quad (6.11)$$

Se

$$\begin{aligned} \text{range}(Bf \ \hat{A}Bf \ \dots \ \hat{A}^{n-r}Bf) &= n+1-r \\ (\text{risp. } \text{range}(C^T f \ \hat{A}^T C^T f \ \dots \ (\hat{A}^T)^{n-m} C^T f) &= n+1-m) \end{aligned} \quad (6.12)$$

si vada al passo successivo, altrimenti si arresti l'algoritmo poichè non è possibile risolvere il problema dell'assegnamento dei poli con un controllore del desiderato ordine ν .

PASSO 3. Si esegua la trasformazione $\xi = T^{-1}x$ (3.4.9) (risp. la duale) sul sistema retroazionato mediante la legge di controllo (6.1) in modo da ottenere la rappresentazione (6.2) (risp. la duale).

PASSO 4. Mediante l'Algoritmo 2.2.1 si determini il vettore l tale che la matrice $A_{11} + B_1 f l^T$ (risp. la duale) abbia autovalori prefissati.

PASSO 5. Mediante l'Algoritmo 4.4.1 si calcolino le matrici F, V_1, G ed i vettori k ed h tali da soddisfare la (6.6a) e (6.7) (risp. le duali) con spettro di F preassegnato; si calcoli quindi la matrice V_2 soluzione della (6.6b) (risp. della duale).

PASSO 6. Si costruisca il controllore desiderato mediante le (6.9) (risp. le duali) ■

ESEMPIO 6.1. Per il sistema raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

determinare un controllore del primo ordine tale che il sistema risultante abbia un polo in -2 ed i rimanenti in -1 .

Poichè il sistema dato ha già un polo in -1 , bisogna determinare un vettore $f \in \mathbb{R}^2$ ed una trasformazione $\xi = T^{-1}x$ tali da metterlo nella forma (6.2) con $A_{22} = -1$. Seguendo il Lemma 3.4.1 si ha:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

per cui il sistema dato è equivalente al sistema:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi.$$

Con ciò, ponendo $p_0(\lambda) = \lambda + 2$, l'equazione (4.4.13) vale:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

da cui

$$k = - \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 26 \\ 59 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$V_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 26 \\ 33 \\ 26 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix};$$

inoltre dalla (6.6a) si ha:

$$V_2 = -13.$$

Il controllore richiesto, pertanto, risulta:

$$\dot{w} = -2w + (-13 \ 9)u + (26 \ 59)y$$

$$u = - \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ 14 & 28 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w + v \quad \Delta$$

5.7 ASSEGNAMENTO INCOMPLETO DEI POLI MEDIANTE CONTROLLORI DINAMICI DI ORDINE RIDOTTO

Nei paragrafi precedenti è stato mostrato che mediante un controllore di ordine $\nu \geq \min(\nu_r, \nu_o)$ è sempre possibile assegnare ad arbitrio tutti i poli del sistema complessivo. Risulta pertanto naturale chiedersi quanti poli possono essere assegnati se il controllore è di un dato ordine ν .

A tal uopo sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 7.1 (Assegnamento incompleto dei poli mediante un controllore di ordine ν). Per quasi tutte le coppie (B, C) del sistema (1.1), con un controllore di ordine ν è possibile assegnare al sistema complessivo, di ordine $n + \nu$, $\gamma \leq \nu + \min(n, \max(r_\nu + m - 1, o_\nu + r - 1))$ poli arbitrariamente vicini ad η specificati valori simmetrici, dove:

$$r_\nu = \text{range}(B \ AB \ \dots \ A^\nu B) \quad (7.1a)$$

$$o_\nu = \text{range}(C^T A^T C^T \ \dots \ (A^T)^\nu C^T); \quad (7.1b)$$

inoltre i rimanenti poli sono vincolati da un'equazione del tipo:

$$r(\lambda) = q_0(\lambda) + h_1 q_1(\lambda) + \dots + h_1 q_1(\lambda) = 0, \quad (7.2)$$

dove:

$$l = \begin{cases} m(\nu+1)+\nu-\eta+r-1 & , \text{ se } r_\nu \leq \sigma_\nu \\ r(\nu+1)+\nu-\eta+m-1 & , \text{ se } r_\nu > \sigma_\nu \end{cases} \quad (7.3)$$

$q_0(\lambda), q_1(\lambda), \dots, q_l(\lambda)$ sono degli opportuni polinomi di grado al più $m+\nu-\eta$ ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati η poli.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga $r_\nu \leq \sigma_\nu$. Allora, retroazionando il sistema (1.1) mediante il controllore dinamico di ordine ν descritto dalle equazioni:

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (7.4a)$$

$$u = fh^T w + (K_0 + fk^T)y, \quad (7.4b)$$

con

$$VA - FV = GC, \quad (7.5)$$

i poli del sistema complessivo, in base al Teorema 1.1, sono gli autovalori di $F + BK_0 C + Bfl^T$, dove

$$l^T = h^T V + k^T C. \quad (7.6)$$

Eseguendo le posizioni (4.1.13, 14, 15, 17) ed operando in maniera analoga a quanto fatto per dimostrare il Teorema 4.4.1 si ha:

$$l^T = \hat{k}^T \hat{C}, \quad (7.7)$$

dove:

$$\hat{k}^T = (k^T \quad g_1^T \quad \dots \quad g_\nu^T), \quad (7.8)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} Cp_0(A) \\ Cp_1(A) \\ \vdots \\ Cp_\nu(A) \end{bmatrix} p_0^{-1}(A), \quad \text{range } \hat{C} = \sigma_\nu; \quad (7.9)$$

pertanto $A+BK_0 C + Bfl^T = A+BK_0 C + Bf\hat{k}^T \hat{C}$, con $(A+BK_0 C, \hat{C})$ osservabile.

Si scelga ora K_0 , in modo che $A+BK_0C$ sia ciclica con $r-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici, ed f in modo che, mediante il vettore Bf , siano eccitabili solo i modi corrispondenti ai rimanenti autovalori di $A+BK_0C$. Allora, tenendo presente le dimostrazioni dei Teoremi 3.3.1 e 3.4.1, segue che mediante opportuna scelta di $\hat{k}$ è possibile assegnare altri $\eta - \nu - r + 1 \leq \min(n - r + 1, o_\nu)$ poli arbitrariamente vicini ad $\eta - \nu - r + 1$ specificati valori simmetrici, mentre i rimanenti sono vincolati da una relazione del tipo (7.3). Essendo $r - 1 + \min(n - r + 1, o_\nu) = \min(n, o_\nu + r - 1)$, il teorema resta dimostrato nel caso in cui $r_\nu + m \leq o_\nu + r$. Nel caso in cui $r_\nu + m > o_\nu + r$, la dimostrazione segue per dualità ■

L'algoritmo di progetto corrispondente al Teorema 7.1 è il seguente.

ALGORITMO 7.1 (Progetto di un controllore di ordine ν per l'assegnamento di $\eta \leq \nu + \min(n, o_\nu + r - 1)$ (risp. $\nu + \min(n, r_\nu + m - 1)$) poli).

PASSO 1. Detti $p_i(\lambda)$, $i=0,1,\dots,\nu$, i polinomi (4.1.17) relativi agli autovalori della matrice F dell'osservatore (diversi da quelli di A), si calcoli la matrice

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} Cp_0(A) \\ \vdots \\ Cp_\nu(A) \end{bmatrix} p_0^{-1}(A) \quad (\text{risp. } \hat{B} = p_0^{-1}(A) \begin{bmatrix} p_0(A)B & \dots & p_\nu(A)B \end{bmatrix}). \quad (7.8)$$

PASSO 2. Si applichi l'Algoritmo 3.4.1 (risp. il duale) sostituendo, nel passo 3, C con $\hat{C}$ (risp. B con $\hat{B}$) e ν con $\eta - \nu$.

PASSO 3. Si calcolino le matrici F , G , V mediante le (4.1.13 + 16).

PASSO 4. Si costruisca il controllore desiderato mediante le equazioni (3.7) (risp. le duali) con $K = K_0 + fk^T$ ed $H = f(1 \ 0 \ \dots \ 0)$ (risp. le duali) ■

ESEMPIO 7.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritte dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \quad 1 \quad 0)x.$$

Essendo $r_1 = o_1 = 2$, con un controllore del primo ordine si possono assegnare ad arbitrio al più tre poli. Se si sceglie $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -2 \pm j$, si ha:

$$p_o(\lambda) = \lambda + 2, \quad p_1(\lambda) = 1, \\ \hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo inoltre:

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \\ d(\lambda) = (\lambda + \lambda_2)(\lambda + \lambda_3) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

l'equazione (3.3.9), tenendo conto della (7.8), risulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ g_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-5 \\ 1-4 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$k = -11/3, \quad g_1 = 7/3, \quad \rho_1 = -2/3.$$

Di conseguenza, per la (4.1.16a):

$$v_1 = p_o^{-1}(A^T)C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il controllore che assegna i tre desiderati poli risulta:

$$\dot{w} = -2w - u + 7/3y, \quad u = -11/3y + w + v$$

mentre il quarto polo vale $2/3$ ▲

5.8 ESERCIZI

8.1 - Scrivere dei sottoprogrammi al calcolatore che implementino tutti gli algoritmi di progetto presentati in questo capitolo.

8.2 - Dimostrare che, per quasi tutti i sistemi (1.1), l'indice di osservabilità (risp. raggiungibilità) vale $\nu_o + 1 = [n/n]$ (risp. $\nu_r + 1 = [n/r]$).

8.3 - Servendosi dei sottoprogrammi di cui all'esercizio 8.1, progettare, per un dato sistema, i diversi controllori che risolvono il problema dell'assegnamento dei poli, da quelli di ordine n fino a quelle (e quelli) di ordine più basso, ed esplorare la sensibilità dei poli dei relativi sistemi complessivi rispetto ad una data variazione di un parametro del sistema.

8.4 - Usando l'Algoritmo 7.1 progettare, per il sistema dell'Esempio 6.1, un controllore del primo ordine tale che il sistema complessivo abbia un polo in -2 e gli altri in -1 .

5.9 BIBLIOGRAFIA

I Teoremi 1.1, 1.2, 2.1, 3.1, 5.1 sono dovuti a Luenberger [1 - 2]; la versione riportata nel testo è nuova. I Teoremi 4.1 e 6.1 sono dovuti a Balestrino e Celentano [3]; la versione qui riportata è nuova. Il Teorema 7.1 è nuovo.

- [1] D.G. LUENBERGER, Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-11, pp. 190-197, 1966.
- [2] D.G. LUENBERGER, An Introduction to Observers, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-16, pp. 596-602, 1971.
- [3] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Observers of Reduced Order, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC-24, pp. 144-146, 1979.

CAPITOLO VI

CONTROLLORI DINAMICI INTERAGENTI

6.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

Si consideri il sistema lineare, stazionario, raggiungibile ed osservabile descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1a)$$

$$y = Cx, \quad (1.1b)$$

in cui $x \in \mathbb{R}^n$ è lo stato, $u \in \mathbb{R}^r$ è l'ingresso, $y \in \mathbb{R}^m$ è l'uscita ed A , B , C sono matrici reali di dimensioni opportune con $\text{rang} B = r$ e $\text{rang} C = m$.

Retroazionando tale sistema mediante il controllore dinamico descritto dalle equazioni:

$$\dot{w} = Ww - Dy \quad (1.2a)$$

$$u = -Ky + Hw + v^{(0)}, \quad (1.2b)$$

in cui $w \in \mathbb{R}^p$ è lo stato, $v \in \mathbb{R}^r$ è il nuovo ingresso e W , D , K , H sono matrici reali di dimensioni opportune, il sistema complessivo risulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKC & BH \\ -DC & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (1.3a)$$

$$y = (C \quad 0) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (1.3b)$$

(⁰) Spesso in letteratura tale controllore dinamico viene chiamato compensatore dinamico.

Questo capitolo tratta il problema dell'assegnamento dei poli del sistema complessivo senza suddividerlo in due sottosistemi; più precisamente, esso studia l'assegnabilità degli autovalori della matrice

$$A_c = \begin{bmatrix} A - BKC & BH \\ -DC & W \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

mediante opportuna scelta delle matrici K, H, D, W.

A tale scopo si premette il seguente lemma.

LEMMA 1.1 $(\text{Rango}(S_{\nu+1}(C^T) S_{\nu}(a)) = \text{rango}(C^T A^T C^T \dots (A^T)^{\nu} C^T) + \nu)$.

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

una matrice reale n.n in forma compagna e:

$$C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n) \quad (1.6)$$

una matrice reale m.n qualsiasi. Posto:

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = v_n^T(\lambda)a = |\lambda I - A| \quad (1.7)$$

e detto ν un intero non negativo, si ha:

$$\text{rango} F = \text{rango} Q + \nu, \quad (1.8)$$

dove F è la matrice $(n+\nu) \cdot (m(\nu+1) + \nu)$:

$$F = (S_{\nu+1}(C^T) \ S_{\nu}(a)) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1^T & 0^T & \dots & 0^T & a_n & 0 & \dots & 0 \\ c_2^T & c_1^T & \dots & 0^T & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_n^T & c_{n-1}^T & \dots & \vdots & a_1 & a_2 & \dots & \vdots \\ 0^T & c_n^T & \dots & \vdots & 1 & a_1 & \dots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \dots & \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \dots & c_n^T & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

e

$$Q = (C^T A^T C^T \dots (A^T)^{\nu} C^T) =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1^T & -a_n c_n^T & -a_n c_{n-1}^T & -(a_n a_1) c_n^T & \dots & \dots \\ c_2^T & c_1^T - a_{n-1} c_n^T & -a_{n-1} c_{n-1}^T & -(a_n - a_{n-1} c_n^T) & \dots & \dots \\ c_3^T & c_2^T - a_{n-2} c_n^T & c_1^T - a_{n-2} c_{n-1}^T & -(a_{n-1} - a_{n-2} a_1) c_n^T & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\ c_n^T & c_{n-1}^T - a_1 c_n^T & c_{n-2}^T - a_1 c_{n-1}^T & -(a_2 - a_1^2) c_n^T & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Sottraendo alla riga i -esima, $i = 1, 2, \dots, n$, della matrice F la riga $n+1$ -esima moltiplicata per l'elemento i -esimo della colonna $m(\nu+1)+1$ -esima, poi alla riga i -esima, $i = 1, 2, \dots, n$, della matrice così ottenuta la riga $n+2$ -esima moltiplicata per l'elemento i -esimo della colonna $m(\nu+1)+2$ -esima, e così via, è facile verificare, per induzione su ν , che la matrice F si trasforma nella matrice:

$$\hat{F} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{\nu} C^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0^T & c_n^T & \dots & \cdot & 1 & a_1 & \dots & a_{\nu-1} \\ 0^T & 0^T & \dots & \cdot & 0 & 1 & \dots & a_{\nu-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0^T & 0^T & \dots & c_n^T & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right). \quad (1.10)$$

Chiaramente

$$\text{rangof} = \text{range} \hat{F} = \text{range}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{\nu} C^T) + \nu \quad (1.11)$$

ed il lemma resta dimostrato ■

6.2 ASSEGNAMENTO MEDIANTE CONTROLLORE DI ORDINE $\min(\nu_r, \nu_o)$

I risultati precedenti consentono di stabilire il seguente teorema.

TEOREMA 2.1 (Assegnamento di $\eta = \max(r_{\nu}, o_{\nu}) + \nu$ poli). Relativamente al sistema (1.1), si può progettare un controllore dinamico (1.2) di ordine ν tale che $\eta = \max(r_{\nu}, o_{\nu}) + \nu$ poli del sistema complessivo (1.3), di ordine $n + \nu$, siano arbitrariamente vicini ad η specificati valori simmetrici, dove:

$$r_{\nu} = \text{rangof}(B \ AB \ \dots \ A^{\nu} B), \quad o_{\nu} = \text{range}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{\nu} C^T). \quad (2.1)$$

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $r_{\nu} \leq o_{\nu}$. Essendo il sistema (1.1) raggiungibile ed osservabile, si scelgano a caso una matrice $K_0 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ed un vettore $f \in \mathbb{R}^r$ tali che la coppia $(A + BK_0 C, Bf)$ sia raggiungibile. Detto quindi

$$a(\lambda) = \lambda^n \ a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = \lambda^{n+\nu} \alpha_{n-1}^T(\lambda) \alpha = v_n^T(\lambda) a \quad (2.2)$$

il polinomio caratteristico di $A+BK_c C$, si consideri il cambiamento di variabile

$$\xi = T^{-1}x \quad (2.3)$$

con

$$T = \begin{bmatrix} Bf & (A+BK_c C)Bf & \dots & (A+BK_c C)^{n-1}Bf \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Si ha allora:

$$\hat{A} = T^{-1}(A+BK_c C)T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & & -\alpha^T \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = T^{-1}Bf = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Se si pone:

$$\hat{C} = CT, \quad D = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_\nu)^T, \quad (2.6)$$

$$K = K_c + f k_c^T, \quad H = f h^T, \quad h = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T, \quad (2.7)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -w_\nu & -w_{\nu-1} & \dots & \dots & -w_1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

la matrice dinamica A_c (1.4) del sistema complessivo (1.3), con il cambiamento di variabile (2.3), diventa:

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{b} k_c^T \hat{C} & \hat{b} h^T \\ -DC & W \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha^T - k_0^T \hat{C} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1^T \hat{C} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{\nu}^T \hat{C} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -w_{\nu} & -w_{\nu-1} & \dots & \dots & -w_1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Dalla (2.9), posto:

$$|\lambda I - \hat{A}_c| = \lambda^{n+\nu} + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \alpha_c = a_c(\lambda), \quad (2.10)$$

$$Q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{\nu+1}) = (k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{\nu}) \begin{pmatrix} w_{\nu} & w_{\nu-1} & \dots & w_1 & 1 \\ w_{\nu-1} & w_{\nu-2} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (g_0 \ D^T) P, \quad (2.11)$$

$$\pi_0 = (w_{\nu} \ w_{\nu-1} \ \dots \ w_1)^T, \quad (2.12)$$

si ha (vedi Appendice):

$$\alpha_c = \begin{bmatrix} s_{\nu+1}(\hat{C}^T) & s_{\nu}(a) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{\nu+1} \\ \pi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Sia ora

$$d(\lambda) = \lambda^{\eta} + d_1 \lambda^{\eta-1} + \dots + d_{\eta} = v_{\eta}^T(\lambda) a = \lambda^{\eta} + v_{\eta-1}^T(\lambda) \delta \quad (2.14)$$

il polinomio avente per radici gli η poli desiderati ed

$$r(\lambda) = \lambda^{n-\sigma_\nu} + r_1 \lambda^{n-\sigma_\nu-1} + \dots + r_{n-\sigma_\nu} = \lambda^{n-\sigma_\nu} + v_{n-\sigma_\nu-1}^T(\lambda) \rho \quad (2.15)$$

il polinomio, che moltiplicato per $d(\lambda)$, fornisce $a_c(\lambda)$.

Deve allora aversi:

$$\alpha_c = S_{n-\sigma_\nu}(d) \rho + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

ovvero, per la (2.13):

$$\begin{bmatrix} S_{\nu+1}(\hat{G}^T) & S_\nu(a) & S_{n-\sigma_\nu}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{\nu+1} \\ \pi_0 \\ -\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Per il Lemma 1.1 e tenendo presente la dimostrazione del Teorema 3.2.1, per quasi tutti i polinomi $d(\lambda)$, la matrice a primo membro della (2.17) è di pieno rango e quindi la (2.17) è risolvibile per quasi tutte le configurazioni simmetriche di poli desiderati.

Risolvendo la (2.17) si ottiene la matrice Q , il vettore π_0 - e quindi le matrici W e P - ed il polinomio $r(\lambda)$ degli $n-\sigma_\nu$ poli residui. Note le matrici Q e P , essendo quest'ultima sempre invertibile, la (2.11) consente di calcolare sia il vettore k_0 che la matrice D .

Il teorema resta così dimostrato nel caso che $r_\nu \leq \sigma_\nu$; nel caso in cui $r_\nu > \sigma_\nu$, la dimostrazione segue in maniera analoga considerando la trasposta della matrice dinamica A_c (1.4) del sistema complessivo (1.3)■

Il Teorema 2.1 contiene, come caso particolare, il seguente risultato fondamentale.

TEOREMA 2.2 (Assegnabilità mediante compensatore di ordine $\nu = \min(\nu_r, \nu_o)$). Esiste un controllore (1.2) di ordine $\nu = \min(\nu_r, \nu_o)$, dove $\nu_r + 1$ (risp. $\nu_o + 1$) è l'indice di raggiungibilità (risp. osservabilità) del sistema (1.1), in grado di risolvere il problema dell'assegnamento arbitrario dei poli relativamente al sistema (1.1).

DIMOSTRAZIONE. Se $\nu = \min(\nu_r, \nu_o)$, allora, per la definizione di indice di osservabilità (risp. di raggiungibilità), $\max(r_\nu, o_\nu) = n$ e quindi il teorema ■

Nel caso in cui $\nu < \min(\nu_r, \nu_o)$, dal Teorema 2.1 segue che $n - \max(r_\nu, o_\nu)$ poli del sistema complessivo non possono essere assegnati ad arbitrio. Se la posizione di questi nel piano complesso non dovesse risultare accettabile, si aumenta l'ordine ν del controllore oppure si può ricorrere al seguente teorema, ovvia generalizzazione di quello 2.1.

TEOREMA 2.3 (Assegnamento di $\eta < \max(r_\nu, o_\nu) + \nu$ poli con gradi di libertà per quelli restanti). Mediante un controllore di ordine ν tale che $\max(r_\nu, o_\nu) < n$ è possibile assegnare al sistema complessivo (1.3) $\eta < \max(r_\nu, o_\nu) + \nu$ poli arbitrariamente vicini ad η specifici valori simmetrici; inoltre i rimanenti $n + \nu - \eta$ poli sono vincolati dall'equazione:

$$r(\lambda) = q_o(\lambda) + h_1 q_1(\lambda) + \dots + h_l q_l(\lambda) = 0, \quad (2.18)$$

dove:

$$l = \begin{cases} n(\nu + 1) + \nu - \eta & , \text{ se } r_\nu \leq o_\nu \\ r(\nu + 1) + \nu - \eta & , \text{ se } r_\nu > o_\nu, \end{cases} \quad (2.19)$$

$q_o(\lambda), q_1(\lambda), \dots, q_l(\lambda)$ sono degli opportuni polinomi di grado al più $n + \nu - \eta$ ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati η poli.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $r_\nu \leq o_\nu$. In tal caso, seguendo la dimostrazione del Teorema 2.1, è immediato constatare che vale l'equazione, analoga alla (2.17):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s_{\nu+1}(\hat{c}^T) & s_\nu(a) & s_{n+\nu-\eta}(d) \end{bmatrix}}_{m(\nu+1)+n+2\nu-\eta} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{\nu+1} \\ \pi_0 \\ -\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Poichè la matrice a primo membro della (2.20), per quasi tutti i vettori d , è di rango $n + \nu$, segue che, per quasi tutte le configurazioni simmetriche di poli, la (2.20) può essere risolta e l'insieme dei vettori ρ che la soddisfano risulta dato dalla varietà lineare:

$$\rho = q_0 + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l, \quad (2.21)$$

con h_i , $i=1,2,\dots,l$, scalari qualsiasi e q_i , $i=0,1,\dots,l$, opportuni vettori di dimensione $n+\nu-\eta$. Di qui segue il teorema per il caso $r_\nu \leq o_\nu$; per il caso $r_\nu > o_\nu$ la dimostrazione segue in maniera analoga considerando la trasposta della matrice A_c (1.4) ■

L'algoritmo di progetto relativo ai Teoremi 2.1, 2, 3 è il seguente.

ALGORITMO 2.1 (Progetto di un compensatore di ordine ν per l'assegnamento di $\eta \leq \max(r_\nu, o_\nu) + \nu$ poli).

PASSO 1. Se $r_\nu > o_\nu$ si sostituisca la terna (A, B, C) con la sua duale (A^T, C^T, B^T) , altrimenti si vada al passo successivo.

PASSO 2. Si scelgano ad arbitrio una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$ ed un vettore $f \in R^r$ tali che la coppia $(A+BK_0C, Bf)$ sia raggiungibile. Se A è ciclica si può scegliere $K_0 = 0$.

PASSO 3. Si calcolino l'\$(n+1)\$-vettore

$$a = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ 1)^T \quad (2.22)$$

mediante la formula:

$$|\lambda I - (A+BK_0 C)| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (2.23)$$

e la matrice \$\hat{C} \in R^{m,n}\$ mediante la formula:

$$\hat{C} = C(B^T (A+BK_0 C) B^T \dots (A+BK_0 C)^{n-1} B^T) \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

PASSO 4. Si costruiscano le matrici F, G ed L come segue:

$$F = S_{\nu+1}(\hat{C}^T) = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{C}^T & 0^T & \dots & 0^T \\ 0^T & \hat{C}^T & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & 0^T & & \hat{C}^T \end{pmatrix}}_{m(\nu+1)} \Bigg\}^{\lambda_{n+\nu+1}}, \quad (2.25)$$

$$G = S_{\nu}(a) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & \vdots \\ 1 & a_1 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\nu} \Bigg\}^{\lambda_{n+\nu}}, \quad L = S_{n+\nu-\eta}(d) = \underbrace{\begin{pmatrix} d_{\eta} & 0 & \dots & 0 \\ d_{\eta-1} & d_{\eta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 & d_2 & \dots & \vdots \\ 1 & d_1 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{n+\nu-\eta} \Bigg\}^{\lambda_{n+\nu-\eta}}, \quad (2.26)$$

dove

$$d(\lambda) = \lambda^\eta + d_1 \lambda^{\eta-1} + \dots + d_\eta = v_\eta^T(\lambda) d \quad (2.27)$$

è il polinomio che ha per radici gli η poli desiderati.

PASSO 5. Si risolva il sistema

$$\begin{bmatrix} F & G & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{\nu+1} \\ \pi_o \\ -\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_\eta \\ \vdots \\ d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad q_i \in R^m, \quad \pi_o \in R^\nu \quad (2.28)$$

lasciando liberi $l = m(\nu+1) + \nu - \eta$ elementi $h_1, h_2, \dots, h_l$ di q_1, π_o, ρ , ottenendo così per ρ un'espressione del tipo:

$$\rho = (\rho_{n+\nu-\eta} \ \rho_{n+\nu-\eta-1} \ \dots \ \rho_1)^T = \hat{q}_o + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l. \quad (2.29)$$

PASSO 6. Applicando la tecnica del luogo delle radici od il criterio di Routh al polinomio

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= \lambda^{n+\nu-\eta} + \rho_1 \lambda^{n+\nu-\eta-1} + \dots + \rho_{n+\nu-\eta} = \\ &= \lambda^{n+\nu-\eta} + v_{n+\nu-\eta-1}^T(\lambda)(q_o + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l), \end{aligned} \quad (2.30)$$

si fissino i valori di $h_1, h_2, \dots, h_l$ in modo che i suoi zeri, che sono i restanti poli del sistema complessivo (1.3), abbiano una configurazione desiderata.

PASSO 7. Si determinino k_o e D risolvendo l'equazione:

$$(k_o \quad D^T) \begin{bmatrix} w_\nu & w_{\nu-1} & \dots & w_1 & 1 \\ w_{\nu-1} & w_{\nu-2} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ w_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_{\nu+1} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

dove

$$\pi_0 = (w_\nu \ w_{\nu-1} \ \dots \ w_1)^T \quad (2.32)$$

PASSO 8. Il desiderato controllore (1.2), se $r_\nu \leq o_\nu$, è definito dalle matrici:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -w_\nu & -w_{\nu-1} & \dots & \dots & -w_1 \end{bmatrix}, \quad D = D, \quad K = K_0 + f k_0^T, \quad H = f(1 \ 0 \ \dots \ 0); \quad (2.33)$$

se invece $r_\nu < o_\nu$ esso è definito dalle corrispondenti matrici trasposte ■

ESEMPIO 2.1. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = (1 \ 1 \ 0)x.$$

Essendo $r_1 = o_1 = 2$, con un controllore del primo ordine si possono fissare ad arbitrio al più tre poli.

Se si sceglie

$$d(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 2 + j)(\lambda + 2 - j) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda + 10,$$

essendo il sistema già nella forma canonica di controllo, l'equazione (2.28) risulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ -r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$q_1 = -20/3, \quad q_2 = 11/3, \quad w_1 = 13/3, \quad r_1 = -2/3.$$

Pertanto il controllore che assegna i desiderati poli risulta:

$$\tilde{w} = -13/3 w + 163/3 y, u = -11/3 y + w + v.$$

Si osservi che il quarto polo è in $2/3$; quindi il sistema complessivo è instabile.

Se si applica l'Algoritmo 2.1 con $\eta = 2$ e

$$d(\lambda) = (\lambda + 2 + j)(\lambda + 2 - j) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

l'equazione (2.28) risulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ w_1 \\ -r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$q_1 = 5/2r_1 - 10, q_2 = 7/2r_1 - 1, w_1 = 3 + r_1, r_2 = 1/2r_1 - 2.$$

Applicando l'equazione (2.31), si ha:

$$k_0 = 7/2r_1 - 1, D = -7/2r_1^2 - 7r_1 - 7.$$

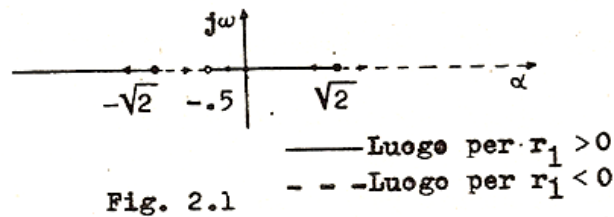
Pertanto, con il controllore

$$\tilde{w} = (-r_1 - 3)w + (7/2r_1^2 + 7r_1 + 7)y, u = (-7/2r_1 + 1)y + w + v,$$

il sistema a ciclo chiuso presenta due poli in $-2 \pm j$ ed altri due vincolati dall'equazione:

$$\lambda^2 + r_1\lambda + 1/2r_1 - 2 = \lambda^2 - 2 + r_1(\lambda + 1/2) = 0$$

il cui luogo delle radici è riportato in Fig. 2.1.



Da tale luogo si evince che il sistema complessivo può essere stabilizzato fermo restando due poli in $-2 \pm j \Delta$

ESEMPIO 2.2. Si consideri il sistema raggiungibile ed osservabile descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Essendo $\nu_r = \nu_o = 2$, si vuole progettare un controllore dinamico del secondo ordine tale che il sistema complessivo abbia tutti i poli in -1 .

E' immediato constatare che per $K_o = 0$ ed $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ la coppia $(A+BK_o C, Bf)$ è raggiungibile. Di conseguenza si ha:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sicchè l'equazione (2.28) diventa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \pi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 21 \\ 35 \\ 35 \\ 20 \\ 6 \end{bmatrix}$$

che risolta fornisce:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \pi_0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

L'equazione (2.31) vale:

$$(k_0 \ D^T) \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene:

$$k_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -14 & -78 \\ 55 & 315 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore che assegna i desiderati poli risulta:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix} w - \begin{bmatrix} -14 & -78 \\ 55 & 315 \end{bmatrix} y, \quad u = -\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w + v \quad \Delta$$

6.3 ASSEGNAZIONE MEDIANTE CONTROLLORI DI ORDINE RIDOTTO

I risultati stabiliti nel paragrafo precedente possono essere migliorati se $\min(m, r) > 1$. Infatti vale il seguente teorema.

TEOREMA 3.1 (Assegnamento di $\eta \leq \nu + \min(m+r-1, \nu \cdot \max(m, r))$ poli).
Per quasi tutti i sistemi (1.1), si può progettare un controllore di ordine ν che assegna al sistema complessivo (1.3), di ordine $m + \nu$, $\eta \leq \min(m+r-1, \nu \cdot \max(m, r)) + \nu$ poli arbitrariamente vicini ad η specificati valori simmetrici; inoltre i rimanenti $n + \nu - \eta$ poli sono vincolati dall'equazione:

$$r(\lambda) = q_0(\lambda) + h_1 q_1(\lambda) + \dots + h_l q_l(\lambda) = 0, \quad (3.1)$$

dove:

$$l = \begin{cases} m(\nu+1) + \nu + r - 1 - \eta, & \text{se } r \leq m \\ r(\nu+1) + \nu + m - 1 - \eta, & \text{se } r > m \end{cases} \quad (3.2)$$

$q_0(\lambda), q_1(\lambda), \dots, q_l(\lambda)$ sono degli opportuni polinomi di grado al più

$n+1-\eta$ ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati η poli.

DIMOSTRAZIONE. Con il Teorema 3.2.1 si determinino una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$, tale che la matrice $A_0 = A + BK_0C$ sia ciclica con $r-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici, ed il polinomio

$$\hat{p}(\lambda) = \lambda^{n+1-r} + \alpha_1 \lambda^{n-r} + \dots + \alpha_{n+1-r} \quad (3.3)$$

degli autovalori residui.

Si determini quindi un vettore non nullo $f \in R^r$ tale che

$$\hat{p}(A_0)Bf = 0. \quad (3.4)$$

Allora, ponendo:

$$K = fk^T, H = fh^T, \quad k, h \in R^m, \quad (3.5)$$

dopo un opportuno cambiamento di variabile (vedi Lemma 3.4.1), la matrice dinamica (1.4) diventa:

$$\begin{bmatrix} A_{11} - b_1 k^T C_1 & A_{12} - b_1 k^T C_2 & b_1 h^T \\ 0 & A_{22} & 0 \\ -DC_1 & -DC_2 & W \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Gli autovalori di tale matrice sono quelli di A_{22} , che sono stati assegnati ad arbitrio, e quelli della matrice

$$\begin{bmatrix} A_{11} - b_1 k^T C_1 & b_1 h^T \\ -DC_1 & W \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Per il Teorema 2.3 ed il Lemma 3.4.1, per quasi tutti i sistemi (1.1), mediante opportuna scelta di k, h, D e W ,

$$\hat{\eta} \leq + \min((\nu+1)m, n+1-r) \quad (3.8)$$

autovalori della matrice (3.7) possono essere assegnati arbitrariamente vicini ad $\hat{\eta}$ specificati valori simmetrici con i rimanenti vincolati dall'equazione (3.1). Il teorema resta così dimostrato per il caso $r \leq m$; per il caso $r > m$ la dimostrazione segue in maniera analoga considerando la trasposta della matrice dinamica (1.4) ■

L'Algoritmo 2.1 e la dimostrazione del Teorema 3.1 consentono di dare il seguente algoritmo di progetto.

ALGORITMO 3.1 (Progetto di un compensatore di ordine ν per l'assegnamento di $\eta \leq \min(m+r-1 + \nu \cdot \max(m,r), n) + \nu \text{ poli}$).

PASSO 1. Se $r > m$ si sostituisca la terna (A, B, C) con la sua duale (A^T, C^T, B^T) altrimenti si vada al passo successivo.

PASSO 2. Mediante l'Algoritmo 3.3.1 si calcolino una matrice $K_0 \in R^{r \times m}$, tale che $A+BK_0C$ sia ciclica con $r-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $r-1$ specificati valori simmetrici, ed il polinomio

$$\hat{p}(\lambda) = \lambda^{n-r+1} + \alpha_1 \lambda^{n-r} + \dots + \alpha_{n+1-r} \quad (3.9)$$

degli autovalori residui.

PASSO 3. Si calcolino un vettore non nullo $f \in R^r$, tale che

$$\hat{p}(A+BK_0C)Bf = 0, \quad (3.10)$$

l' $(n-r)$ -vettore

$$a = (\alpha_{n+1-r} \quad \alpha_{n-r} \quad \dots \quad \alpha_1 \quad 1)^T \quad (3.11)$$

e la matrice $\hat{C} \in R^{m \cdot (n+1-r)}$ mediante la formula:

$$\hat{C} = (Bf (A+BK_0 C)Bf \dots (A+BK_0 C)^{n-r} Bf) \begin{bmatrix} \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r-1} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-r-1} & \alpha_{n-r-2} & \dots & 1 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

PASSO 4. Si eseguano i passi 4-8 dell'Algoritmo 2.1 sostituendo, ad ad n, n+1-r e, ad η , $\eta+1-r$ ■

6.4 ESERCIZI

- 4.1 - Scrivere dei sottoprogrammi al calcolatore che implementino gli algoritmi di progetto 2.1 e 3.1.
- 4.2 - Fare un confronto tra gli algoritmi di progetto dei controllori non interagenti e di quelli interagenti.
- 4.3 - Dare un esempio di sistema stabilizzabile mediante un controllore di tipo (1.2) instabile.
- 4.4 - Usando l'Algoritmo 3.1, progettare, per il sistema dell'Esempio 5.6.1, un controllore del primo ordine tale che il sistema complessivo abbia un polo in -2 e gli altri in -1.
- 4.5 - Esplorare numericamente la diversa sensibilità dei poli tra i sistemi accoppiati con controllori non interagenti e quelli accoppiati con controllori interagenti.

6.5 BIBLIOGRAFIA

Il Lemma 1.1 è dovuto a Balestrino e Celentano [3]. I Teoremi 2.1 e 2.2 sono dovuti, rispettivamente, ad Ahmari e Vacroux [2] e Brash e Pearson [1]; le dimostrazioni qui riportate insieme con i

Teoremi 2.3 e 3.1 si possono trovare in Balestrino e Celentano [3].

- [1] T.M. BRASH and J.B. PEARSON, Pole Placement Using Dynamic Compensators, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. AC - 15, pp. 34-43, 1970.
- [2] R. AHMARI and A.G. VACROUX, On Pole Assignment in Linear Systems with Fixed Order Compensators, Int. J. Control, Vol. 17, No. 2, pp. 397-404, 1973.
- [3] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, Dynamic Controllers in Linear Multivariable Systems, da apparire su Automatica, July 1981.

APPENDICE

Il polinomio caratteristico della matrice $\hat{A}_c$ (2.9), per la regola di Laplace applicata alle ultime ν colonne di $\lambda I - \hat{A}_c$, vale:

$$a_c(\lambda) = \lambda^{n+\nu} + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \alpha_c = |\lambda I - \hat{A}_c| =$$

$$\left| \lambda I - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha^T & -\hat{C}^T \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \lambda I - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -w_\nu & -w_{\nu-1} & \dots & -w_1 \end{pmatrix} \right| +$$

$$- \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ k_1^T \hat{C} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ w_\nu & w_{\nu-1} & \dots & w_1 \end{pmatrix} \right| + \dots$$

$$+ (-1)^\nu \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_\nu^T \hat{C} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= (\lambda^n + v_{n-1}^T(\lambda)(\alpha + \hat{C}^T k_0)) p_0(\lambda) + v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T k_1 p_1(\lambda) + \dots +$$

$$+ v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T k_\nu p_\nu(\lambda), \quad (A1)$$

dove:

$$p_0(\lambda) = \lambda^\nu + w_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + w_\nu = v_\nu^T(\lambda) p_0 = \lambda^\nu + v_{\nu-1}^T(\lambda) \pi_0$$

$$p_1(\lambda) = \lambda^{\nu-1} + w_1 \lambda^{\nu-2} + \dots + w_{\nu-1} = v_\nu^T(\lambda) p_1$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (A2)$$

$$p_{\nu-1}(\lambda) = \lambda + w_1 = v_\nu^T(\lambda) p_{\nu-1}$$

$$p_\nu(\lambda) = 1 = v_\nu^T(\lambda) p_\nu,$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
 a_c(\lambda) &= \lambda^{n+\nu} + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \alpha_c = \lambda^{n+\nu} + v_{n-1}^T(\lambda) \alpha + a(\lambda) v_{\nu-1}^T(\lambda) \pi_0 + \\
 &+ v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T (k_0 p_0^T + k_1 p_1^T + \dots + k_\nu p_\nu^T) v_\nu(\lambda) = \\
 &= \lambda^{n+\nu} + \lambda^\nu v_{n-1}^T(\lambda) \alpha + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) S_\nu(a) \pi_0 + \\
 &+ v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T (k_0 \quad k_1 \quad \dots \quad k_\nu) (p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_\nu)^T v_\nu(\lambda). \quad (A3)
 \end{aligned}$$

Se si pone:

$$(q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{\nu+1}) = (k_0 \quad k_1 \quad \dots \quad k_\nu) (p_0 \quad p_1 \quad \dots \quad p_\nu)^T, \quad (A4)$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \alpha_c &= \lambda^\nu v_{n-1}^T(\lambda) \alpha + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) S_\nu(a) \pi_0 + \\
 &+ v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{\nu+1}) (1 \quad \lambda \quad \dots \quad \lambda^\nu)^T = \\
 &= \lambda^\nu v_{n-1}^T(\lambda) \alpha + v_{n+\nu-1}^T(\lambda) S_\nu(a) \pi_0 + v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T q_1 + \lambda v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T q_2 + \\
 &\dots + \lambda^\nu v_{n-1}^T(\lambda) \hat{C}^T q_{\nu+1} = \\
 &v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} + S_\nu(a) \pi_0 + \begin{pmatrix} \hat{C}^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0^T \\ \hat{C}^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{pmatrix} q_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0^T \\ 0^T \\ \vdots \\ \hat{C}^T \end{pmatrix} q_{\nu+1} \right] = \\
 &= v_{n+\nu-1}^T(\lambda) \left[\begin{pmatrix} S_{\nu+1}(\hat{C}^T) & S_\nu(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{\nu+1} \\ \pi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \right] \quad (A5)
 \end{aligned}$$

da cui la (2.13).

CAPITOLO VII

SINTESI DEI SISTEMI DI CONTROLLO MULTIVARIABILI

7.1 INTRODUZIONE E RISULTATI PRELIMINARI

A conclusione di quest'opera si ritiene opportuno sviluppare, quale applicazione della teoria dell'assegnamento dei poli sviluppata nei capitoli precedenti e per il maggior risvolto applicativo, la sintesi di un sistema di controllo la cui uscita risulti asservita ad un riferimento, nonostante la presenza di disturbi e di variazioni parametriche dell'impianto, o semplicemente regolata, con dinamica arbitraria.

Più precisamente, dato il sistema (che d'ora in avanti verrà chiamato processo o impianto) descritto dalle equazioni:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Md \quad (1.1a)$$

$$y = Cx + Nd, \quad (1.1b)$$

dove $x \in R^n$ è lo stato, $u \in R^r$ è l'ingresso controllante, il cui valore può essere variato dall'esterno, $y \in R^m$ è l'uscita da controllare, $d \in R^q$ è il disturbo, il cui valore non può essere fissato o variato dall'esterno, ed A, B, C, M, N sono matrici reali costanti di dimensioni opportune con $\text{rango} B = r$ e $\text{rango} C = m$, i problemi di sintesi che verranno trattati in questo capitolo sono i seguenti.

PROBLEMA 1.1 (Sintesi di un sistema di regolazione). Dato l'impianto (1.1) ed eventualmente un riferimento $v \in R^m$ (variabile esterna

all'impianto), sintetizzare un controllore lineare e stazionario che, collegato all'impianto come in Fig. 1.1, renda il sistema di controllo complessivo:

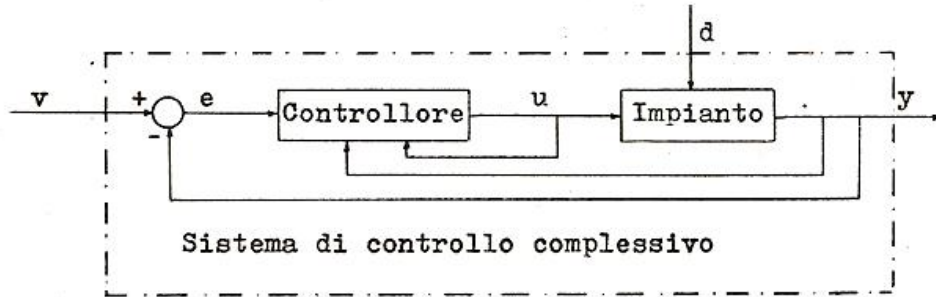


Fig. 1.1

- i) astatico rispetto a disturbi d $\mathcal{L}$ -trasformabili con valori finali costanti, cioè stabile asintoticamente con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \text{ per } v = 0 \text{ e } \forall d(t) \mathcal{L}\text{-trasformabile con valore finale costante; } (1.2)$$

- ii) con poli preassegnati o giacenti in prefissate regioni del piano complesso.

PROBLEMA 1.2 (Sintesi di un sistema di asservimento). Dato l'impianto (1.1) ed un referimento $v \in \mathbb{R}^m$ (variabile esterna all'impianto), sintetizzare un controllore lineare e stazionario che, collegato all'impianto come in Fig. 1.1, ed usando come uscita l'errore e , renda il sistema di controllo complessivo:

- i) astatico rispetto a disturbi d e riferimenti v $\mathcal{L}$ -trasformabili con valori finali costanti, cioè stabile asintoticamente e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \forall d, v \mathcal{L}\text{-trasformabili e con valori finali costanti; } (1.3)$$

ii) con poli preassegnati e giacenti in prefissate regioni del piano complesso.

Per risolvere tali problemi si premettono i seguenti risultati.

TEOREMA 1.1 (Condizioni di astaticismo). Un sistema descritto da equazioni di tipo (1.1), supposto stabile asintoticamente, è astatico rispetto a disturbi $\mathcal{L}$ -trasformabili con valori finali costanti se e solo se:

$$\mathcal{R} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{R} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \iff \text{rango} \begin{bmatrix} A & M \\ C & N \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

DIMOSTRAZIONE. Nel dominio di Laplace l'evoluzione del sistema (1.1) per $v = 0$ è data da:

$$y(s) = (C(sI-A)^{-1}M + N)d(s) + C(sI-A)^{-1}x_0. \quad (1.5)$$

e quindi il sistema (1.1) è astatico se e solo se:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (C(sI-A)^{-1}M+N)sd(s) + sC(sI-A)^{-1}x_0 = \\ &= (C(-A)^{-1}M+N)d_\infty = 0, \quad \forall d_\infty \in \mathbb{R}^q \iff CA^{-1}M = N, \end{aligned} \quad (1.6)$$

avendo posto $d_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} d(t)$ e tenuto conto dell'ipotesi di asintotica stabilità di A .

Ma:

$$CA^{-1}M = N \iff \mathcal{R} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{R} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Infatti, se $CA^{-1}M = N$, posto $A^{-1}M = L$, si ha:

$$\begin{aligned} AL = M \\ CL = N \implies \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \implies \mathcal{R} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{R} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Viceversa, se $\mathcal{R} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \supseteq \mathcal{R} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ allora esiste una matrice L tale che:

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} AL = M \\ CL = N \end{matrix} \implies CA^{-1}M = N. \quad (1.9)$$

Il teorema resta così dimostrato ■

LEMMA 1.1 (Sulla raggiungibilità di certe coppie di matrici).
Siano $(A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}, C \in R^{m \times n})$ ed $(\hat{A} \in R^{(n+m) \times (n+m)}, \hat{B} \in R^{(n+m) \times r}, \hat{C} \in R^{2m \times (n+m)})$ due terne di matrici con:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

allora:

- i) la coppia $(\hat{A}, \hat{B})$ è raggiungibile se e solo se la coppia (A, B) è raggiungibile e

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m; \quad (1.11)$$

- ii) la coppia $(\hat{A}, \hat{C})$ è osservabile se e solo se lo è la coppia (A, C) .

DIMOSTRAZIONE. Si ricordi dalla Teoria dei Sistemi che la condizione di raggiungibilità (risp. di osservabilità) di una data coppia $(F \in R^{\nu \times \nu}, G \in R^{\nu \times \rho})$ (risp. $F \in R^{\nu \times \nu}, H \in R^{\mu \times \nu}$) è equivalente alla condizione:

$$\text{rango}(\lambda I - F \quad G) = \nu \quad (\text{risp. } \text{rango} \begin{bmatrix} \lambda I - F \\ H \end{bmatrix} = \nu), \quad \forall \lambda \in C. \quad (1.12)$$

Pertanto la coppia $(\hat{A}, \hat{B})$ è raggiungibile se e solo se:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 & B \\ -C & \lambda I & 0 \end{bmatrix} = n+m, \quad \forall \lambda \in C. \quad (1.13)$$

Per $\lambda \neq 0$ tale condizione è verificata per la raggiungibilità della coppia (A, B) e per la presenza delle m colonne $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda I \end{bmatrix}$; per

$\lambda = 0$ essa segue dalla (1.11).

Inversamente, se la (1.13) è soddisfatta, le prime n righe sono linearmente indipendenti $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ e quindi la coppia (A, B) è raggiungibile; inoltre per $\lambda = 0$ si ha la (1.11).

Analogamente, la coppia $(\hat{A}, \hat{C})$ è osservabile se e solo se:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \lambda I - A & 0 \\ -C & \lambda I \\ C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = n+n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.14)$$

ovvero, per la presenza delle n righe $(0 \ I)$, se e solo se:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ -C \\ C \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n. \quad (1.15)$$

Tale condizione è equivalente all'osservabilità della coppia (A, C) ed il lemma resta dimostrato ■

7.2 SINTESI DI UN SISTEMA DI REGOLAZIONE MEDIANTE PSEUDO-OSSERVATORE

Il metodo più semplice per risolvere il Problema 1.1 è quello di fare ricorso ad un controllore avente la struttura mostrata in Fig. 2.1, in cui lo pseudo-osservatore ^(o) è descritto dalle equazioni:

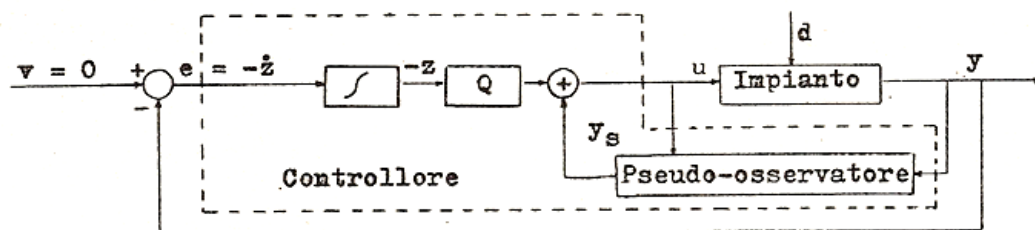


Fig. 2.1

^(o) Si noti che lo pseudo-osservatore per $d = 0$ è un osservatore dell'impianto.

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (2.1a)$$

$$y_s = Hw + Ky, \quad (2.1b)$$

con $w \in \mathbb{R}^n$ e

$$VA - FV = GC. \quad (2.2)$$

Infatti vale il seguente teorema.

TEOREMA 2.1 (Sintesi di un sistema di regolazione mediante pseudo-osservatore). Con riferimento alla Fig. 2.1, se l'impianto (descritto dalle (2.1)) è raggiungibile ed osservabile ed inoltre

$$\text{range} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (2.3)$$

quale che siano le matrici M ed N, è possibile determinare una matrice Q ed uno pseudo-osservatore descritto dalle (2.1) di ordine n oppure n-m, oppure ν_0 , ecc. (vedi Capitolo V) in grado di risolvere il Problema 1.1.

DIMOSTRAZIONE. Effettuando il cambiamento di variabile

$$\xi = Vx - w \quad (2.4)$$

ed usando la (2.2), il sistema complessivo di Fig. 1.1 è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+B(KH) & \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} & -BQ & -BH \\ C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BKN+M \\ N \\ VM-GN \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_m \\ 0 \end{bmatrix} v = \\ &= \tilde{A} \xi + \tilde{M}d + \tilde{B}v \end{aligned} \quad (2.5a)$$

$$y = (C \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} x \\ z \\ \xi \end{bmatrix} + Nd = \tilde{C}\xi + \tilde{N}d. \quad (2.5b)$$

La matrice dinamica $\tilde{A}$ di tale sistema può essere messa nella forma:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} + \hat{B}(\hat{K} \ H) & \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{V} \ 0 \end{bmatrix} & -\hat{B}H \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

in cui:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad \hat{K} = (K \ -Q). \quad (2.7)$$

Dalla (2.6) segue che gli autovalori di $\tilde{A}$ sono quelli di F e quelli di $\hat{A} + \hat{B}(\hat{K} \ H) \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{V} \ 0 \end{bmatrix}$. Poichè l'impiante è raggiungibile ed osservabile ed è soddisfatta la (2.3), per il Lemma 1.1 la terna $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ è completa. Ciò, insieme al fatto che:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{V} \ 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} + m \quad (2.8)$$

e

$$(\hat{K} \ H) \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{V} \ 0 \end{bmatrix} = (KC + HV \ -Q), \quad (2.9)$$

consente di concludere che gli autovalori di $\tilde{A}$ possono essere fissati ad arbitrio sia con $\nu = n$, sia con $\nu = n-m$, sia con $\nu = \nu_0$, ecc. (vedi i Teoremi 5.2.1, 5.3.1, 5.5.1, ecc., rispettivamente).

Resta da dimostrare che, se gli autovalori di $\tilde{A}$ sono a parte reale negativa, il sistema complessivo (2.5) soddisfa la condizione di asintotismo (1.4) del Teorema 1.1 quale che siano le matrici M ed N .

Si ha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{M} \\ \tilde{C} & \tilde{N} \end{bmatrix} = \text{rango} \left(\begin{array}{ccc|c} A+B(K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} & -BQ & -BH & BKN+M \\ C & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & F & VM-GN \\ \hline 0 & 0 & 0 & N \end{array} \right) =$$

$$= \text{rango} \begin{bmatrix} A+B(K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} & -BQ & -BH & BKN+M \\ C & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & F & VM-GN \end{bmatrix} =$$

$$\text{rango}(\tilde{A} \ \tilde{M}) = n+m, \quad \forall M, N; \quad (2.10)$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} A+B(K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} & -BQ & -BH \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} =$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A+B(K \ H) \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} & -BQ & -BH \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} = \text{rango} \tilde{A} = n+m, \quad (2.11)$$

dove l'ultima equaglianza della (2.10) (risp. della (2.11)) segue dal fatto che $\tilde{A}$ è stabile asintoticamente e quindi non singolare.

Pertanto

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{M} \\ \tilde{C} & \tilde{N} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}, \quad \forall M, N. \quad (2.12)$$

ed il teorema resta dimostrato ■

Gli algoritmi di progetto relativi al Teorema 2.1 sono una naturale conseguenza di quelli del Capitolo V. Per maggiore comodità del lettore nel seguito se ne riportano due tra i più significativi.

ALGORITMO 2.1 (Sintesi di un sistema di regolazione mediante pseudo-osservatore di ordine $n-m$).

PASSO 1. Si scelga

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-m} & -a_{n-m-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

dove

$$d(\lambda) = \lambda^{n-m} + d_1 \lambda^{n-m-1} + \dots + d_{n-m} \quad (2.14)$$

ha per radici un preassegnate insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 2. Si scelga a caso una matrice $G \in R^{(n-m) \times m}$ e, mediante le (4.1.16), si calcoli la matrice $V \in R^{(n-m) \times n}$ soluzione dell'equazione:

$$VA - FV = GC. \quad (2.15)$$

PASSO 3. Se

$$\text{range} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = n \quad (2.16)$$

si vada al passo successivo altrimenti si ritorni al passo 2.

PASSO 4. Mediante l'Algoritmo 2.2.1 si calcoli una matrice $\bar{K} = (K \ -Q \ H) \in R^{r \times (n+m)}$ tale che gli autovalori della matrice

$$\hat{A} + \hat{B}\bar{K}\bar{C} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (K \ -Q \ H) \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \\ V & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

coincidano con un preassegnate insieme simmetrico di numeri complessi.

PASSO 5. Le equazioni dello pseudo-osservatore dello schema di Fig. 2.1 sono:

$$\dot{\hat{w}} = F\hat{w} + V\hat{B}u + G\hat{y} \quad (2.18a)$$

$$\hat{y}_s = H\hat{w} + K\hat{y} \quad (2.18b)$$

ALGORITMO 2.2 (Sintesi di un sistema di regolazione mediante pseudo-osservatore di ordine ν_0).

PASSO 1. Si scelgano ad arbitrio una matrice $\hat{K}_0 = (K_0 \ -Q_0) \in R^{r \times 2m}$ ed un vettore $f \in R^r$ tali che la coppia $(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}_0\hat{C}, \hat{B}f)$ sia raggiungibile, dove:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

PASSO 2. Mediante l'Algoritmo 2.2.1 si determini un vettore

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ -l_2 \end{bmatrix} \in R^{n+m}, \quad l_1 \in R^n, \quad l_2 \in R^m \quad (2.20)$$

tale che gli autovalori della matrice $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}_0\hat{C} + \hat{B}fl^T$ coincidano con un preassegnato insieme simmetrico di $n+m$ numeri complessi.

PASSO 3. Mediante l'Algoritmo 4.4.1 si calcolino le matrici $V \in R^{n_0 \times n}$, $F \in R^{n_0 \times n_0}$, $G \in R^{n_0 \times m}$ ed i vettori $h \in R^{n_0}$, $k \in R^m$ tali che:

$$VA - FV = GC, \quad h^T V + k^T C = l_1^T \quad (2.21)$$

con spettro di F preassegnato.

PASSO 4. Le equazioni dello pseudo-osservatore dello schema di Fig. 2.1 sono:

$$\dot{w} = Fw + VBu + Gy \quad (2.22a)$$

$$y_s = (K_0 + fk^T)y + fh^T w, \quad (2.22b)$$

mentre la matrice Q vale:

$$Q = Q_0 + fl_2^T \quad (2.23)$$

ESEMPIO 2.1. Per l'impianto raggiungibile ed osservabile di Fig. 2.2, ovvero descritto dalle equazioni:

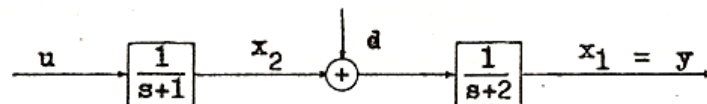


Fig. 2.2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d, \quad y = (1 \ 0)x,$$

sintetizzare un controllore in modo da regolare la sua uscita y .

L'impianto è raggiungibile, osservabile e inoltre

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Pertanto, procedendo secondo l'Algoritmo 2.1, si ha:

Passo 1.

$$F = -3.$$

Passi 2-3. Per $G = I$ si ha:

$$V = C(A + 3I)^{-1} = (1 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = (1 \ -1/2);$$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = 2.$$

Passo 4. Il vettore $\bar{k} \in R^3$, tale che la matrice $\hat{A} + \hat{B}\bar{k}^T\bar{C}$, dove:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

ha per autovalori $-3, -2+j, -2-j$, vale:

$$\bar{k} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 11 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}^T \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0-15 \\ 2-17 \\ 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -15 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Passo 5. Le equazioni dello pseudo-osservatore sono:

$$\dot{w} = -3w - 1/2u + y, \quad y_s = 8w - 15y$$

mentre Q vale 15.

Ne segue che lo schema di controllo desiderato, nel dominio di Laplace, è quello di Fig. 2.3.

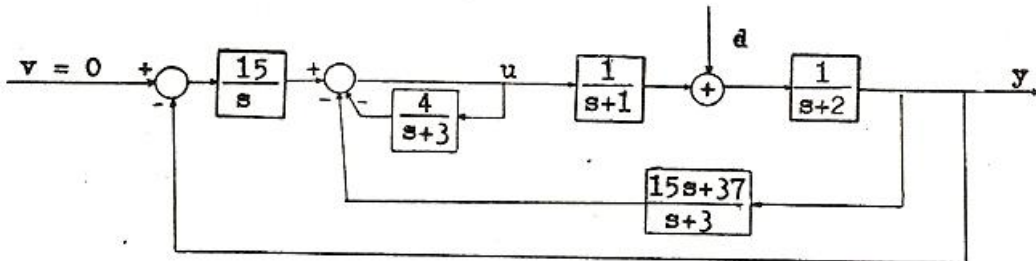


Fig. 2.3

Per verifica,

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{15(s+3)}{s^4 + 10s^3 + 38s^2 + 66s + 45}$$

che presenta un polo in -3 , che si cancella con lo zero, e gli altri in -3 , $-2-j$, $-2+j$ ▲

7.3 SINTESI DI UN SISTEMA DI REGOLAZIONE MEDIANTE COMPENSATORE

I risultati del Capitolo VI consentono di dare una diversa procedura di sintesi del Problema 1.1. Tale procedura è caratterizzata da un controllore la cui struttura è mostrata in Fig. 3.1, in cui

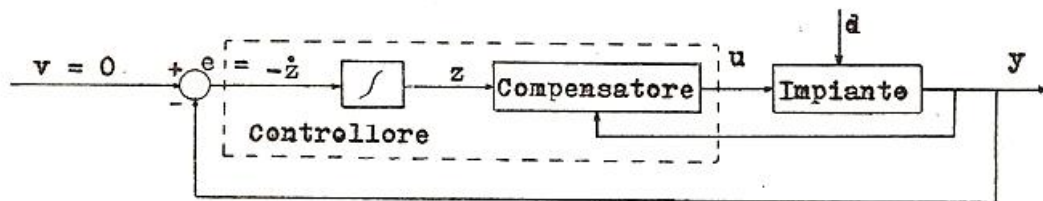


Fig. 3.1

il compensatore è descritto dalle equazioni:

$$\dot{w} = Ww + D_1 y + D_2 z \quad (3.1a)$$

$$u = Hw + Ky + Qz, \quad (3.1b)$$

con $w \in \mathbb{R}^n$ e W , D_1 , D_2 , H , K , Q matrici reali di dimensioni opportune.

Con riferimento a tale struttura vale il seguente teorema.

TEOREMA 3.1 (Sintesi di un sistema di regolazione mediante compensatore). Con riferimento alla Fig. 3.1, se l'impianto (descritto dalle (1.1)) è raggiungibile ed osservabile ed inoltre

$$\text{range} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m, \quad (3.2)$$

quale che siano le matrici M ed N è possibile sintetizzare un compensatore descritto dalle (3.1) di ordine $\nu = \min(\nu_o, \hat{\nu}_r)$, dove ν_o+1 è l'indice di osservabilità della coppia (A, C) e $\hat{\nu}_r+1$ è l'indice di raggiungibilità della coppia

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (3.3)$$

o di ordine più basso (vedi Capitolo VI), in grado di risolvere il Problema 1.1.

DIMOSTRAZIONE. Il sistema complessivo di Fig. 3.1 è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+BKC & BQ & BH \\ C & 0 & 0 \\ D_1C & D_2 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} M+BKN \\ N \\ D_1N \end{bmatrix} d = \\ &= \tilde{A}\xi + \tilde{B}v + \tilde{M}d \end{aligned} \quad (3.4a)$$

$$y = (C \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x \\ z \\ w \end{bmatrix} + Nd = \tilde{C}\xi + \tilde{N}d \quad (3.4b)$$

la cui matrice dinamica $\tilde{A}$ può essere messa nella forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C} & \hat{B}\hat{H} \\ \hat{D}\hat{C} & W \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \\ \hat{D} &= (D_1 \quad D_2), \quad \hat{K} = (K \quad Q). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Poichè l'impianto è raggiungibile ed osservabile ed è soddisfatta la (3.2), per il Lemma 1.1 la terna $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ è completa. Pertanto, in base al Teorema 6.2.2, gli autovalori di A possono essere assegnati ad arbitrio se $\nu = \min(\hat{\nu}_o, \hat{\nu}_r)$, dove $\hat{\nu}_o + 1$ è l'indice di osservabilità della coppia $(\hat{A}, \hat{C})$, ecc. (vedi Capitolo VI). Ma $\hat{\nu}_o = \nu_o$; infatti:

$$\begin{aligned} \text{rango}(C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{\nu_o} C^T) &= \text{rango} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots \\ 0 & I_m & \dots \end{bmatrix} \\ \dots (A^T)^{\nu_o} C^T \quad (A^T)^{\nu_o-1} C^T &= \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{\nu_o} C^T \\ I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \\ &= n + m; \end{aligned} \quad (3.7)$$

quindi $\min(\hat{\nu}_o, \hat{\nu}_r) = \min(\nu_o, \hat{\nu}_r)$.

Inoltre, poichè (vedi dimostrazione del Teorema 2.1)

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{M} \\ \tilde{C} & \tilde{N} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}, \quad \forall M, N \quad (3.8)$$

il teorema resta dimostrato ■

Gli algoritmi di progetto relativi al Teorema 3.1 possono essere riassunti come segue.

ALGORITMO 3.1 (Sintesi di un sistema di regolazione mediante compensatore).

PASSO 1. Mediante l'Algoritmo 6.2.1, oppure 6.3.1, applicato alla terna

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

si calcolino le matrici

$$W \in R^{p \times p}, \quad \hat{D} = (D_1 \ D_2) \in R^{p \times 2m}, \quad \hat{K} = (K \ Q) \in R^{r \times 2m}, \quad H \in R^{r \times p}. \quad (3.9)$$

PASSO 2. Le equazioni del compensatore di Fig. 3.1 sono:

$$\dot{\tilde{w}} = W\tilde{w} + D_1 y + D_2 z \quad (3.9a)$$

$$u = H\tilde{w} + Ky + Qz \quad (3.9b)$$

ESEMPIO 3.1. Si consideri l'impianto dell'Esempio 2.1. Essendo $\min(\hat{\nu}_r, \nu_o) = 1$, si vuole sintetizzare un compensatore del primo ordine in modo che il sistema di controllo complessivo, avente la struttura di Fig. 3.1, abbia i poli in $-3, -3, -2-j, -2+j$.

Si ha:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, seguendo l'Algoritmo 6.2.1, si ottiene:

$$K_o = 0; \quad r = 1; \quad a = (0 \ 2 \ 3 \ 1)^T;$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \pi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45-0 \\ 66-0 \\ 38-2 \\ 10-3 \end{bmatrix} \quad q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 45 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 52 \end{bmatrix}, \quad \pi_o = w_1 = 7;$$

$$(\hat{K}^T \ \hat{D}^T) \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 45 & 52 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{K} = (15 \ 52), \quad \hat{D} = (-105 \ -319).$$

Pertanto le equazioni del compensatore desiderate sono:

$$\dot{w} = -7w - 105y - 319z, \quad u = w + 15y + 52z$$

che danno luogo allo schema di controllo di Fig. 3.2.

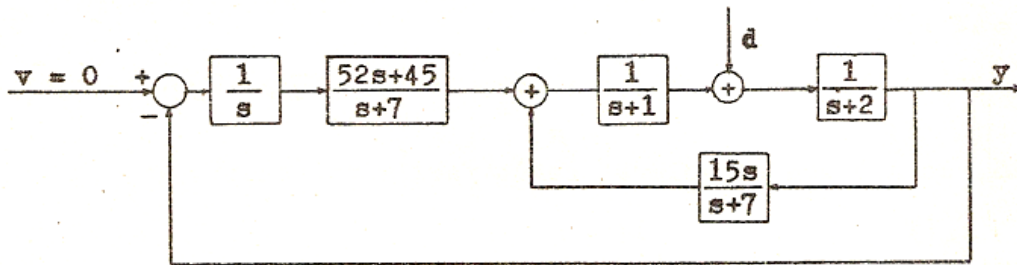


Fig. 3.2

Per verifica,

$$\frac{y(s)}{v(s)} = \frac{52s + 45}{s^4 + 10s^3 + 38s^2 + 66s + 45}$$

che ha per poli proprie $-3, -3, -2-j, -2+j$ Δ

7.4 ESTENSIONE DELLE PROCEDURE DI SINTESI AL CASO DEI SISTEMI DI ASSERVIMENTO

Le procedure di sintesi esposte nei paragrafi precedenti possono essere estese al caso dei sistemi di asservimento. Infatti vale il seguente risultato.

TEOREMA 4.1 (Sintesi di un sistema di asservimento). Se negli schemi di Fig. 2.1 e 3.1 si pone $v \neq 0$ gli Algoritmi 2.1 e 3.1 possono essere applicati anche per risolvere il Problema 1.2.

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla Fig. 2.1, assumendo come disturbo il vettore $\begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix}$ e come uscita l'errore e , si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \\ \dot{\tilde{s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+B(K \ H) & \begin{bmatrix} C \\ V \end{bmatrix} \\ & C \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & BKN+M \\ -I_m & N \\ 0 & VM-GN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix} = \\ &= \tilde{A}\tilde{\xi} + \tilde{M}\tilde{d} \end{aligned} \quad (4.1a)$$

$$e = v - y = \begin{bmatrix} -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_m & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ d \end{bmatrix} = \tilde{C}\tilde{\xi} + \tilde{N}\tilde{d} \quad (4.1b)$$

da cui, se $\tilde{A}$ è non singolare, segue facilmente che:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{M} \\ \tilde{C} & \tilde{N} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}, \quad \forall M, N. \quad (4.2)$$

Pertanto il sistema complessivo di Fig. 2.1, se si assume v come riferimento, è un sistema di asservimento (di tipo 1).

Analogo ragionamento vale per il sistema di Fig. 3.1 ■

ESEMPIO 4.1. Si consideri il sistema elettromeccanico di Fig. 4.1 costituito da un motore elettrico a corrente continua controllato sull'armatura

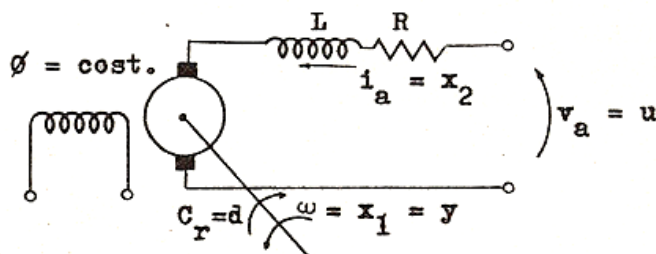


Fig. 4.1

Se si pone:

$x_1 = y = \omega =$ velocità angolare

$x_2 = i_a =$ corrente di armatura

$u = v_a =$ tensione di armatura

$d = C_r =$ disturbo di coppia

$J =$ momento d'inerzia

K_V = costante di tensione

K_T = costante di coppia

B = coefficiente di attrito viscoso,

tale sistema è descritto dalle equazioni:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B/J & K_T/J \\ -K_V/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1/J \\ 0 \end{bmatrix} d, \quad y = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Nell'ipotesi che:

$$R = 1,4\Omega, \quad L = 25,5\text{mH}, \quad J = 3,23 \text{ Nmsec}^2/\text{rad}, \quad B = 0,032\text{Nmsec}/\text{rad}, \\ K_T = 2,57\text{Nm}/\text{A} (= K_V)$$

e la corrente di armatura sia accessibile, progettare un controllore tale che il sistema complessivo sia un regolatore di velocità (oppure un sistema di asservimento) con poli in $-10-j$, $-10+j$, -50 .

Poichè è disponibile lo stato, lo schema di controllo di Fig.2.1 si può semplificare come in Fig. 4.2. In tal modo la matrice dina-

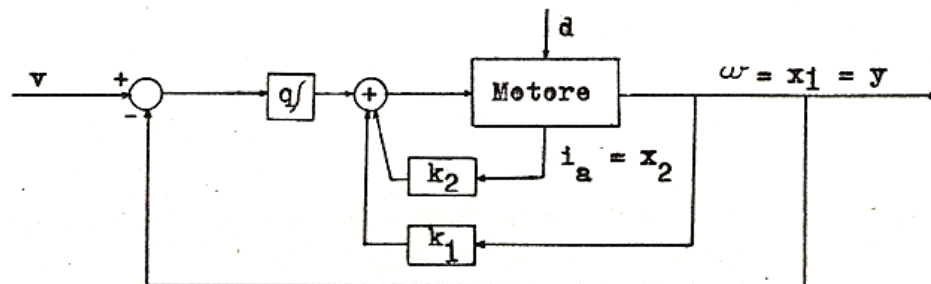


Fig. 4.2

amica (2.6) diventa:

$$\tilde{A} = \hat{A} + \hat{B}\hat{K}\hat{C},$$

dove:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.785 & 0 \\ -102 & -55.6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 39.68 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, \quad \hat{K} = k^T = (k_1 \quad k_2 \quad -q).$$

Pertanto:

$$k = \begin{bmatrix} 81.7 & 55.61 & 1 \\ 55.61 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 31.54 & -1754.2 \\ 39.68 & -2206.2 & 119447.6 \\ 0 & 0 & 31.54 \end{bmatrix}^T - 1 \begin{bmatrix} 0-5050 \\ 81.7-1101 \\ 55.61-70 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -32.613 \\ -0.36 \\ -161.9 \end{bmatrix},$$

ovvero:

$$k_1 = -32.613; \quad k_2 = -0.36; \quad q = 161.9 \quad \blacktriangle$$

7.5 SINTESI MEDIANTE CONTROLLORI PID

I metodi per sintetizzare un sistema di regolazione (risp. di asservimento) presentati nei paragrafi precedenti portano a schemi di controllo abbastanza complessi che possono risultare non convenienti da un punto di vista ingegneristico.

In questo paragrafo si dà una nuova procedura di sintesi caratterizzata dallo schema di controllo di Fig. 5.1 che fa uso esclusivamente di controllori standard quali quelli proporzionali-integrali

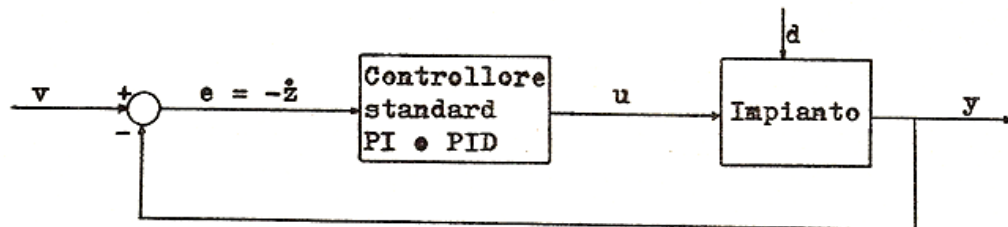


Fig. 5.1

li (PI) e quelli, più generali, proporzionali-integrali-derivativi (PID). Tale schema, oltre che semplice, risulta pratico poichè unità PI e PID sono facilmente reperibili in commercio.

Nell'ipotesi che il controllore standard sia un PID descritto dall'equazione:

$$u = \left(P + Q \int (.) dt + R \frac{d}{dt} \right) (v - y), \quad (5.1)$$

dove $P, Q, R \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $v \in \mathbb{R}^m$, usando la trasformata di Laplace, dalle (1.1) e (5.1), per condizioni iniziali nulle, si ha:

$$y(s) = (C(sI_n - A)^{-1}B)(P + Q/s + R s)(v(s) - y(s)) + (C(sI_n - A)^{-1}M + N)d(s) \quad (5.2)$$

da cui, per $v = 0$:

$$y(s) = \left(I_m + \frac{C(sI_n - A)^{-1}B(sP + Q + s^2R)}{s} \right)^{-1} (C(sI_n - A)^{-1}M + N)d(s) \quad (5.3)$$

mentre per $v \neq 0$:

$$e(s) = \left(I_m + \frac{C(sI_n - A)^{-1}B(sP + Q + s^2R)}{s} \right)^{-1} (v(s) - (C(sI_n - A)^{-1}M + N)d(s)). \quad (5.4)$$

Pertanto, se $C(-A)^{-1}BQ$ è non singolare ed il sistema a ciclo chiuso è stabile asintoticamente, per $v(t)$ e $d(t)$ con valori finali costanti, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = 0 \quad (5.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = 0 \quad (5.6)$$

e cioè il sistema di Fig. 5.1 è un sistema di regolazione per $v = 0$ ed un sistema di asservimento di tipo 1 per $v \neq 0$.

Naturalmente vale un discorso analogo se il controllore standard è un PI, cioè se la matrice R nella (5.1) è nulla.

Per stabilizzare il sistema a ciclo chiuso, più in particolare per ottenere transitori soddisfacenti, il controllore PID può essere progettato in modo da posizionare i poli in specificate regioni del piano complesso.

A tal uopo valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 5.1 (Assegnamento di $\nu \leq \min(3r, m+n)$ poli). Per quasi tutti gli impianti (1.1) con $r \geq m$, si può progettare un controllore PID che assegna al sistema a ciclo chiuso di Fig. 5.1 (il cui ordine è $n+m$) $\nu \leq \min(3r, n+m)$ poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici; inoltre i rimanenti $n+m-\nu$ poli sono vincolati dall'equazione:

$$\rho(s) = q_0(s) + h_1 q_1(s) + \dots + h_l q_l(s) = 0, \quad (5.7)$$

dove: $l = 3r - \nu$, $q_0(s), q_1(s), \dots, q_l(s)$ sono opportuni polinomi di grado al più $n+m-\nu$ ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati ν poli.

DIMOSTRAZIONE. Ponendo

$$\dot{z} = y - v \quad (5.8)$$

ed usando la trasformata di Laplace, dalle (1.1) e (5.1), per condizioni iniziali nulle, si ha:

$$s \begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B(sP+Q+s^2R) \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -I_m \end{bmatrix} v(s) + \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} d(s) \quad (5.9a)$$

$$y(s) = (C \quad 0) \begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \end{bmatrix} + Nd(s) \quad (5.9b)$$

da cui:

$$y(s) = \frac{(C \quad 0) \text{Agg}(sI_{n+m} - A(s))}{|sI_{n+m} - A(s)|} \begin{bmatrix} 0 \\ -I_n \end{bmatrix} v(s) +$$

$$+ \left(\frac{(C \ 0) \text{Agg}(sI_{n+m} - A(s)) \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}}{|sI_{n+m} - A(s)|} + N \right) d(s), \quad (5.10)$$

dove:

$$\begin{aligned} A(s) &= \begin{bmatrix} A & -B(Q+sP+s^2R) \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (Q+sP+s^2R) \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} = \\ &= \hat{A} - \hat{B}K(s)\hat{C}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

con le ovvie posizioni:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad K(s) = Q+sP+s^2R. \quad (5.12)$$

Dalla (5.10) segue che i poli del sistema a ciclo chiuso sono le radici del polinomio:

$$p(s) = |sI_{n+m} - A(s)|. \quad (5.13)$$

Ora, se la coppia (A, C) è osservabile è facile verificare che lo è anche la coppia $(\hat{A}, \hat{C})$; inoltre, se la coppia (A, B) è raggiungibile, poichè per quasi tutti gli impianti (1.1) con $r \geq m$,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m, \quad (5.14)$$

per il Lemma 1.1 anche la coppia $(\hat{A}, \hat{B})$ è raggiungibile. Pertanto per quasi tutte le matrici $\hat{Q} \in R^{r \cdot m}$ e per quasi tutti i vettori $f \in R^m$ la coppia (A_0, c_0) è osservabile, dove:

$$A_0 = \hat{A} - \hat{B}\hat{Q}\hat{C} = \begin{bmatrix} A & -B\hat{Q} \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = f^T \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & f^T \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Scelti ad arbitrio una tale matrice $\hat{Q}$ ed un tale vettore f , si ponga:

$$\begin{aligned} a(s) &= |sI_{n+m} - A_0| = s^{n+m} + a_1 s^{n+m-1} + \dots + a_{n+m} = \\ &= s^{n+m} + v_{n+m-1}^T(s) \hat{a} = v_{n+m}^T(s) a, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{n+m-1} & a_{n+m-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n+m-2} & a_{n+m-3} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o \\ c_o A_o \\ \cdot \\ \cdot \\ c_o A_o^{n+m-1} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$P = p_f f^T, \quad Q = \hat{Q} + q_f f^T, \quad R = r_f f^T. \quad (5.18)$$

Si ha allora:

$$TA(s)T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{a} - TB(q_f + sp_f + s^2 r_f) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Ma:

$$TB = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

dove:

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} a_{n+m-2} & a_{n+m-3} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n+m-3} & a_{n+m-4} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o A_o \\ c_o A_o^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_o A_o^{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{(n+m-1).r} \quad (5.21)$$

Pertanto il polinomio (5.13) vale:

$$p(s) = v_{n+m}^T(s)p = |sI_{n+m} - TA(s)T^{-1}| = s^{n+m} + v_{n+m-1}^T(s) \begin{pmatrix} \hat{B}_1 q_f \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \hat{B}_1 p_f \\ 0 \end{pmatrix} + s^2 \begin{pmatrix} \hat{B}_1 r_f \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= v_{n+m}^T(s)a + v_{n+m}^T(s) \left[\begin{pmatrix} \hat{B}_1 q_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{B}_1 p_f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{B}_1 r_f \end{pmatrix} \right] \quad (5.22)$$

da cui, usando la notazione (3.1.4):

$$p = S_3(\hat{B}_1) \begin{pmatrix} q_f \\ p_f \\ r_f \end{pmatrix} + a, \quad (5.23)$$

con (vedi Appendice) :

$$\text{rango } S_3(\hat{B}_1) \geq \min(3r, n+m), \text{ per quasi tutti gli impianti (1.1).} \quad (5.24)$$

Sia ora

$$d(s) = s^\nu + d_1 s^{\nu-1} + \dots + d_\nu = v_\nu^T(s)d \quad (5.25)$$

il polinomio avente per radici i $\nu \leq \min(3r, n+m)$ poli che si vogliono assegnare e

$$\rho(s) = \rho_0 s^{n+m-\nu} + \rho_1 s^{n+m-\nu-1} + \dots + \rho_{n+m-\nu} = v_{n+m-\nu}^T(s)\rho \quad (5.26)$$

il polinomio che, moltiplicato per $d(s)$, fornisce $-p(s)$.

Devrà allora aversi:

$$p = -S_{n+m-\nu+1}(d)\rho, \quad (5.27)$$

ovvero, per la (5.23):

$$\underbrace{S_3(\hat{B}_1)}_{3r+m+n+1-\nu} \begin{pmatrix} q_f \\ p_f \\ r_f \end{pmatrix} = -a. \quad (5.28)$$

Se la (5.24) è soddisfatta allora, tenendo presente la dimostrazione del Teorema 3.2.1, per quasi tutti i polinomi $d(s)$

$$\text{rango} \left[S_3(\hat{B}_1) \ S_{n+m+1-\nu}(d) \right] = n+m+1. \quad (5.29)$$

Ne segue che, se la (5.24) è soddisfatta per una certa configurazione di poli e la (5.29) non lo è, si può assegnare una configurazione molto vicina a quella precedente in modo che lo sia. Pertanto per quasi tutti gli impianti (1.1) la (5.28) può essere risolta e l'insieme dei vettori p che la soddisfano risulta dato dalla varietà lineare (5.7).

Il teorema resta così dimostrato ■

Il risultato stabilito dal Teorema 5.1, in vista del Lemma 3.4.1, può essere migliorato come segue.

TEOREMA 5.2 (Assegnamento di $\nu \leq \min(3r+m-1, n+m)$ poli). Per quasi tutti gli impianti (1.1) con

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (5.30)$$

si può progettare un controllore PID che assegna al sistema a ciclo chiuso di Fig. 5.1 (il cui ordine è $n+m$) $\nu \leq \min(3r+m-1, n+m)$ poli arbitrariamente vicini a ν specificati valori simmetrici; inoltre i rimanenti $n+m-\nu$ poli sono vincolati dalla seguente equazione:

$$p(s) = q_0(s) + h_1 q_1(s) + \dots + h_l q_l(s) = 0, \quad (5.31)$$

dove: $l = 3r+m-1-\nu$, $q_0(s), q_1(s), \dots, q_l(s)$ sono polinomi opportuni di grado al più $n+m-\nu$ ed $h_1, h_2, \dots, h_l$ sono scalari che possono essere variati ad arbitrio lasciando inalterati i prefissati ν poli.

DIMOSTRAZIONE. In base al Teorema 3.3.1 è possibile determinare una matrice $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ in modo che la matrice

$$A_0 = \hat{A} - \hat{B}\hat{Q}\hat{C} = \begin{bmatrix} A & -B\hat{Q} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

sia ciclica con $m-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $m-1$ prefissati valori simmetrici. Dette quindi $p_{n+1}(s)$ il polinomio avente

per radici gli $n+1$ autovalori residui di A_0 si determini un vettore non nullo $f \in R^m$ tale che:

$$p_{n+1}(A_0^T) \hat{C}^T f = 0. \quad (5.33)$$

Penende allora:

$$P = p_f f^T, \quad Q = \hat{Q} + q_f f^T, \quad R = r_f f^T, \quad (5.34)$$

si ottiene:

$$A(s) = A_0 - \hat{B}(sp_f + q_f + s^2 r_f) f^T \hat{C}. \quad (5.35)$$

Infine, osservando che per quasi tutte le coppie $(\hat{B}, \hat{C})$ (vedi il Lemma 3.4.1) esiste una trasformazione T_0 tale che:

$$\begin{aligned} T_0 A(s) T_0^{-1} &= T_0 A_0 T_0^{-1} - T_0 \hat{B}(sp_f + q_f + s^2 r_f) f^T \hat{C} T_0^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} - B_1(sp_f + q_f + s^2 r_f)(0 \ 0 \ \dots \ 1) & 0 \\ A_{21} - B_2(sp_f + q_f + s^2 r_f)(0 \ 0 \ \dots \ 1) & A_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

con $\text{rango } B_1 = r$, (A_{11}, B_1) raggiungibile e spettro di A_{22} coincidente con gli $m-1$ autovalori prefissati di A_0 , la dimostrazione segue facilmente tenendo presente il Teorema 5.1 ■

OSSERVAZIONE 5.1. Dal Teorema 5.1 (risp. 5.2) segue che, mediante controllori PI ($R = 0$), si possono assegnare $\nu \leq \min(2r, m+m)$ (risp. $\nu \leq \min(2r+m-1, m+m)$) poli.

Dai teoremi precedenti si hanno i seguenti algoritmi di progetto.

ALGORITMO 5.1 (Progetto di un controllore PID per l'assegnamento di $\nu \leq \min(3r, m+n)$ poli).

PASSO 1. Si scelgano ad arbitrio una matrice $\hat{Q} \in R^{r \cdot m}$ di range

pieno ed un vettore $f \in \mathbb{R}^m$ in modo che la coppia (A_o, c_o) sia osservabile, dove:

$$A_o = \begin{bmatrix} A & -B\hat{Q} \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad c_o = (0 \quad f^T). \quad (5.37)$$

PASSO 2. Si calcolino il vettore

$$a = (a_{n+m} \quad a_{n+m-1} \quad \dots \quad a_1 \quad 1)^T \in \mathbb{R}^{n+m+1} \quad (5.38)$$

e la matrice $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{(n+m-1) \times r}$ mediante le formule:

$$|sI_{n+m} - A_o| = s^{n+m} + a_1 s^{n+m-1} + \dots + a_{n+m} = v_{n+m}^T(s)a, \quad (5.39)$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} a_{n+m-2} & a_{n+m-3} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n+m-3} & a_{n+m-4} & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_o A_o \\ c_o A_o^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_o A_o^{n+m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

PASSO 3. Si costruiscano le matrici $F \in \mathbb{R}^{(n+m+1) \times 3r}$ e $G \in \mathbb{R}^{(n+m+1) \times (n+m+1-\nu)}$ come segue:

$$F = S_3(\hat{B}_1) = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 & \dots & \hat{B}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad G = S_{n+m-\nu}(d) = \begin{bmatrix} d_\nu & 0 & \dots & 0 \\ d_{\nu-1} & d_\nu & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_1 & d_2 & \dots & \cdot \\ 1 & d_1 & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

dove:

$$d(s) = s^\nu + d_1 s^{\nu-1} + \dots + d_\nu = v_\nu^T(s)d \quad (5.42)$$

è il polinomio avente per radici i ν desiderati poli.

PASSO 4. Si risolva l'equazione

$$(F \ G) \begin{bmatrix} q_f \\ p_f \\ r_f \\ \rho \end{bmatrix} = -a, \quad p_f, q_f, r_f \in R^r, \rho \in R^{n+m+1-\nu} \quad (5.43)$$

lasciando non specificati i $l = 3r - \nu$ elementi $h_1, h_2, \dots, h_l$ di p_f, q_f, r_f, ρ ottenendo così per ρ un'espressione del tipo:

$$\rho = (\rho_{n+m-\nu} \ \rho_{n+m-\nu-1} \ \dots \ \rho_0)^T = q_0 + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l. \quad (5.44)$$

PASSO 5. Applicando ripetutamente la tecnica del luogo delle radici ed il criterio di Routh al polinomio

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \rho_0 s^{n+m-\nu} + \rho_1 s^{n+m-\nu-1} + \dots + \rho_{n+m-\nu} = \\ &= v_{n+m-1}^T(s)(q_0 + h_1 q_1 + \dots + h_l q_l) \end{aligned} \quad (5.45)$$

si fissino i valori di $h_1, h_2, \dots, h_l$ in modo che gli zeri del polinomio $p(s)$, che sono i restanti poli del sistema a ciclo chiuso, abbiano una configurazione desiderata.

PASSO 6. Il desiderato controllore PID risulta:

$$u = (p_f f^T + (\hat{Q} + q_f f^T) \int (\cdot) dt + r_f f^T d/dt)(v-y) \quad (5.46)$$

OSSERVAZIONE 5.2. Nel passo 1 la matrice $\hat{Q}$ è stata scelta di rango pieno sicchè quasi sempre $Q = \hat{Q} + q_f f^T$ è di pieno rango, condizione necessaria perchè $C(-A)^{-1}BQ$ sia non singolare. Naturalmente se $m = 1$ si può scegliere $\hat{Q} = 0$ ed $f = 1$. Infatti con tali scelte la coppia $(A_0, c_0) = (\hat{A}, \hat{C})$ è osservabile ed inoltre $Q = q_f$ è di rango pieno se $q_f \neq 0$.

OSSERVAZIONE 5.3. Ovviamente se $\text{rango } F = 3r$ ed $(F \ G)$ non è di rango pieno si devono perturbare leggermente i poli che si vogliono assegnare in modo che $(F \ G)$ risulti di rango pieno.

ALGORITMO 5.2 (Progetto di un controllore PID per l'assegnamento di $\nu \leq \min(3r+m-1, m+n)$ poli).

PASSO 1. Mediante l'Algoritmo 3.3.1 si calcolino una matrice $\hat{Q} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ di rango pieno tale che la matrice

$$A_0 = \hat{A} - \hat{B}\hat{Q}\hat{C} = \begin{bmatrix} A & -B\hat{Q} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

sia ciclica con $m-1$ autovalori arbitrariamente vicini ad $m-1$ specificati valori simmetrici, ed il polinomio

$$p_{n+1}(s) = s^{n+1} + \alpha_1 s^n + \dots + \alpha_{n+1} = v_{n+1}^T(s) \alpha \quad (5.48)$$

degli autovalori residui di A_0 .

PASSO 2. Si calcoli un vettore non nullo $f \in \mathbb{R}^m$ tale che:

$$p_{n+1}(A_0^T) \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} f = 0 \quad (5.49)$$

e la matrice $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ mediante la formula:

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 A_0 \\ c_0 A_0^2 \\ \vdots \\ c_0 A_0^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

dove:

$$c_0 = (0 \quad f^T); \quad (5.51)$$

si ponga inoltre

$$a = (\alpha_{n+1} \quad \alpha_n \quad \dots \quad \alpha_1 \quad 1)^T. \quad (5.52)$$

PASSO 3. Si eseguano i passi 3, 4, 5, 6 dell'Algoritmo 5.1 sostituendo $n+1$ e $\nu+1-m$ ad $n+m$ e ν , rispettivamente ■

ESEMPIO 5.1. Per l'impianto raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d, \quad y = (1 \quad 0 \quad 1)x,$$

progettare un controllore PID tale che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile con due poli in $-2 \pm j2$.

La condizione (5.30) è soddisfatta; pertanto, procedendo secondo l'Algoritmo 5.1, si ha:

Passo 1. Essendo $m = 1$ si può scegliere $\hat{Q} = 0$ ed $f = 1$; quindi:

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_o = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1).$$

Passo 2. Si ha:

$$|sI_4 - A_o| = s^4 + 4s^3 + 11s + 6s;$$

pertanto:

$$a = (0 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \quad 1)^T,$$

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3.

$$d(s) = (s+2+j2)(s+2-j2) = s^2 + 4s + 8 = (1 \quad s \quad s^2)(8 \quad 4 \quad 1)^T;$$

$$F = S_3(\hat{B}_1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = S_3(d) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 4. L'equazione (5.43) risulta:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_f \\ p_f \\ r_f \\ \rho_2 \\ \rho_1 \\ \rho_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 11 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui, ponendo $r_f = h$, si ha:

$$q_f = 40/3 + 8h, \quad p_f = 10/3 + 4h, \quad r_f = h,$$

$$\rho = (\rho_2 \ \rho_1 \ \rho_0)^T = -(25/3 \quad 16/3 \quad 1)^T - h(5 \quad 4 \quad 1)^T.$$

Passo 5. Il sistema a ciclo chiuso ha due poli in $-2-j2$, $-2+j2$ e gli altri due sono vincolati dall'equazione:

$$\begin{aligned} \rho(s) &= (1+h)s^2 + (16/3 + 4h)s + (25/3 + 5h) = \\ &= s^2 + 16/3s + 25/3 + h(s^2 + 4s + 5) = 0 \end{aligned}$$

il cui luogo cui luogo delle radici è riportato in Fig. 5.2.

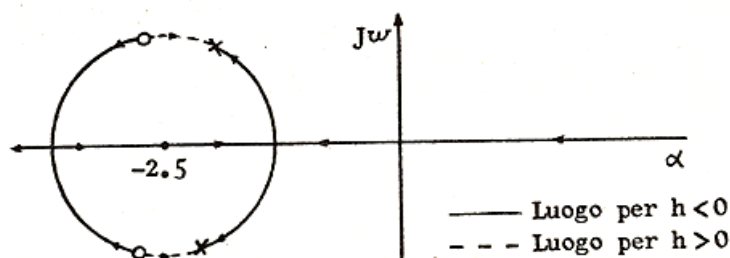


Fig. 5.2

Ne segue che il sistema a ciclo chiuso risulta asintoticamente

stabile se $h \in (-\infty, -5/3) \cup (-1, \infty)$.

Passo 6. Il desiderato controllore PID risulta:

$$u = (10/3 + 4h + (40/3 + 8h) \int (.) dt + h d/dt)(v - y),$$

con $h \in (-\infty, -5/3) \cup (-1, \infty)$ Δ

ESEMPIO 5.2. Per l'impianto raggiungibile ed osservabile

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

progettare un controllore PID in modo che tutti i poli del sistema a ciclo chiuso siano in -1.

E' facile verificare che la condizione (5.30) è soddisfatta; pertanto, procedendo secondo l'Algoritmo 5.2, si ha:

Passo 1. Una matrice non singolare $\hat{Q}$ tale che la matrice A_0 sia ciclica con un autovalore in -1 risulta:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

mentre il polinomio residuo vale:

$$p_6(s) = s^6 + 2s^5 + s^4 + s^3 - 2s^2 - 2s - 1.$$

Passo 2.

$$a = (-1 \ -2 \ -2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1)^T,$$

$$p_6(A_0^T) \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} f = 0$$

da cui una possibile scelta per f è:

$$f = (4 \ 1)^T.$$

Pertanto:

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 11 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

Passo 3.

$$\begin{aligned} d(s) &= (s+1)^6 = s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1 = \\ &= (1 \ s \dots s^6)(1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1)^T; \end{aligned}$$

quindi l'equazione (5.43) risulta:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 4 & -2 & 0 & 0 & 6 \\ 11 & 2 & 10 & 4 & 4 & -2 & 15 \\ 7 & 6 & 11 & 2 & 10 & 4 & 20 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 11 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_f \\ p_f \\ r_f \\ \rho_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{aligned} q_f &= (0.2412 \quad -0.08630)^T, \quad p_f = (0.1277 \quad -0.1232)^T, \\ r_f &= (0.05589 \quad -0.2855)^T, \quad \rho_e = -0.1372. \end{aligned}$$

Ne segue che il desiderato controllore PID risulta:

$$\begin{aligned} u &= \left[\begin{bmatrix} 0.5108 & 0.1277 \\ -0.4928 & -0.1232 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.03520 & 0.2412 \\ -0.3452 & 0.4137 \end{bmatrix} \int (.) dt + \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0.2236 & 0.05589 \\ 1.1420 & -0.2855 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \right] (v - y) \end{aligned}$$

7.6 ESERCIZI

6.1 - Dimostrare che il sistema a controreazione di Fig.6.1, sup-

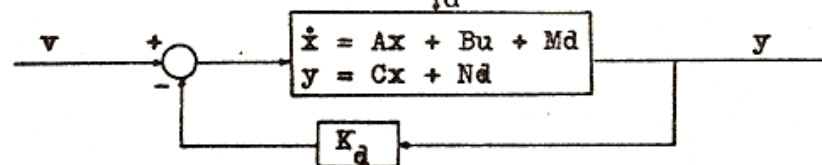


Fig. 6.1

posto asintoticamente stabile, è astatico rispetto a disturbi appartenenti ad una data classe D (ad esempio quella dei disturbi polinomiali, e sinusoidali, od esponenziali) se e solo se $\forall d \in D$ esiste uno stato iniziale x_0 tale che la risposta forzata in uscita a del sistema in catena diretta coincide con quella libera in uscita a partire dallo stato x_0 (Principio del modello interno).

6.2 - Scrivere dei sottoprogrammi al calcolatore che implementino tutti gli algoritmi di progetto presentati in questo capitolo.

6.3 - Discutere la "robustezza" rispetto alle proprietà di asintotica stabilità e di astaticismo degli schemi di controllo presentati nei paragrafi 7.2, 7.3, 7.5.

6.4 - Illustrare le procedure di sintesi presentate in questo capitolo con impianti multivariabili realistici con almeno due ingressi e due uscite.

7.7 BIBLIOGRAFIA

Il problema del controllo è stato ampiamente trattato in letteratura; l'opera più autorevole è il libro di W.M.Wonham [5]. Circa le condizioni di astaticismo si vedano i lavori di D.M.Grasselli ed F.Nicolò [3], W.M.Wonham e J.B.Pearson [4], B.A.Francis e W.M.Wonham [6], C.A.Wolfe e J.S.Meditch [7], O.M.Grasselli e T.Leo [10]. Il Lemma 1.1 è dovuto ad H.M.Power e B.Porter [1].

Per la sintesi mediante pseudo-osservatore si può vedere il lavoro di O.M.Grasselli ed F.Nicolò [2]; la versione qui riportata è dell'autore.

La procedura di sintesi mediante compensatore è dell'autore.

La sintesi mediante controllori standard è stata affrontata da H.Seraji ed M.Tarokh [8], H.Seraji [9] e A.Balestrino e G.Celentano [11].

- [1] H.M. POWER e B. PORTER, Necessary and Sufficient Conditions for Controllability of Multivariable Systems Incorporating Integral Feedback, *Electron. Lett.*, Vol. 6, N.25, pp. 815-816, 1970.
- [2] O.M. GRASSELLI ed F. NICOLO', Modal Synthesis of Astatic Multivariable Regulation Systems, *Proc. 2nd IFAC Symp. on Multivariable Technical Control Systems*, Dusseldorf, pap. No.1.1.4, North-Holland, 1971.
- [3] O.M. GRASSELLI ed F. NICOLO', Multivariable Control Systems with a Structural Steady-State Signal Invariance, *Proc. 3rd IFAC Symp. on Sensitivity, Adaptivity and Optimality*, Ischia, pp.85-90, 1973.
- [4] W.M. WONHAM e J.B. PEARSON, Regulation and Internal Stabilization in Linear Multivariable Systems, *SIAM J. Control*, Vol. 12, pp. 5-18, 1974.
- [5] W.M. WONHAM, *Linear Multivariable Control*, Springer-Verlag, New-York, 1974.
- [6] B.A. FRANCIS e W.M. WONHAM, The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators, *Appl. Math. Optimization*, Vol. 2, pp. 170-194, 1975.
- [7] C.A.WOLFE e J.S. MEDITCH, Theory of System Type for Linear Multivariable Servomechanisms, *IEEE Trans.*, Vol. AC-22, No.1, pp. 36-46, 1977.
- [8] H. SERAJI ed M. TAROKH, Design of PID Controllers for Multivariable Systems, *Int. J. Control*, Vol. 26, No. 1, pp. 75-83, 1977.
- [9] H. SERAJI, Design of Proportional-Plus-Integral Controllers for Multivariable Systems, *Int. J. Control*, Vol. 29, No. 1, pp. 49-63, 1979.

- [10] O.M. GRASSELLI e T. LEO, Sistemi di controllo a più variabili di ingresso e di uscita, Pitagora Editrice, Bologna, 1979.
- [11] A. BALESTRINO e G. CELENTANO, Design of PID Controllers in Linear Multivariable Systems, sottoposto ai Proc. IEE, 1980.

APPENDICE

Tenendo presente le (5.12), (5.15) e (5.19) si ha:

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} &= \text{rango} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B - BQCB \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} TB & TA_0 B & TA_0^2 B \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (A1)$$

Ma dalle (5.19, (5.20) e (5.21):

$$TB = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

$$TA_0 B = \begin{bmatrix} 0 & \vdots \\ I_{n+m+1} & -\hat{a} \end{bmatrix} TB = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} TA_0^2 B &= \begin{bmatrix} 0 & \vdots \\ I_{n+m+1} & -\hat{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots \\ I_{n+m+1} & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_2 \\ f^T CAB \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha f^T CAB \\ 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} + \beta f^T CAB. \end{aligned} \quad (A4)$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} &= \text{rango} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha f^T CAB \\ 0 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} + \beta f^T CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \text{rango}_3(\hat{B}_1). \end{aligned} \quad (A5)$$

Ora, $\forall n, m, r$ ($m \leq r \leq n$) $\exists$ una terna di matrici ($A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$,

$C \in R^{m,n}$) tale che:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \min(3r, n+m). \quad (A6)$$

Infatti se $n+m > 3r$, scegliendo

$$B = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r \quad (A7)$$

si ha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix} = 3r \quad (A8)$$

mentre se $n+m \leq 3r$, scegliendo

$$B = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_{n+m-2r} & 0 \end{bmatrix} \quad r \quad (A9)$$

si ha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \\ 0 & CB & CAB \\ 0 & 0 & f^T CAB \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n+m-2r} & 0 \\ 0 & 0 & ? & ? \end{bmatrix} = n+m. \quad (A10)$$

Pertanto, tenendo presente: i) la (A5); ii) che quasi tutte le terne (A, B, C) sono complete con $\text{rango} B = r$ e $\text{rango} C = m$; iii) che la (A6) è equivalente ad una disequaglianza polinomiale negli elementi di A, B, C , segue che per quasi tutti gli impianti (1.1)

$$\text{rango} S_3(\hat{B}_1) = \min(3r, n+m). \quad (A11)$$

INDICE

PREFAZIONE

I - IL PROBLEMA DELL'ASSEGNAIMENTO DEI POLI	Pag. 1
1.1 Introduzione	" 1
1.2 Formulazione del problema	" 2
1.3 Esercizi	" 8
1.4 Bibliografia	" 9
II - ASSEGNAIMENTO COMPLETO DEI POLI MEDIANDE CONTROLLORE	
STATICO	" 11
2.1 Introduzione e risultati preliminari	" 11
2.2 Teorema fondamentale dell'assegnamento dei poli. .	" 19
2.3 Stabilizzazione.	" 34
2.4 Esercizi	" 38
2.5 Bibliografia	" 40
III - ASSEGNAIMENTO INCOMPLETO DEI POLI	" 42
3.1 Introduzione e risultati preliminari	" 42
3.2 Primo risultato fondamentale sull'assegnamento incompleto dei poli.	" 56
3.3 Tecnica per imporre vincoli sui poli non asse- gnabili arbitrariamente.	" 64
3.4 Secondo risultato fondamentale sull'assegnamento incompleto dei poli.	" 71
3.5 Un metodo numerico per l'assegnamento ottimo dei poli	" 84
3.6 Esercizi	" 89
3.7 Bibliografia	" 91

IV -	TEORIA DEGLI OSSERVATORI	Pag. 93
4.1	Introduzione e risultati preliminari	" 93
4.2	Osservatore identità	" 99
4.3	Osservatore ridotto.	" 101
4.4	Osservatore di un funzionale lineare	" 111
4.5	Esercizi	" 118
4.6	Bibliografia	" 120
V -	CONTROLLORI DINAMICI NON INTERAGENTI	" 122
5.1	Introduzione e risultati preliminari	" 122
5.2	Controllori di ordine n	" 131
5.3	Controllori di ordine $\nu = \min(n-m, n-r)$	" 136
5.4	Controllori di ordine $\nu = n+1-m-r$	" 140
5.5	Controllori di ordine $\nu = \min(\nu_o, \nu_r)$	" 144
5.6	Controllori di ordine $\nu = \min(\lceil (n-r+1)/m \rceil,$ $\lfloor (n-m+1)/r \rfloor) - 1$	" 148
5.7	Assegnamento incompleto dei poli mediante con- trollori dinamici di ordine ridotto	" 152
5.8	Esercizi	" 156
5.9	Bibliografia	" 156
VI -	CONTROLLORI DINAMICI INTERAGENTI	" 157
6.1	Introduzione e risultati preliminari	" 157
6.2	Assegnamento mediante controllore di ordine $\min(\nu_r, \nu_o)$	" 160
6.3	Assegnamento mediante controllori di ordine ridotto.	" 171
6.4	Esercizi	" 174
6.5	Bibliografia	" 174

Appendice	Pag. 176
VII - SINTESI DEI SISTEMI DI CONTROLLO MULTIVARIABILI . . .	" 178
7.1 Introduzione e risultati preliminari.	" 178
7.2 Sintesi di un sistema di regolazione mediante pseude-osservatore.	" 182
7.3 Sintesi di un sistema di regolazione mediante compensatore.	" 189
7.4 Estensione delle procedure di sintesi al caso dei sistemi di asservimento	" 193
7.5 Sintesi mediante controllori PID	" 196
7.6 Esercizi.	" 210
7.7 Bibliografia.	" 211
Appendice	" 214
INDICE	" 218

STABILIZATION BY DIGITAL CONTROLLERS
OF MULTIVARIABLE LINEAR SYSTEMS
WITH TIME-LAGS

A. Balestrino and G. Celentano

Istituto Elettrotecnico, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli, Napoli, Italy

Abstract. The problem of stabilizing linear systems with time-lags is investigated. Under rather general assumption it is shown that, by means of a digital controller, the system can be always reduced to a system with mere delay connected in cascade with a subsystem whose poles can be arbitrarily assigned.

Keywords. Time lag systems; digital control; pole placement; multivariable control systems; stability.

1 Introduction

In this paper the problem of stabilizing linear systems with time-lags is investigated. Let the system be represented by the discrete model:

$$\begin{aligned}x(kT + T) &= Ax(kT) + Bu(kT - h') \\ y(kT) &= Cx(kT - h''),\end{aligned}\tag{1}$$

where $x \in R^n$ is the state vector, $u \in R^p$ and $y \in R^q$ are the input and output vectors, respectively; $h' \geq 0$ is time-lag in control action, $h'' \geq 0$ is time-lag in output measurement, T is the sampling period.

Models of this type arise quite frequently in technical practice, e.g. sampled-data systems, remote control, control of some industrial process, biological and economic systems, etc.

By increasing time-lags h' and h'' , if necessary, through additional delaying devices on input and output of system (1), it is always possible to realize:

$$h' = m' T, \quad h'' = m'' T, \quad (2)$$

where m' and m'' are integers. Then the discrete model (1) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_{k-m'}, \\ y_k &= Cx_{k-m''}, \end{aligned} \quad (3)$$

where, for sake of notational simplicity, the period T is omitted.

The problem to face is one of finding a digital controller allowing the stabilization of discrete system (3).

Assuming that $\text{rank} B = p$ and $\text{rank} C = q$ system (3) turns out to be equivalent to a discrete linear time invariant system of order $n + pm' + qm''$ without time-lags; therefore, the different techniques of pole assignment (Wonham, 1974; Davison, 1975; Balestrino, Celentano and Sciavicco, 1976) could be used for stabilizing purposes. In this way, however, controllers with high dimensions would result.

Now the question arises of solving the stabilization problem by means of a digital controller with a convenient simple structure.

Hereinafter it is shown that if matrix A is cyclic, pair (A, B) reachable and pair (A, C) observable, the a digital controller can be designed so that the closed loop transfer matrix shows a total time-lag $m = m' + m''$, whereas other poles can be arbitrarily assigned. Of course, this result holds true also for continuous time invariant linear systems with time-lags if the corresponding sampled-data model is taken into account.

2 Digital controller design with $\text{rank} C = n$

The controller recommended here is described by the following equations:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= Wz_k + K_{22}z_{k-m} + K_{21}y_{k-m'}, \\ u_k &= K_{11}y_k + K_{12}z_{k-m''} + v_k, \end{aligned} \quad (4)$$

where $m = m' + m''$ is the total time-lag, $z \in R^m$ is an internal variable of the controller, $v \in R^p$ is the external input and $W, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ are real constant matrices of appropriate dimensions.

The augmented system, consisting of system (3) and controller (4), is described by:

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= A' g_k + B' K C g_{k-m} + B'' v_{k-m}, \\ y_k &= C'' g_{k-m}, \end{aligned} \quad (5)$$

where:

$$g_k^T = \begin{bmatrix} x_k^T & z_k^T \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad (7)$$

with I_m the identity matrix of order m ,

$$B'' = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C'' = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

For system (3) the following result holds.

Theorem 1. Let system (3) be considered and let it be assumed that A is cyclic, pair (A, B) reachable and $\text{rank} C = q = n$. Then a controller of type (4) exists such that the compound system (5) has $n'' = 2m + n$ poles arbitrarily close to n'' specified symmetric values and other m poles in the origin of the complex plane.

In order to prove Theorem 1 the following preliminary results are necessary.

Lemma 1. A necessary and sufficient condition for matrix $A' = \text{blockdiag}(A, W)$ to be cyclic is that A and W are both cyclic with separate spectra.

Proof. Let T_A and T_W be two nonsingular matrices such that $T_A^{-1}AT_A = J_A$ and $T_W^{-1}WT_W = J_W$ are in Jordan's form.

Then $\hat{T}^{-1}A'\hat{T}$, with $\hat{T} = \text{blockdiag}(T_A, T_W)$, is a matrix in Jordan's form. Demonstration proceeds from the foregoing and from the fact that a matrix M is cyclic if and only if its Jordan's form J_M has just one Jordan's block in correspondence with the same eigenvalue.

Lemma 2. If pair (A, B) is reachable, then also pair (A', B') , see (7), is reachable.

The proof is trivial and therefore omitted.

Proof of Theorem 1. Let matrix W be chosen cyclic with spectrum separate from one of A . Thus, A' is cyclic due to Lemma 1. Moreover, pair (A', B') is reachable due to Lemma 2; therefore a vector $b' = B'f$ exists with $f \in R^{p+m}$ so that pair (A', b') is reachable (Davison, Wang, 1973).

Let

$$p_{A'}(\lambda) = \lambda^{n'} + a_1'\lambda^{n'-1} + \dots + a_n' \quad (10)$$

be the characteristic polynomial of A' , with $n' = n + m$.

Let the nonsingular matrix

$$T_c = \psi \begin{bmatrix} a_{n'-1}' & a_{n'-2}' & \dots & a_1' & 1 \\ a_{n'-2}' & a_{n'-3}' & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1' & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

be considered, where

$$\psi = [b' \quad A'b' \quad \dots \quad A^{m'-1}b']; \quad (12)$$

moreover

$$K = fk^T T_c^{-1} C'^{-1} \quad (13)$$

be chosen, where k is a n' -vector.
Now transfer matrix of system (5), given by

$$D(\zeta) = C''(\zeta^{m+1}I - A'\zeta^m - B'KC')^{-1}B'' \quad (14)$$

can be rewritten as follows

$$D(\zeta) = C''T_c(\zeta^{m+1}I - \hat{A}\zeta^m - \hat{b}k^T)^{-1}T_c^{-1}B'' , \quad (15)$$

where:

$$\hat{A} = T_c^{-1}A'T_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n' & -a_{n-1}' & \vdots & \dots & -a_1' \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{b} = T_c^{-1}B'f = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T . \quad (17)$$

From (15), (16) and (17), after standard manipulations, it follows that poles of $D(\zeta)$ are the zeros of polynomial

$$d(\lambda) = \lambda^m p(\lambda), \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \lambda^m p_{A'}(\lambda) - \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n'-1} \end{bmatrix} k = \\
&= \lambda^{n''} + a'_1 \lambda^{n''-1} + \dots + a'_m \lambda^{n'} + (a'_{m+1} - k_{n'}) \lambda^{n'-1} + \\
&+ \dots + (a'_{n'} - k_{m+1}) \lambda^m - k_m \lambda^{m-1} + \dots - k_1,
\end{aligned} \tag{19}$$

k_j being the j -th component of feedback vector k . Then from (19) it follows that the first m coefficient of $p(\lambda)$ coincide with the first m coefficient of $p_{A'}(\lambda)$ and cannot therefore be modified by feedback vector k , whereas the remaining ones can be arbitrarily modified by a suitable choice of vector k .

Let

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \tag{20}$$

and

$$p_W(\lambda) = \lambda^m + w_1 \lambda^{m-1} + \dots + w_m \tag{21}$$

be characteristic polynomials of A and W , respectively.

Since $A' = \text{blockdiag}(A, W)$

$$p_{A'}(\lambda) = p_A(\lambda) p_W(\lambda); \tag{22}$$

then it follows (Balestrino, Celentano, Sciavicco, 1976)

$$\begin{bmatrix} a'_1 - a_1 \\ a'_2 - a_2 \\ \vdots \\ a'_n - a_n \\ a'_{n+1} \\ \vdots \\ a'_{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ a_1 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & \cdot & a_1 \\ 0 & a_n & \cdot & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Now let

$$\hat{p}(\lambda) = \lambda^{n''} + \hat{a}_1 \lambda^{n''-1} + \dots + \hat{a}_{n''} \quad (24)$$

be a real coefficient polynomial whose roots are the desired poles with $n'' = 2m + n$.

In order to have $p(\lambda) = \hat{p}(\lambda)$, from (19) it follows that:

$$a'_i = \hat{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (25)$$

moreover

$$k_j = \begin{cases} -\hat{a}_{n''+1-j}, & j = 1, 2, \dots, m \\ -\hat{a}_{n''+1-j} + a'_{n''+1-j}, & j = m+1, 2, \dots, n'. \end{cases} \quad (26)$$

From (23) and (25) it follows that polynomial (24) is obtained if

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 - a_1 \\ \hat{a}_2 - a_2 \\ \hat{a}_3 - a_3 \\ \vdots \\ \hat{a}_m - a_m \end{bmatrix}. \quad (27)$$

After polynomial $p_w(\lambda)$ is known, matrix W must be determined.

Matrix W can be chosen in companion form; then the matrix W is cyclic and for almost any $\hat{p}(\lambda)$ its spectrum is separate from one of A . If for a specified $\hat{p}(\lambda)$ the spectrum of W is not separate from one of A , poles to assign can be chosen as $\lambda_i + \Delta\lambda_i$, with $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$, $i = 1, \dots, n''$, so that the spectra are separate.

The proof of Theorem 1 is complete.

3 Digital controller design with $\text{rank}C < n$

In this case, too, the problem of pole assignment of system (3) can be solved if an asymptotic observer of vector x_{k-m} can be used.

In order to prove this statement, the following preliminary results must be considered.

Lemma 3. Let pair (A, C) be observable, with $A \in R^{n \times n}$, $C \in R^{q \times n}$ and $\text{rank}C = q < n$. Let $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-q}\}$ be a symmetric set of complex numbers.

Three matrices then exist, S, P, Q with dimension $(n-q) \times (n-q)$, $n \times q$, $(n-q) \times (n-q)$, respectively, so that

$$Q(A - PC) = SQ, \quad (28)$$

with Λ coincident with spectrum of S and

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix} = n. \quad (29)$$

For the relative proof see Wonham (1974, pp. 60-62).

Lemma 4. Let the dynamic linear time invariant system

$$s_{k+1} = Ss_k + QPy_k + QBu_{k-m} \quad (30)$$

be considered, where S, P, Q are given by Lemma 3 with the spectrum of S inside the unit circle and u_k, y_k are, respectively, the input and output vectors of system (3). Then

$$\begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_k \\ s_k \end{bmatrix} \quad (31)$$

represents an asymptotic estimate of vector x_{k-m^n} of system (3).

Proof. Let

$$e_k = s_k - Qx_{-m^n} . \quad (32)$$

From (3), (30), by means of (28)

$$e_{k+1} = Se_k \quad (33)$$

is obtained.

Since the spectrum of S has been assumed to be inside the unit circle, there results

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0 . \quad (34)$$

From (3), (29), (32), (34) it follows that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_k \\ s_k \end{bmatrix} = x_{k-m^n} . \quad (35)$$

Remark 1. If, in Lemma 4, S is chosen nilpotent then the asymptotic observer is of dead-beat type.

The digital controller can now be synthesized. It can be specified by the following equations:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= Wz_k + K_{22}z_{k-m} + K_{21} \begin{bmatrix} y_{k-m'} \\ s_{k-m'} \end{bmatrix} \\ s_{k+1} &= Ss_k + QPy_k + QBu_{k-m} \\ u_k &= K_{11} \begin{bmatrix} y_k \\ s_k \end{bmatrix} + K_{12}z_{k-m^n} + v_k , \end{aligned} \quad (36)$$

where matrices $W, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ have the same dimensions as considered in the previous section; moreover, P, Q, S are the matrices as identified in Lemma 4 and v_k is the external input.

By setting

$$e_k = s_k - Qx_{k-m} \quad (37)$$

the augmented system consisting of system (3) and controller is described by:

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= A'g_k + B'KC'g_{k-m} + Ee_{k-m} + B''v_{k-m}, \\ e_{k+1} &= Se_k \\ y_k &= C''g_{k-m}, \end{aligned} \quad (38)$$

where g_k is a vector defined by (6), A', B', C', B'', C'', K are matrices defined by (7), (8), (9), where, however, in the last matrix of (7) matrix C must be replaced by $\begin{bmatrix} C^T & Q^T \end{bmatrix}^T$; moreover

$$E = \begin{bmatrix} BK_{11} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix} \\ K_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

For system (38) the following result holds, like that of Theorem 1.

Theorem 2. Let system (3) be considered and let it be assumed that A is cyclic, pair (A, B) reachable, pair (A, C) observable and $\text{rank} C = q < n$. Then a controller of type (36) exists so that the compound system (38) has $n'' + (n - q)$ poles arbitrarily close to $n'' + (n - q)$ specified symmetric values and other m poles in the origin of complex plane.

Proof. It is immediately shown that poles of system (36) coincide with eigenvalues of S and with poles of transfer function

$$D(\zeta) = C''(\zeta^{m+1}I - A'\zeta^m - B'KC')^{-1}B'' . \quad (40)$$

Demonstration follows from Lemma 3 and Theorem 1.

Remark. A dual of Theorem 2 can be derived by means of a dual observer (Luenberger, 1966). Thus, s_k , is a $(n-p)$ -vector, with $p = \text{rank} B$.

Practically, the better of two results can be used to implement the controller.

4 Conclusions

In this paper the problem of stabilizing linear systems with time-lags has been investigated.

Under rather general assumptions, it has been shown that it is always possible, by means of a digital controller, to reduce the system to a system with mere delay cascade connected with a subsystem whose poles can arbitrarily assigned.

References

- [1] Balestrino, A., Celentano G., and Sciavicco L. "On Incomplete Pole Assignment in Linear Systems". *Systems Science Journal*, Vol. 2, No. 4, Wroclaw, 1976.
- [2] Davison, E.J. "On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-20, pp. 516-518, August, 1975.
- [3] Davison, E.J., and S.H. Wang. "Properties of Linear Time-invariant Multivariable Systems Subject to Arbitrary Output and State Feedback", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-18, pp.24-32, February, 1973.
- [4] Luenberger, D.G. "Observers for Multivariable Systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-11, pp.190-197, April, 1966.
- [5] Wonham, W.M. "Linear Multivariable Control", Springer-Verlag, New York, 1974.

Tracking Control of High-Performance Robots via Stabilizing Controllers for Uncertain Systems

G. AMBROSINO,¹ G. CELENTANO,² AND F. GAROFALO³

Communicated by G. Leitmann

Abstract. The development of flexible manufacturing systems calls for industrial robots characterized by robustness of performance with regard to the variations of the loads and real time specification of the trajectory in the work space. In this paper, the design of a feedback controller guaranteeing such performance is considered. At first, the manipulator dynamics are embedded into a larger class of uncertain dynamical systems and a class of feedback controls is proposed that guarantees uniform ultimate boundedness of the tracking error. Successively, the methodology is specialized for the case of robotic manipulators to track trajectories described in task-oriented coordinates; the proposed control algorithm operates without requiring any explicit coordinate transformation.

Key Words. Uncertain dynamical systems, robotic tracking, stability, nonlinear feedback control.

1. Introduction

The problem of controlling a robot consists in evaluating the torques at each joint needed to track a programmed path (Ref. 1). This problem, complicated by the nonlinear and coupled nature of the equations of the motion of the manipulator, becomes even more difficult when dealing with high-performance robots working in flexible manufacturing environments; in this case, indeed, the control must ensure robustness with respect to load variations and real-time trajectory specification.

¹ Associate Professor, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, University of Naples, Naples, Italy.

² Associate Professor, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, University of Naples, Naples, Italy.

³ Researcher, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, University of Naples, Naples, Italy.

Recently, a certain number of robust control schemes (see, e.g., Refs. 2-6) have been proposed to cope with parameter variations of the manipulator. These schemes operate in the so-called drive-oriented space, in that they require the specification of the desired trajectory in terms of angular displacements of each joint; as the target trajectory, in real-time operations, is usually planned and expressed in the task-oriented space (i.e., the Cartesian space), it is necessary to operate an on-line coordinate transformation. Although efficient computational schemes for coordinate transformation have been proposed recently in the literature (Ref. 7), this operation is to date still too time consuming, and sets up an upper bound to the sampling frequency of the control input, so limiting the operating speed of the robot.

To overcome this difficulty, in this paper we propose a robust control scheme that operates directly in the task-oriented space without a significant increase of the computational effort with respect to the above-mentioned control techniques operating in the drive-oriented space.

The theoretical framework on which the design technique proposed in this paper is based is that of continuous stabilizing controllers for uncertain dynamical systems, proposed in Refs. 8-11 and initially developed from a min-max approach (Ref. 12).

In particular, using some results given in Ref. 13, we shall prove that it is possible to find a nonlinear continuous control law such that, for any given trajectory in the task-oriented coordinate space, the tracking error between the actual and the programmed position of the robot end-effector is ultimately bounded with respect to an arbitrarily small neighbourhood of the origin. In addition, we shall show that, instead of a nonlinear controller, a simple bank of generalized PD (proportional+derivative) controllers will suffice to guarantee similar performance (Refs. 14-15).

2. Statement of the Problem

A robotic manipulator with ν degrees of freedom can be schematically considered as a kinematical chain of $\nu + 1$ rigid bodies (links) interconnected by ν joints. Defining $q(t): T \rightarrow R^\nu$ as the vector of actual displacements of the ν joints, the dynamic equations in the so-called drive-oriented space can be written as

$$J(p, q)\ddot{q} + H(p, q, \dot{q}) = u, \quad q(t_0), \dot{q}(t_0) \text{ given}, \quad (1)$$

where $u(t): T \rightarrow R^\nu$ is a vector of input generalized forces, $p(t): T \rightarrow \mathcal{P} \subset R^\mu$ is a vector of uncertain system parameters $J: \mathcal{P} \times R^\nu \rightarrow R^{\nu \times \nu}$, $H: \mathcal{P} \times R^\nu \times R^\nu \rightarrow R^\nu$ are system matrices, and

$$T = \{t: t \in (t_0, t_0 + \tau)\}, \quad \tau > 0.$$

We stress that the functions $J(\cdot, \cdot)$ and $H(\cdot, \cdot, \cdot)$ are continuous in all their arguments and $J(\cdot, \cdot)$ is positive definite (p.d.). Moreover, we assume that the function $p(\cdot)$ is Lebesgue measurable and that $\mathcal{P}$ is a known compact set.

While the manipulator dynamics is expressed in the drive-oriented space, the target trajectory is usually given in the so-called task-oriented coordinate system (hand's position and orientation). As the inverse transformation from the task coordinates, in the sequel indicated with y , to the joint ones q is nearly always too complicated to be expressed as a closed form of explicit functions of y and, furthermore, as the numerical techniques for this transformation are too time consuming to be used for on-line control, it would be desirable to design a control law guaranteeing an accurate tracking of the task-oriented trajectory without requiring this inverse transformation. To this aim, it is necessary to rewrite the manipulator dynamics (1) in the task-oriented space.

Assuming that the transformations

$$y = h_y(q), \quad q = h_q(y) = h_y^{-1}(y) \quad (2)$$

exist and are one-to-one in proper regions of the two spaces, we have

$$\dot{y} = U^T(q)\dot{q} = V^T(y)\dot{q}, \quad (3)$$

$$\ddot{y} = U^T(q)\ddot{q} + a(q, \dot{q}) = V^T(y)\ddot{q} + b(y, \dot{y}), \quad (4)$$

where

$$U(q) = [(\partial/\partial q)h_y(q)]^T, \quad V(y) = U(h_q(y)), \quad (5a)$$

$$a(q, \dot{q}) = (d/dt)(U^T(q))\dot{q}, \quad (5b)$$

$$b(y, \dot{y}) = a(h_q(y), (V^T(y))^{-1}\dot{y}). \quad (5c)$$

Then, the equation of the motion (1) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= b(y, \dot{y}) - V^T(y)J^{-1}(p, h_q(y))H(p, h_q(y), (V^T(y))^{-1}\dot{y}) \\ &\quad + V^T(y)J^{-1}(p, h_q(y))u, \quad y(t_0), \dot{y}(t_0) \text{ given.} \end{aligned} \quad (6)$$

Assuming that the target trajectory is specified in terms of a function $\hat{y}(t): T \rightarrow R^n$ and indicating with

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (7)$$

the tracking error, the control problem can be stated as determining a continuous control law guaranteeing that:

- (i) the error equation is practically stabilizable in the sense of Ref. 10, i.e., the error can be made uniformly ultimately bounded to an arbitrarily small neighborhood of $e = 0$;

(ii) whenever the manipulator's initial position does not lie on the reference trajectory, the error converges to zero with a rate not less than an arbitrary exponential one.

In the sequel, such a controller will be termed "practical tracking controller."

3. Some Theoretical Preliminaries

Consider the dynamic nonlinear plant

$$\dot{y}^{(m)} = f(p, y, \dots, y^{(m-1)}) + F(p, y, \dots, y^{(m-1)})u, \quad (8)$$

where $y(t): T \rightarrow R^v$ is the output, $u(t): T \rightarrow R^v$ is the control, $p(t): T \rightarrow \mathcal{P} \subset R^\mu$ is a vector of uncertain plant parameters, and f, F are continuous nonlinear matrices of appropriate dimensions.

We assume that:

(A1) there exists a matrix $V(y, \dots, y^{(m-1)}) \in R^{v \times v}$ such that the matrix D , defined as

$$D(p, y, \dots, y^{(m-1)}) = F(p, y, \dots, y^{(m-1)})V(y, \dots, y^{(m-1)}), \quad (9)$$

is positive definite;

(A2) the function $p(\cdot)$ is Lebesgue measurable and $\mathcal{P}$ is a known compact set;

(A3) the function V and a lower bound $\lambda_m(D)$ of the norm of the matrix D are available together with real time measurements of $y, \dots, y^{(m-1)}$.

Here, $\lambda_m(D)$ denotes the square root of the minimum eigenvalue of $D^T D$, evaluated over all $(p, y, \dots, y^{(m-1)}) \in \mathcal{P} \times R^{m \cdot v}$.

As the function f is continuous and the set $\mathcal{P}$ is compact, there exists a continuous function $g: R^{m \cdot v} \rightarrow [0, \infty)$ such that

$$g(y, \dots, y^{(m-1)}) \geq \max_{p \in \mathcal{P}} \|f(p, y, \dots, y^{(m-1)})\|. \quad (10)$$

We also assume that:

(A4) the function g is available.

Remark 3.1. The class of systems defined by Eq. (8), with assumptions (A1)-(A4), includes the system of the manipulator dynamics in the task-oriented space. Indeed Eq. (6) can be rewritten in the following compact form:

$$\ddot{y} = F(p, y, \dot{y}) + F(p, y)u, \quad (11)$$

with

$$f(p, \dot{y}, \dot{y}) = b(y, \dot{y}) - V^T(y)J^{-1}(p, h_q(y))H(p, h_q(y), (V^T(y))^{-1}\dot{y}), \quad (12a)$$

$$F(p, y) = V^T(y)J^{-1}(p, h_q(y)). \quad (12b)$$

Moreover, the matrix functions F and V are such that

$$D(p, y) = F(p, y)V(y) = [V^T(y)]^{-1}(p, h_q(y))V(y) \quad (13)$$

is positive definite.

Let $\hat{y}(t)$ be the trajectory to be tracked, and let us assume that:

(A5) $\hat{y}(\cdot)$ is continuous with its m th derivative.

Introducing the error state vector $\epsilon: T \rightarrow R^{m \times \nu}$ defined as

$$\epsilon^T = [e^T, e^{(1)T}, \dots, e^{(m-1)T}], \quad e = \hat{y} - y, \quad (14)$$

the tracking system may be expressed as

$$\dot{\epsilon} = E\epsilon - Bw, \quad (15)$$

where

$$E = \begin{bmatrix} 0 & I_\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_\nu & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_\nu \\ -K_1 & -K_2 & \cdot & \cdots & -K_m \end{bmatrix}, \quad (16a)$$

$K_i \in R^{\nu \times \nu}$, $i = 1, \dots, m$, arbitrary matrices,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ I_\nu \end{bmatrix}, \quad (16c)$$

$$w = Fu + f - K\epsilon - \hat{y}^{(m)}, \quad K = [K_1, K_2, \dots, K_m]. \quad (17)$$

To this system, the results of Ref. 13 are applicable to establish the following theorem (for a detailed proof, see Ref. 15).

Theorem 3.1. Consider the system (15), and assume that the matrix E is asymptotically stable. If the input signal w satisfies the inequalities

$$v^T w > 0, \quad \forall \epsilon \notin S, \quad S = \{\epsilon: \|v\| < \rho\}, \quad \rho > 0, \quad (18a)$$

$$v^T (w - (B^T P B)^{-1} B^T P E \epsilon) > 0, \quad \forall \epsilon \notin S, \quad (18b)$$

where

$$v = B^T P \epsilon, \quad (19)$$

with P solution of Lyapunov equation

$$E^T P + P E = -Q, \quad Q \text{ p.d.}, \quad (20)$$

then the error ϵ remains uniformly bounded and converges in a finite time to a ball of radius $k\rho$ centered at $\epsilon = 0$, k being a suitable positive constant. Moreover, ϵ converges with a rate not less than an exponential one, characterized by a time constant

$$\tau = 2\lambda_{\max}(Q^{-1}P). \quad (21)$$

Here, $\lambda_{\max}(W)$ denotes the maximum eigenvalue of the square matrix W .

As regards the time constant τ , it can be rendered dependent upon only the eigenvalues of the matrix E through a suitable choice of the matrix Q in (20) as pointed out by the following theorem.

Theorem 3.2. If the eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_{m \cdot n}$ of the matrix E are real and distinct, and if we assume in (20)

$$Q = -2(Z^T)^{-1} \Lambda Z^{-1}, \quad (22)$$

with Z such that

$$Z^{-1} E Z = \Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{m \cdot n}], \quad (23)$$

then

$$P = (Z Z^T)^{-1}, \quad (24)$$

$$\tau = 2\lambda_{\max}(Q^{-1}P) = -1/\lambda_{\min}(E). \quad (25)$$

Proof. The proof of Theorem 3.2 is given in Ref. 13. □

On the basis of Theorems 3.1 and 3.2, the construction of a practical tracking controller for the class of systems under consideration can be carried out in the following two step.

Step 1. Choice of a set of matrices K_i in (16a) guaranteeing a prescribed value of the time constant τ through a suitable placement of all the eigenvalues of matrix E [see Eq. (25)].

Step 2. Synthesis of a control signal u in (8) guaranteeing that the signal w in (17) satisfies conditions (18a) and (18b).

In the following theorem, we shall see that the matrices K_i of diagonal form simplify both the problem of arbitrarily placing the eigenvalues of E (step 1 of the procedure) and that of evaluating the matrix P solution of Eq. (20) (needed for the accomplishment of Step 2).

Theorem 3.3. If the matrices $K_i \in R^{\nu \times \nu}$, $i = 1, \dots, m$, in (16a) are chosen of the form

$$K_i = \text{diag}[k_{i\nu}, \dots, k_{i1}], \quad (26)$$

then the eigenvalues of E are the roots λ_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, \nu$, of the polynomials

$$p_j(\lambda) = \lambda^m + k_{1j}\lambda^{m-1} + \dots + k_{mj}, \quad j = 1, \dots, \nu. \quad (27)$$

Moreover, if the roots of each polynomial are distinct, then the matrix P in (24) is given by

$$P = \{P_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} = \{\text{diag}\{p_{1ij}, \dots, p_{vij}\}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}}, \quad (28)$$

where the elements p_{lij} are obtained as follows:

$$\begin{aligned} \{p_{lij}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} &= \left[\begin{array}{cccc} m & \sum_k \lambda_{kl} & \dots & \sum_k \lambda_{kl}^{m-1} \\ \sum_k \lambda_{kl} & \sum_k \lambda_{kl}^2 & \dots & \sum_k \lambda_{kl}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_k \lambda_{kl}^{m-1} & \sum_k \lambda_{kl}^m & \dots & \sum_k \lambda_{kl}^{2m-2} \end{array} \right]^{-1} \\ &= P_l \in R^{m \times m}, \quad l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (29)$$

Proof. The proof of this theorem is given in Appendix A. $\square$

Concerning Step 2, the following theorem addresses the problem of constructing the desired practical tracking controller.

Theorem 3.4. Consider the tracking system (15), (16), (17) associated with the system (8) and with the target trajectory $\hat{y}$, and assume that the matrices K_i , $i = 1, \dots, m$, make the matrix E asymptotically stable. Then, the continuous feedback function

$$u(y, \dots, y^{(m-1)}, \epsilon, \hat{y}^{(m)}): R^{m \cdot \nu} \times R^{m \cdot \nu} \times R^\nu \rightarrow R^\nu,$$

defined as

$$\begin{aligned} u(y, \dots, y^{(m-1)}, \epsilon, \hat{y}^{(m)}) &= h\gamma(y, \dots, y^{(m-1)}, \epsilon, \hat{y}^{(m)}) \\ &\quad \times V(y, \dots, y^{(m-1)})[v/(\|v\| + \delta)] \\ &= \gamma V \tilde{u}_0, \quad \delta > 0, \end{aligned} \quad (30)$$

with

$$\begin{aligned} \gamma(y, \dots, y^{(m-1)}, \epsilon, \hat{y}^{(m)}) &= g(y, \dots, y^{(m-1)}) \\ &\quad + \max[\|K\|; \|K + (B^T P B)^{-1} B^T P E\|] \|\epsilon\| + \|\hat{y}\|, \end{aligned} \quad (31)$$

$$h > (\delta/\rho + 1)\lambda_{\min}(D), \quad (32)$$

gives a signal w in (17) satisfying conditions (18a), (18b) of Theorem 3.1.

Proof. It is sufficient to show that the choice of the signal u as in (30) yields a signal w in (17) that satisfies the inequalities (18a) and (18b). Indeed, as the following inequalities hold:

$$V^T Dv \geq \lambda_{\min}(D) \|v\|^2, \quad (33a)$$

$$V^T f \geq -g \|v\|, \quad (33b)$$

$$-v^T K\epsilon \geq -\|K\| \|\epsilon\| \|v\| \geq -\max[\|K\|, \|K + (B^T PB)^{-1} B^T P E\|] \|\epsilon\| \|v\|, \quad (33c)$$

$$-v^T \hat{y}^{(\nu)} \geq -\|\hat{y}^{(\nu)}\| \|v\|, \quad (33d)$$

we have

$$\begin{aligned} v^T w &= h\gamma v^T D[v/(\|v\| + \delta)] + v^T [f - K\epsilon - \hat{y}^{(m)}] \\ &\geq (\delta/\rho + 1)\gamma[\|v\|^2/(\|v\| + \delta)] - \gamma\|v\| \\ &= \gamma\|v\|\delta/[\rho(\|v\| + \delta)](\|v\| - \rho) > 0, \quad \forall \epsilon \in S, \end{aligned} \quad (34)$$

so that condition (18a) of Theorem 3.1 is satisfied. The fulfillment of condition (18b) can be shown using similar arguments. $\square$

The proof of the previous theorem suggests a corollary that generalizes the proposed class of practical tracking controllers.

Corollary 3.1. Theorem 3.4 still holds if the continuous feedback function (30) is replaced with any one of the following class:

$$u = h\gamma_S Vv, \quad (35)$$

with

$$\gamma_S \geq \gamma/(\|v\| + \delta). \quad (36)$$

Remark 3.2. The class of controls defined by (35), (36) includes the following particular functions:

$$u_1 = \gamma V\tilde{u}_1 = h\gamma V[v/(\max|v_i| + \delta)], \quad (37a)$$

$$u_2 = \gamma V\tilde{u}_2 = \begin{cases} (h/\delta)\gamma Vv, & \|v\| < \delta, \\ h\gamma V(v/\|v\|), & \|v\| > \delta, \end{cases} \quad (\text{saturation control}), \quad (37b)$$

$$u_3 = \gamma V\tilde{u}_3 = (h/\delta)\gamma Vv, \quad (\text{proportional control}), \quad (37c)$$

which are shown in Fig. 1.

Remark 3.3. For the case in which the values of $\epsilon(t_0), \hat{y}, \dots, \hat{y}^{(m-1)}$ are bounded, the functions in the control laws (30) or (37) can be substituted with a constant gain $\bar{\gamma}$ satisfying the inequality

$$\bar{\gamma} \geq \max\{\|f - K\epsilon - \hat{y}^{(m)}\|, \|f - (K + (B^T PB)^{-1} B^T P E)\epsilon - \hat{y}^{(m)}\|\}, \quad (38)$$

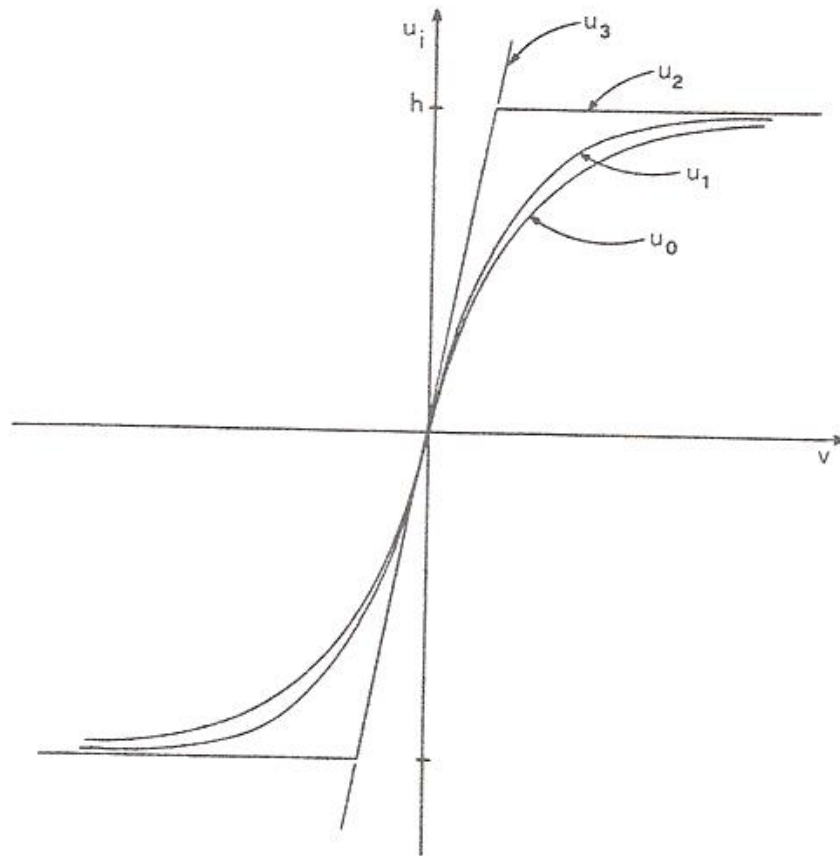


Fig. 1. Proposed control laws: scalar case.

where the maximum is taken over all $p \in \mathcal{P}$, $\epsilon \in S_\epsilon$, $\hat{y} \in S_{\hat{y}}$, $\dots$, $\hat{y}^{(m)} \in S_{\hat{y}^{(m)}}$, with $S_\epsilon, S_{\hat{y}}, \dots, S_{\hat{y}^{(m)}}$ being compact sets defining the values that can be assumed by $\epsilon, \hat{y}, \dots, \hat{y}^{(m)}$, respectively. This follows directly from Corollary 3.1 taking into account (17), (18) and the relation

$$\|\epsilon(t)\| \leq \|\epsilon(t_0)\|, \quad \text{for all } t > t_0.$$

In the remaining part of this section, we shall give some useful suggestions for the generation of the signal v that is required in all the control laws proposed previously.

In the case in which the matrices K_i are chosen diagonal as in Theorem 3.3, the signal v , on the basis of (14), (16b), (28), is simply given by

$$v = B^T P \epsilon = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m p_{1mj} e_1^{(j-1)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m p_{vmj} e_v^{(j-1)} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Namely, each component of this signal is a linear combination of the error e and its derivatives up to the degree $m - 1$; hence, it can be obtained by means of a bank of generalized PD controllers.

The evaluation of the parameters of the generalized PD controllers can be made using (29), which requires a matrix inversion. If, however, one is not interested in prescribing the rate of convergence of the tracking error through the placement of the eigenvalues of matrix E , but only the asymptotic stability of E must be guaranteed, it is possible to avoid the matrix inversion by using the following theorem.

Theorem 3.5. The parameters p_{imj} , $i = 1, \dots, \nu$, can be chosen equal to the coefficients of ν arbitrary, strictly Hurwitz polynomials

$$d_i(s) = p_{im1} + p_{im2}s + \dots + p_{imm}s^{\nu-1} \quad (40)$$

with distinct roots.

Proof. The proof of Theorem 3.5 is given in Appendix B. $\square$

4. Specialization to a Two-Degrees-of-Freedom Manipulator

Let us return to the design of a practical tracking controller for a robotic manipulator in the task-oriented space. For simplicity, consider the two-degrees-of-freedom manipulator of Fig. 2 with links of equal length $l = 0.3$ m and masses $m_1 = 4$ kg and $m_2 = 3$ kg, respectively. We assume that the only unknown parameter is the load mass M , whose value is subject to known bounds.

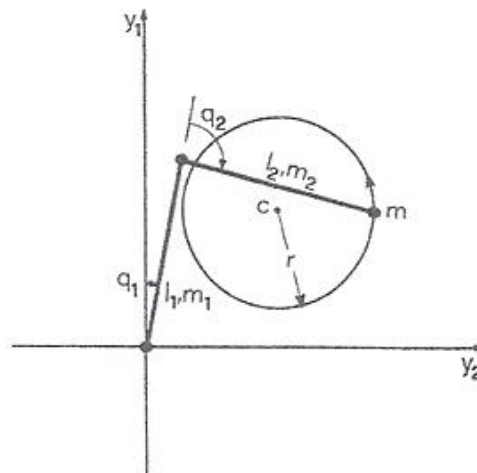


Fig. 2. Manipulator.

The equations of the motion of this system in the Cartesian space can be obtained by (6) taking into account that, in this case, we have

$$J(M, q) = 0.09 \begin{bmatrix} 5.33 + 2M + (3 + 2M) \cos q_2 & 1 + M + (1.5 + M) \cos q_2 \\ 1 + M + (1.5 + M) \cos q_2 & 1 + M \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$H(M, q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -0.09[(3 + 2M)\dot{q}_1\dot{q}_2 + (1.5 + M)\dot{q}_2] \sin q_2 \\ -0.29[(5 + M) \sin q_1 + (1.5 + M) \sin(q_1 + q_2)] \\ 0.09(1.5 + M)\dot{q}_1^2 \sin q_2 - 0.29(1.5 + M) \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (41b)$$

$$h_y(q) = 0.3 \begin{bmatrix} \sin q_1 + \sin(q_1 + q_2) \\ \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}, \quad (41c)$$

$$U(q) = 0.3 \begin{bmatrix} \cos q_1 + \cos(q_1 + q_2) & -\sin q_1 - \sin(q_1 + q_2) \\ \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}. \quad (41d)$$

Note that, in this case, the inverse transformation $h_q(y)$ and the Jacobian matrix $V(y)$ could be obtained easily as a closed form of explicit functions of y , but this is not true in general; therefore, in the sequel, we assume that these functions are not available explicitly.

In accordance with the theory developed in the previous section, for a given twice continuously differentiable target trajectory $\hat{y}(t)$, the following feedback control law can be chosen:

$$u(y, \dot{y}, \varepsilon, \hat{y}^{(2)}) = \bar{h} V(y)(v/(\|v\| + \delta)), \quad (42)$$

where

$$\bar{h} = h\bar{\gamma}, \quad (43)$$

with h and $\bar{\gamma}$ satisfying inequalities (32) and (38), respectively.

The evaluation of suitable values for the constants h and $\bar{\gamma}$ might be made off-line, using an optimum search algorithm that makes use of a numerical technique for the evaluation of the inverse of the Jacobian matrix. As regards the on-line evaluation of the matrix $V(y)$ in (42), on the basis of equality (5a), it can be made directly from measurements of q . Finally, the generation of the signal v can be made using (39) which, in this case, yields

$$v = \begin{bmatrix} -[(\lambda_{11} + \lambda_{21})/(\lambda_{11} - \lambda_{21})](\hat{y}_1 - y_1) - [(\lambda_{12} + \lambda_{22})/(\lambda_{12} - \lambda_{22})](\hat{y}_1 - \dot{y}_1) \\ [2/(\lambda_{11} - \lambda_{21})](\hat{y}_2 - y_2) + [2/(\lambda_{12} - \lambda_{22})](\hat{y}_2 - \dot{y}_2) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

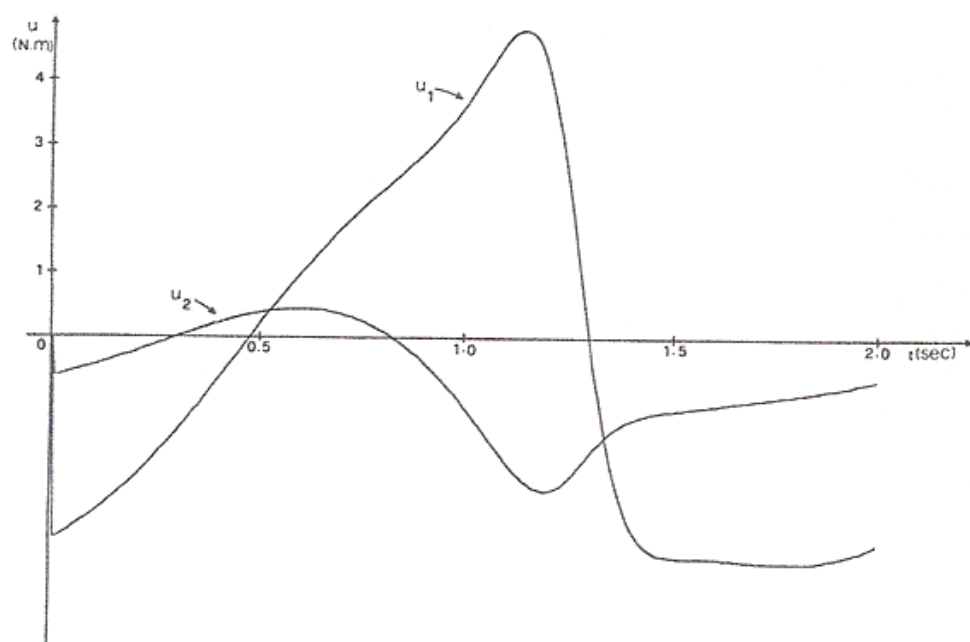


Fig. 3. Computed torques.

where λ_{ij} , $i = 1, 2, j = 1, 2$, are the roots of polynomials of the form (27). Obviously, the time constant τ that specifies the rate of convergence of the tracking error is given by

$$\tau = -1/\max \lambda_{ij}. \quad (45)$$

The performance of the preceding control scheme was evaluated by means of digital simulations. The desired trajectory has been supposed to fulfill the transfer of the end effector along a circle of radius $r = 0.15$ m, centered at $(0.21, 0.21)$, with a constant velocity of π rad/sec. The design of the controller has been carried out with $\lambda_{i1} = -74$, $\lambda_{i2} = -75$ and assuming that objects of mass M less than 2 kg be gripped during all the operations.

Assuming $\delta = 0$, a value of $\bar{h} = 400$ was found to satisfy inequalities (32), (38). Digital simulations, performed with an actual load of 2 kg, $h = 500$, $\delta = 1$, and using a sampling period of 0.5 ms, showed that the system maintained a position error of less than 2 mm along the entire traveling path. Plots of the resulting torques are presented in Fig. 3.

5. Conclusions

A robust control method for the tracking control of a class of uncertain nonlinear dynamical systems has been proposed. This class includes the

model of a robotic manipulator described in task-oriented coordinates (usually a Cartesian frame). The method requires only the knowledge of the bounds of the uncertain parameters and guarantees the ultimate boundedness of the tracking error. Moreover, it does not require very complicated calculations, so that it seems to be particularly suited for microcomputer implementation.

6. Appendix A: Proof of Theorem 3.3

Consider the transformation matrix

$$T = \begin{bmatrix} l_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_1^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & & l_1^T \\ l_2^T & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_m^T \end{bmatrix}, \quad (46)$$

where l_i denotes the i th column of the identity matrix I_m . Straightforward computations yield

$$\hat{E} = T^{-1}ET = \text{diag}[C_1, \dots, C_\nu], \quad (47)$$

where

$$C_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -k_{mj} & -k_{m-1j} & \vdots & \cdots & -k_{1j} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Therefore the characteristic polynomial of E is given by

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - \hat{E}) = \prod_{j=1}^{\nu} p_j(\lambda). \quad (49)$$

To prove the second part of the theorem, we note that the eigenvectors of the matrices C_j are of the form

$$u_i^C = [1, \lambda_{ij}, \dots, \lambda_{ij}^{m-1}]^T, \quad i = 1, \dots, m, \quad (50)$$

so that the eigenvectors for E are given by

$$u_{ij} = T[0, \dots, u_i^{C^T}, \dots, 0]^T. \quad (51)$$

Hence, with standard manipulations, we obtain from (24)

$$P = \begin{bmatrix} mI_\nu & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu} \right] & \cdots & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^{m-1}, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^{m-1} \right] \\ \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu} \right] & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^2, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^2 \right] & \cdots & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^m, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^m \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^{m-1}, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^{m-1} \right] & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^m, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^m \right] & \cdots & \text{diag} \left[\sum_k \lambda_{k1}^{2m-2}, \dots, \sum_k \lambda_{k\nu}^{2m-2} \right] \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \text{diag}[p_{111}, \dots, p_{\nu 11}] & \text{diag}[p_{112}, \dots, p_{\nu 12}] & \cdots & \text{diag}[p_{11m}, \dots, p_{\nu 1m}] \\ \text{diag}[p_{121}, \dots, p_{\nu 21}] & \text{diag}[p_{122}, \dots, p_{\nu 22}] & \cdots & \text{diag}[p_{12m}, \dots, p_{\nu 2m}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}[p_{1m1}, \dots, p_{\nu m1}] & \text{diag}[p_{1m2}, \dots, p_{\nu m2}] & \cdots & \text{diag}[p_{1mm}, \dots, p_{\nu mm}] \end{bmatrix}, \quad (52)$$

where

$$\begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} & \cdots & p_{i1m} \\ p_{i21} & p_{i22} & \cdots & p_{i2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{im1} & p_{im2} & \cdots & p_{imm} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} m & \sum_k \lambda_{ki} & \cdots & \sum_k \lambda_{ki}^{m-1} \\ \sum_k \lambda_{ki} & \sum_k \lambda_{ki}^2 & \cdots & \sum_k \lambda_{ki}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_k \lambda_{ki}^{m-1} & \sum_k \lambda_{ki}^m & \cdots & \sum_k \lambda_{ki}^{2m-2} \end{bmatrix}^{-1} = P_i = P_i^T \in R^{m \times m}, \quad (53)$$

which concludes the proof. $\square$

7. Appendix B: Proof of Theorem 3.4

Our goal is to show that, given ν vectors of the form

$$d_i = [p_{im1}, p_{im2}, \dots, p_{imm}]^T, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (54)$$

such that the associated polynomials (40) are strictly Hurwitz and have distinct roots, there exists an asymptotically stable matrix E of the form (16a) and a positive-definite matrix Q such that the matrix P solution of the Lyapunov equation (20) and the matrix B given by (16b) generate a signal $v = B^T P e$ of the form (39), that is,

$$v = \begin{bmatrix} d_1^T \xi_1 \\ \vdots \\ d_\nu^T \xi_\nu \end{bmatrix}, \quad \xi_i = [e_i, e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(m-1)}]^T. \quad (55)$$

To prove this, let us consider the state transformation

$$z = T^{-1} e, \quad (56)$$

with T given by (46).

With respect to the new basis, the Lyapunov equation (20) can be rewritten as

$$\hat{E}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{E} = -\hat{Q}, \quad (57)$$

with $\hat{E}$ given by (46), (47). Choosing

$$\hat{Q} = \text{diag}[Q_1, \dots, Q_\nu], \quad (58)$$

and taking into account that the associated solution $\hat{P}$ can be put in the block diagonal form

$$\hat{P} = \text{diag}[P_1, \dots, P_\nu], \quad (59)$$

Eq. (57) splits into the following ν equations:

$$C_i^T P_i + P_i C_i = -Q_i, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad (60)$$

with $C_i \in R^{m \times m}$.

Now, it can be easily proved that

$$z = [\xi_1^T, \dots, \xi_\nu^T]^T, \quad (61)$$

$$\hat{B} = T^{-1} B = \begin{bmatrix} l_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_m \end{bmatrix}, \quad l_m = [0, \dots, 0, 1]^T \in R^m, \quad (62)$$

so that we have

$$v = B^T P e = \hat{B}^T \hat{P} z = [l_m P_1, \dots, l_m P_v] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_v \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Therefore, it will suffice to prove that, for any given vector d_i , there exists an asymptotically stable matrix C_i of the form (48) and a positive-definite matrix Q_i such that

$$l_m P_i = d_i, \quad i = 1, \dots, v. \quad (64)$$

To this end, let us consider the transfer function

$$W_i(s) = d_i(sI - C_i)^{-1} l_m = d_i(s)/k_i(s). \quad (65)$$

It can be proved easily that, for any given strictly Hurwitz polynomial $d_i(s)$, there exists a strictly Hurwitz polynomial $k_i(s)$ that makes $W_i(s)$ strictly positive real. This fact, in virtue of the Kalman-Yacubovich lemma, proves the theorem. $\square$

REFERENCES

1. PAUL, R. P. C., *Robot Manipulators, Mathematics, Programming*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.
2. AMBROSINO, G., CELENTANO, G., and GAROFALO, F., *Adaptive Tracking Control of Industrial Robots*, *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control* (to appear).
3. RYAN, E. P., LEITMANN, G., and CORLESS, M., *Practical Stability of Uncertain Dynamic Systems. Application to Robot Tracking*, *Journal of Optimization Theory and Applications* (to appear).
4. SLOTINE, J. J., and SASTRY, S. S., *Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators*, *International Journal of Control*, Vol. 38, pp. 465-492, 1983.
5. BALESTRINO, A., DE MARIA, G., and SCIAVICCO, L., *An Adaptive Model Following Control for Robotic Manipulators*, *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, Vol. 105, pp. 141-151, 1983.
6. VUKOBRATOVIC, M., and KIRCANSKI, N., *Decoupled Control of Robots via Asymptotic Regulators*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, pp. 978-981, 1983.
7. LUH, J. Y. S., WALKER, M. V., and PAUL, R. P. C., *On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators*, *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, Vol. 102, pp. 69-76, 1980.
8. LEITMANN, G., *Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems with Bounded Uncertainties*, *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, Vol. 101, pp. 212-216, 1979.

9. GUTMAN, S., and PALMOR, Z., *Min-Max Controllers in Uncertain Dynamical Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 20, pp. 850-861, 1982.
10. BARMISH, B. R., CORLESS, M., and LEITMANN, G., *A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 21, pp. 246-255, 1983.
11. CORLESS, M. and LEITMANN, G., *Adaptive Control of Systems Containing Uncertain Functions and Unknown Functions with Uncertain Bounds*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 41, pp. 155-168, 1983.
12. GUTMAN, S., and LEITMANN, G., *Stabilizing Feedback Control for Dynamical Systems with Bounded Uncertainty*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Houston, Texas, 1976.
13. AMBROSINO, G., CELENTANO, G., and GAROFALO, F., *Robust Model Tracking Control for a Class of Nonlinear Plants*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-30, pp. 275-278, 1985.
14. BARMISH, B. R., PETERSEN, I. R., and FEUER, A., *Linear Ultimate Boundedness Control of Uncertain Dynamical Systems*, Automatica, Vol. 19, pp. 523-532, 1983.
15. AMBROSINO, G., CELENTANO, G., and GAROFALO, F., *Decentralized PD Controllers for Tracking Control of Uncertain Multivariable Systems*, Proceedings of 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York, England, 1985.