

### Scopi dell'esercitazione

Si vogliono risolvere le equazioni del moto longitudinal-simmetrico per un'assegnata legge di manovra. Scegliendo opportunamente gli assi (assi terra), l'angolo di virata  $\delta$  risulta nullo, dunque:  $\delta = \beta = \nu = 0$ . L'espressione della velocità angolare del velivolo intorno al baricentro è:  $q = d\theta = d\alpha + d\gamma$

### Caratteristiche geometriche e di massa del velivolo

|                     |                          |                       |  |
|---------------------|--------------------------|-----------------------|--|
| $S := 17\text{m}^2$ | Superficie alare         | $W := 6000\text{kgf}$ | Peso del velivolo                      |
| $b := 6.90\text{m}$ | Apertura alare           | $K_y := 2.20\text{m}$ | Raggio d'inerzia                       |
| $c := 2.60\text{m}$ | Corda media aerodinamica | $x_g := 0.36$         | Posizione del baricentro adimensionale |

### Caratteristiche aerodinamiche del velivolo

$C_{d0} := 0.058$        $K_{cd} := 0.35$      $m_{cd} := 2$     Coefficienti per il calcolo di  $C_d$

$x_n := 0.45$     Posizione del punto neutro

$Cl_{\alpha} := 4.18\text{rad}^{-1}$      $Cl_{\delta e} := 0.287\text{rad}^{-1}$      $Cl_{\delta s} := 0.522\text{rad}^{-1}$      $Cl_{d\alpha} := 2.27$      $Cl_{dq} := 4.72$

$C_{m0} := -0.015$      $C_{m\delta e} := -0.507\text{rad}^{-1}$      $C_{m\delta s} := -0.923\text{rad}^{-1}$      $C_{md\alpha} := -4.00$      $C_{mdq} := -8.34$

$C_{md\delta e} := 0.00$

si può ricavare  $dC_m/d\alpha = dC_m/dCl \cdot dCl/d\alpha = (x_g - x_n)/c \cdot Cl_{\alpha}$      $C_{m\alpha} := (x_g - x_n) \cdot Cl_{\alpha}$      $C_{m\alpha} = -0.376$

### Caratteristiche del propulsore

$T := 7530\text{kgf}$      $C_{mT} := 0.00$      $\mu_T := 0.00$     Coefficiente di momento e angolo di calettamento

### Caratteristiche aerodinamiche e geometriche dell'equilibratore

$S_e := 1.16\text{m}^2$     Superficie dell'equilibratore     $c_e := 0.420\text{m}$     Corda media aerodinamica

$W_e := 50\text{kgf}$     Peso dell'equilibratore     $K_e := 0.090\text{m}$     Raggio d'inerzia

$C_{he0} := 0.00$      $C_{he\alpha} := -0.0035\text{rad}^{-1}$      $C_{he\delta e} := -0.010\text{rad}^{-1}$      $C_{he\delta s} := -0.0057\text{rad}^{-1}$

$C_{hed\delta e} := 0.00$      $C_{hed\alpha} := -0.0220$      $C_{hed\theta} := -0.0360$

### Condizioni iniziali di volo

$t := 0$     Tempo iniziale     $q := 0$     Volo rettilineo     $dV := 0$     Volo uniforme

$dq := 0$      $d\alpha := 0$      $F_e := 0$     Volo trimmato, sforzo di barra uguale a zero

$z := 4000\text{m}$     Quota iniziale     $\rho := 0.8191 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$     Densità a quota  $z$      $V_0 := 425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$     Velocità iniziale

### Determinazione delle condizioni iniziali di volo

Per trovare le condizioni iniziali di volo uniforme si devono considerare le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi  $X_a$  e  $Z_a$  e l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse  $Y_a$ .

Si ipotizza che il volo sia uniforme, quindi le accelerazioni sono nulle, inoltre il moto è rettilineo,  $\gamma = \text{cost.}$

Le incognite sono  $\alpha, \delta_e, \delta_s, \gamma$ , quindi per avere un sistema determinato bisogna aggiungere un'altra equazione, quella di equilibrio dei momenti intorno all'asse di cerniera.

### Espressione dei coefficienti aerodinamici

$$C_D(\alpha, \delta_e, \delta_s) := C_{d0} + K_{cd} \cdot (Cl_{\alpha} \cdot \alpha + Cl_{\delta e} \cdot \delta_e + Cl_{\delta s} \cdot \delta_s)^{m_{cd}}$$

$$C_L(\alpha, \delta_e, \delta_s) := Cl_{\alpha} \cdot \alpha + Cl_{\delta e} \cdot \delta_e + Cl_{\delta s} \cdot \delta_s$$

$$C_M(\alpha, \delta_e, \delta_s) := C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\delta e} \cdot \delta_e + C_{m\delta s} \cdot \delta_s$$

### Risoluzione del sistema per determinare le condizioni iniziali

$$h := \left( \frac{\rho}{2 \cdot \frac{W}{S}} \right) \cdot v_0^2 \quad h = 21.373 \quad \text{quantità adimensionale}$$

primo tentativo:  $\alpha := -1 \text{ deg} \quad \gamma := 0 \text{ deg} \quad \delta e := 0 \text{ deg} \quad \delta s := 3 \text{ deg}$

Given

$$0 = \left( \frac{T}{W} \right) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\gamma) - h \cdot [C_{d0} + K_{cd} \cdot (C_{l\alpha} \cdot \alpha + C_{l\delta e} \cdot \delta e + C_{l\delta s} \cdot \delta s)^{mcd}]$$

$$0 = \left( \frac{T}{W} \right) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\gamma) + h \cdot (C_{l\alpha} \cdot \alpha + C_{l\delta e} \cdot \delta e + C_{l\delta s} \cdot \delta s)$$

$$0 = C_{m0} + C_{m\alpha} \cdot \alpha + C_{m\delta s} \cdot \delta s + C_{m\delta e} \cdot \delta e$$

$$0 = C_{he\alpha} \cdot \alpha + C_{he\delta e} \cdot \delta e + C_{he\delta s} \cdot \delta s$$

$$G := \text{Find}(\alpha, \gamma, \delta s, \delta e)$$

$$G = \begin{pmatrix} 0.787 \\ -0.032 \\ -1.602 \\ 0.638 \end{pmatrix} \text{deg} \quad G = \begin{pmatrix} 0.014 \\ -5.582 \times 10^{-4} \\ -0.028 \\ 0.011 \end{pmatrix} \text{rad}$$

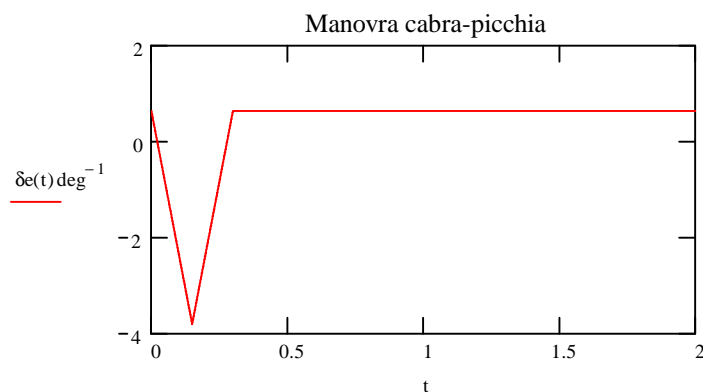
### Determinazione della legge di manovra

La manovra da effettuare è un cabra-picchia: a partire dalla condizione iniziale, si effettua una rotazione dell'equilibratore con legge lineare con pendenza di  $-0.5167 \text{ rad/sec}$  per  $0.15$  secondi, successivamente se ne effettua una con pendenza  $0.5167 \text{ rad/sec}$  per altri  $0.15$  secondi. Nel caso di manovra a comandi bloccati si tiene fermo l'equilibratore per ulteriori  $1.7$  secondi.

$$\alpha_0 := G_0 \quad \gamma_0 := G_1 \quad \delta s_0 := G_2 \quad \delta e_0 := G_3 \quad \theta_0 := \alpha_0 + \gamma_0 \quad \theta_0 = 0.013 \text{ rad}$$

$$t := 0, 0.0002 \dots 2$$

$$\delta e(t) := \begin{cases} (\delta e_0 - 0.5167 \cdot t) & \text{if } 0 \leq t \leq 0.15 \\ [-0.5167 \cdot 0.15 + \delta e_0 + 0.5167 \cdot (t - 0.15)] & \text{if } 0.15 \leq t \leq 0.3 \\ \delta e_0 & \text{if } 0.3 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



### Integrazione delle equazioni del moto longitudinal-simmetrico

Prendiamo in considerazione le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo gli assi Xa e Za, che sono differenziali di primo grado, e quella di equilibrio alla rotazione attorno all'asse Ya, che è differenziale di secondo grado, che quindi deve essere abbassata di grado sfruttando il legame tra q e  $\theta$ , ossia  $q' = \theta$ . Abbiamo quindi quattro equazioni nelle quattro incognite: velocità V, incidenza  $\alpha$ , angolo di beccheggio  $\theta$ , velocità angolare di beccheggio q.

A queste equazioni possiamo aggiungere la definizione delle componenti della velocità nelle due direzioni Xa e Za, ossia:

$$x' = V \cos(\gamma) = V \cos(\theta - \alpha) \quad z' = V \sin(\gamma) = V \sin(\theta - \alpha)$$

così da ricavare le due incognite per la posizione x e z.

In totale quindi bisogna risolvere un sistema di 6 equazioni differenziali di primo grado.

$$\text{Poniamo : } \xi := \frac{T}{W} \quad \tau := \rho \cdot \left( \frac{V_0^2}{2 \cdot \frac{W}{S}} \right) \quad g = 9.807 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \mu := \left[ \frac{(\rho \cdot S \cdot b)}{\frac{W}{g}} \right]^{-1}$$

$$D(t, a) := \begin{bmatrix} g \cdot \left[ \xi \cdot \cos(a_1) - \sin(a_2 - a_1) - \left( \frac{\tau}{V_0^2} \right) \right] \cdot (a_0)^2 \cdot \left[ C d c \right. \\ \left. \left( \frac{g}{a_0} \right) \cdot \left[ \left( a_0 \cdot \frac{a_3}{g} \right) \cdot \left( 1 - c \cdot \frac{C l d q}{4 \cdot b \cdot \mu} \right) - \xi \cdot \sin(a_1) + \cos(a_2 - \right. \right. \\ \left. \left. a_3 \right. \right. \\ \left. \left. c \cdot \left[ \frac{(a_0)^2}{2 \cdot b \cdot \mu \cdot (K y)^2} \right] \cdot \left[ C m_0 + C m \alpha \cdot a_1 + C m \delta e \cdot \delta e(t) + C m \delta s \cdot \delta s_0 + \left[ \left[ \left( \frac{g}{a_0} \right) \cdot \left( a_0 \cdot \frac{a_3}{g} \right) \cdot \left( 1 - c \cdot \frac{C l c}{4 \cdot b} \right) \right] \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. a_0 \cdot \cos(a_1) \right. \right. \\ \left. \left. a_0 \cdot \sin(a_2) \right. \right. \end{bmatrix}$$

$$c_0 := \begin{pmatrix} 425 \\ \alpha_0 \\ \theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

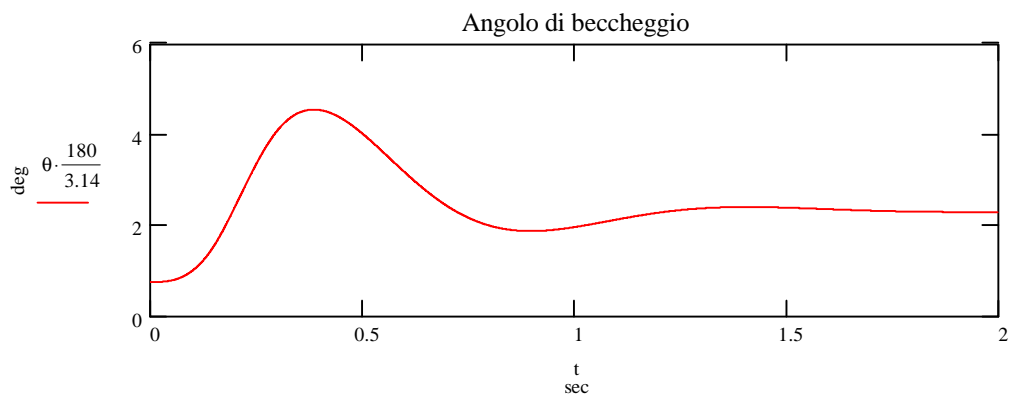
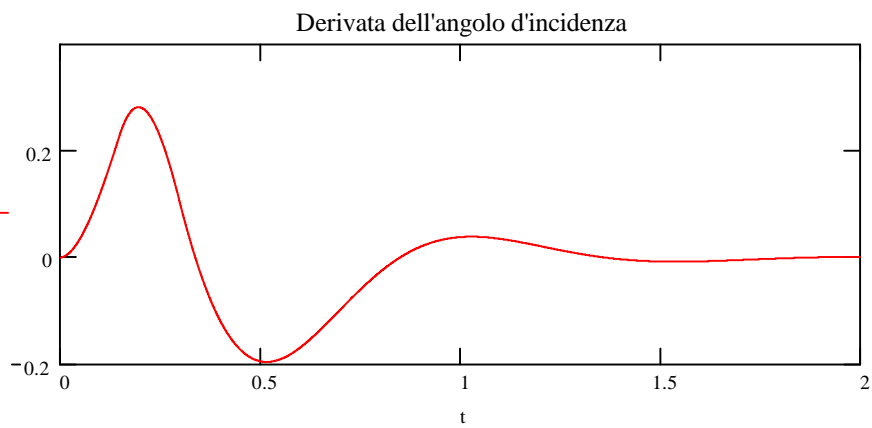
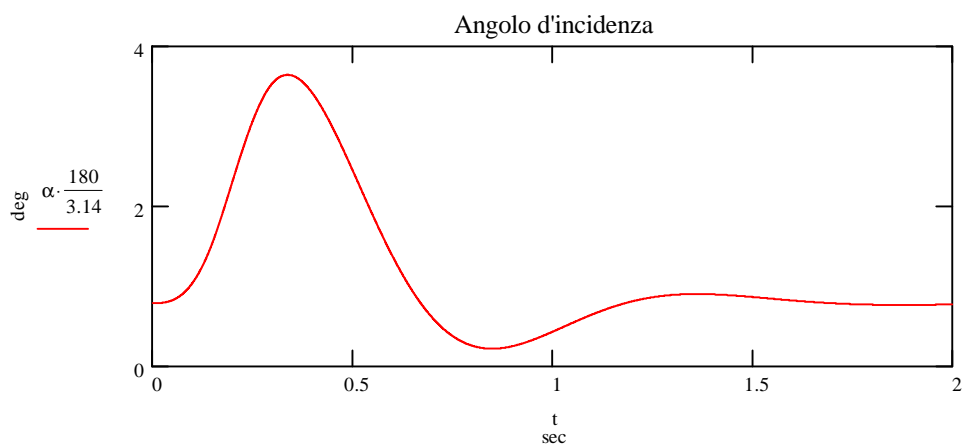
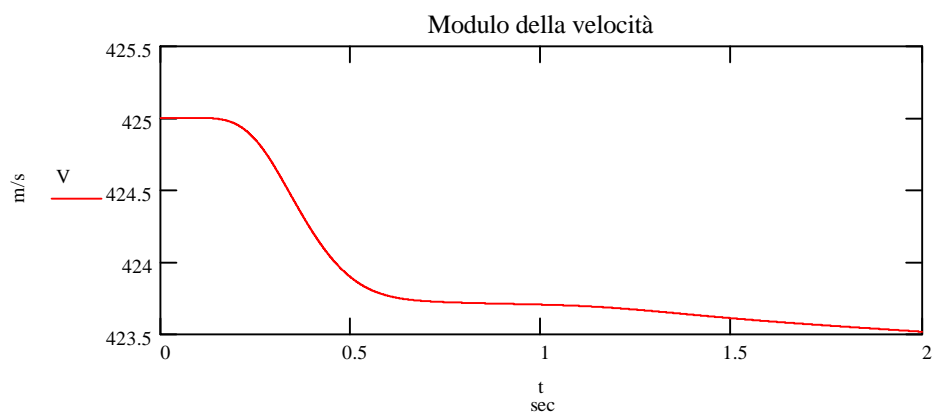
Vettore delle condizioni iniziali, i valori di V0 e z sono espressi come numero per problemi di compatibilità di unità di misura (deve essere tutto adimensionale).

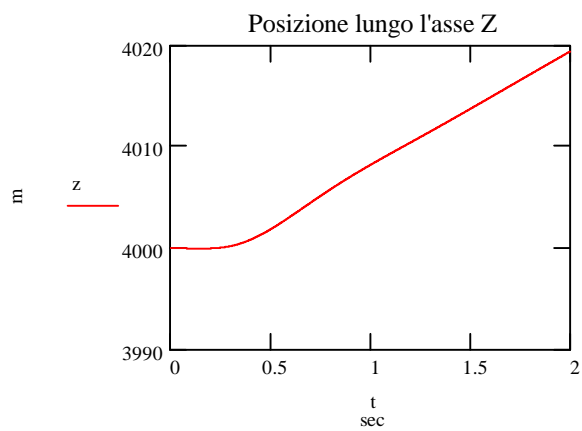
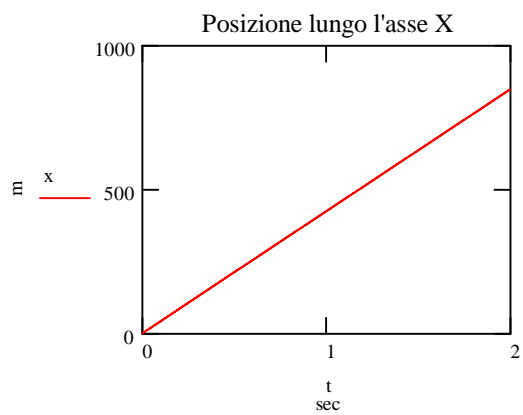
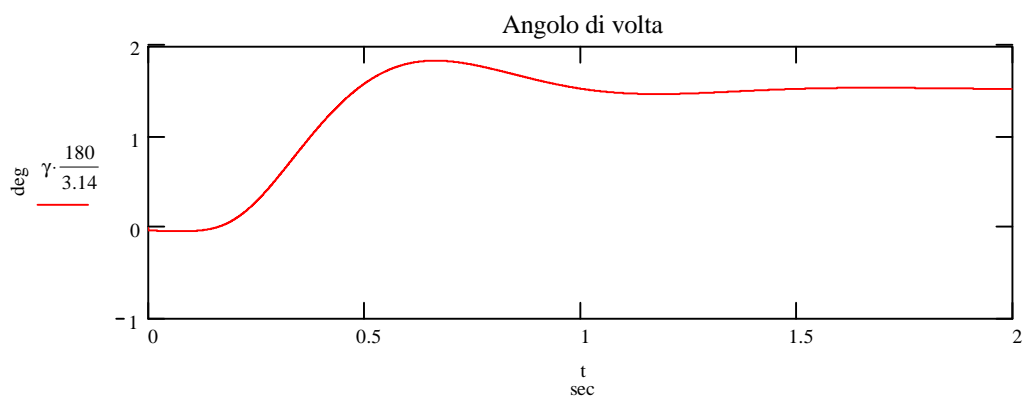
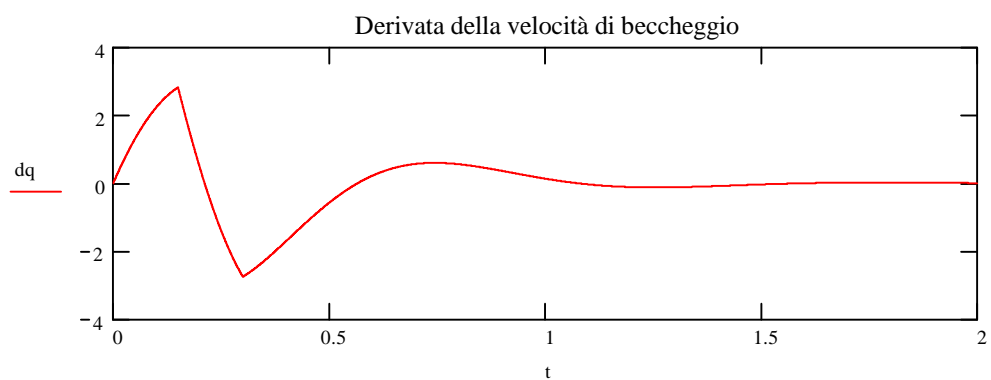
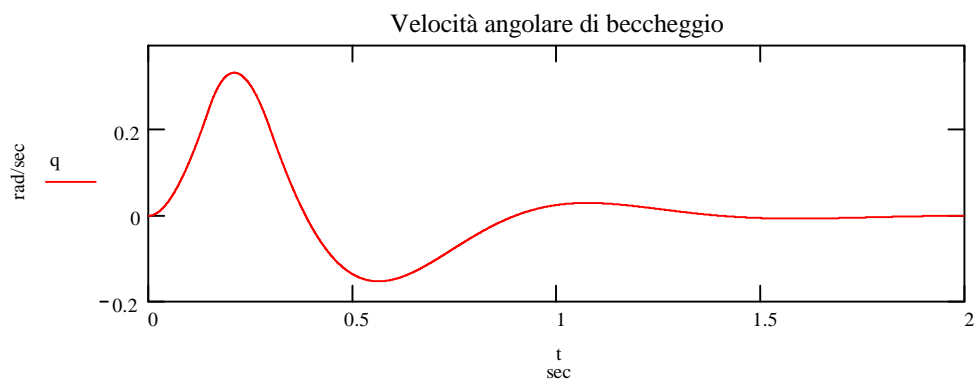
$$\text{Sol} := \text{rkfixed}(c_0, 0, 2, 10000, D)$$

$$t := \text{Sol}^{(0)} \quad V := \text{Sol}^{(1)} \quad \alpha := \text{Sol}^{(2)} \quad \theta := \text{Sol}^{(3)} \quad q := \text{Sol}^{(4)} \quad x := \text{Sol}^{(5)} \quad z := \text{Sol}^{(6)}$$

$$i := 1..10000 \quad \gamma_i := \theta_i - \alpha_i$$

$$j := 1..9999 \quad d\alpha_j := \frac{(\alpha_{j+1} - \alpha_j)}{t_{j+1} - t_j} \quad dq_j := \frac{(q_{j+1} - q_j)}{t_{j+1} - t_j}$$





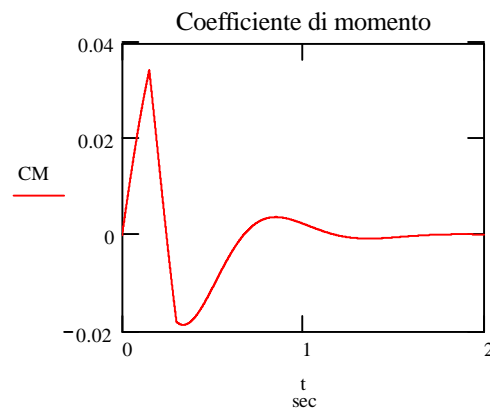
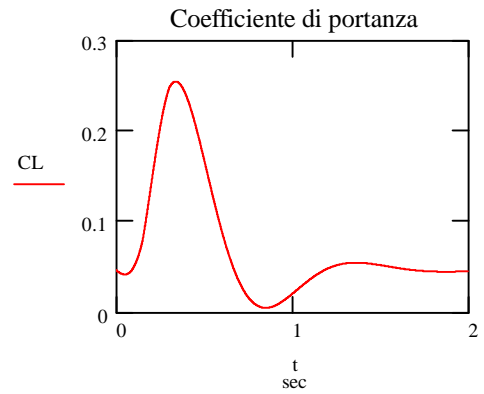
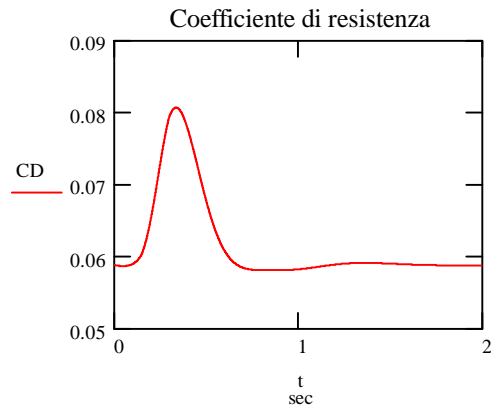
Note queste variabili, si possono calcolare i coefficienti adimensionali di portanza, resistenza e momento:

$$CD_i := Cd0 + Kcd \cdot (Cl\alpha \cdot \alpha_i + Cl\delta e \cdot \delta e(i \cdot 0.0002 - 0.0002) + Cl\delta s \cdot \delta s0)^{mcd}$$

$$CL_i := Cl\alpha \cdot \alpha_i + Cl\delta e \cdot \delta e(i \cdot 0.0002 - 0.0002) + Cl\delta s \cdot \delta s0$$

$$CM_i := Cm0 + Cm\alpha \cdot \alpha_i + Cm\delta e \cdot \delta e(i \cdot 0.0002 - 0.0002) + Cm\delta s \cdot \delta s0$$

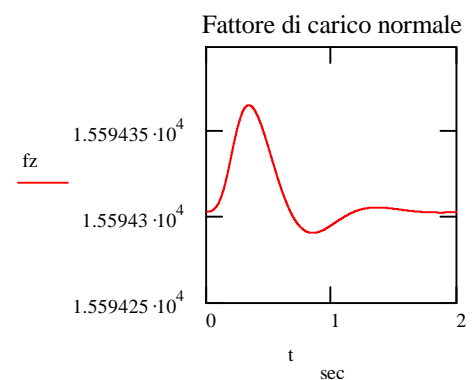
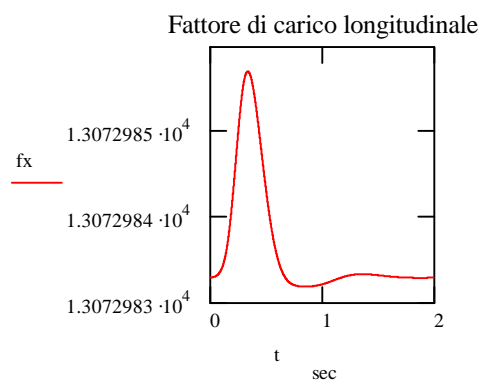
$$CD_0 := CD_1 \quad CL_0 := CL_1 \quad CM_0 := CM_1$$



Si possono calcolare anche i fattori di carico normale e longitudinale:

$$fx := \left[ \frac{-(T)}{W} \right] \cdot \cos(\alpha) + \frac{(\rho \cdot V^2 \cdot CD)}{2 \cdot \frac{W}{S}} \cdot 1 \frac{m^2}{s^2}$$

$$fz := \left( \frac{T}{W} \right) \cdot \sin(\alpha) + \frac{(\rho \cdot V^2 \cdot CL) \cdot 1 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot \frac{W}{S}}$$



Volendo calcolare lo sforzo di barra del pilota, nel caso quindi che i comandi non siano bloccati, bisogna applicare l'equazione di equilibrio dei momenti all'equilibratore:

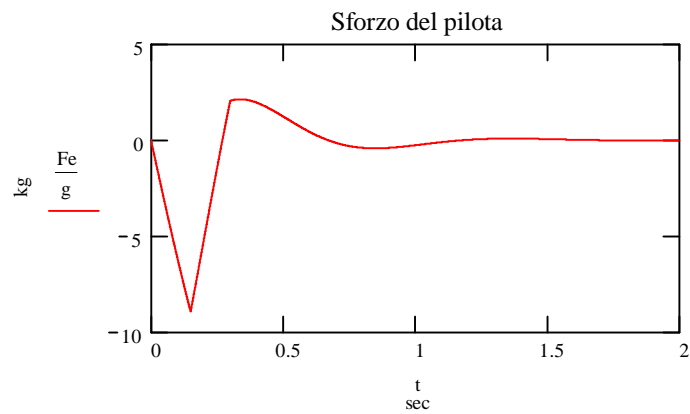
$$-I_e \ddot{\delta_e} + H_a + H_c = 0$$

Il termine legato all'inerzia dell'equilibratore è nullo perchè la derivata seconda di  $\delta_e$  è nulla, quindi ci restano solo i termini legati all'aerodinamica ed allo sforzo del pilota.

$$H_{a_i} := \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \rho \cdot (V_i)^2 \cdot S_e \cdot c_e \cdot (C_{he0} + C_{he\alpha} \cdot \alpha_i + C_{he\delta_e} \cdot \delta_e (i \cdot 0.0002 - 0.0002) + C_{he\delta_s} \cdot \delta_{s0})$$

$$H_c := -H_a \quad R_{se} := 0.3 \quad \text{Sensibilità del comando}$$

$$F_e := H_c \cdot \frac{R_{se}}{K_e}$$







$$\left[ \frac{\left( \frac{1}{\mu} \right) - \xi \cdot \sin(a_1) + \cos(a_2 - a_1) - \left[ \tau \cdot \frac{(a_0)^2}{V_0^2} \cdot (\text{Cl}\alpha \cdot a_1 + \text{Cl}\delta e \cdot \delta e(t) + \text{Cl}\delta s \cdot \delta s_0) \right]}{1 + c \cdot \frac{\text{Cl}d\alpha}{4 \cdot b \cdot \mu}} + \text{Cmd}q \cdot a_3 \cdot \frac{c}{2 \cdot a_0} \right]$$

