Precorsi di Matematica
A.A. 2019/20

Domenico Angelo La Manna
Gianpaolo Piscitelli

Area Didattica di Ingegneria

ISBN: 9788890974816

Università Degli Studi Di Cassino
e del Lazio Meridionale

Area Didattica di Ingegneria

Precorsi di Matematica
A.A. 2019/20

Domenico Angelo La Manna
Gianpaolo Piscitelli

ISBN: 9788890974816

L'identità di Eulero era una stella cadente che illuminava le tenebre,
era il verso di una poesia inciso in una grotta avvolta dall'oscurità.
Ancora colpita dalla sua bellezza.
(cit. La formula del professore, Yoko Ogawa)

Indice

Introduzione

Il seguente opuscolo vuole rappresentare uno strumento rivolto agli studenti che hanno terminato le scuole superiori e stanno per avviarsi agli studi universitari della matematica nelle facoltà ingegneristiche. Esso è una raccolta degli esercizi proposti durante le lezioni rivolte agli studenti che hanno mostrato lacune nella materia agli esami di orientamento. Lo scopo principale del presente opuscolo è quello di abituare gli studenti al ragionamento logico-deduttivo e, a tal fine, è arricchito dagli svolgimenti degli esercizi proposti. L'organizzazione del materiale è la seguente. Nel primo capitolo si affrontano argomenti di geometria piana dando ampio risalto alle relazioni tra rette (parallelismo e perpendicolarità) e alla funzione lineare. Nel secondo capitolo si richiamano definizioni di base per le funzioni e si propongono poi equazioni e disequazioni con polinomi (lineari, fratte, di secondo grado, razionali, con valore assoluto) in ordine crescente di difficoltà. Nel terzo capitolo si studiano le proprietà (insiemi di definizione e monotonia) delle funzioni esponenziali e logaritmiche e si propone poi di applicarle ai fini della risoluzione di equazioni e disequazioni. Nel quarto capitolo si introducono le funzioni trigonometriche e si propone di applicarne le prime proprietà per la risoluzione di diversi esercizi. In appendice vengono proposte le prove finali dell'anno 2019/2020 relative ai precorsi di Matematica al fine di dare allo studioso lettore una precisa idea della tipologia di prove che dovrà affrontare all'inizio dei suoi studi universitari. Un particolare ringraziamento al prof. Antonio Corbo Esposito e al dott. Francesco Calabrò che hanno supervisionato l'intero lavoro e ai ragazzi che si sono occupati della didattica integrativa: Valentina Cima, Paolo Cozzuto, Davide Lanni, Andrea Miele, Filippo Milano, Linda Moretti, Riccardo Nitiffi, Luciano Tomassi, Sara Ricci.

Domenico
Gianpaolo

Capitolo 1

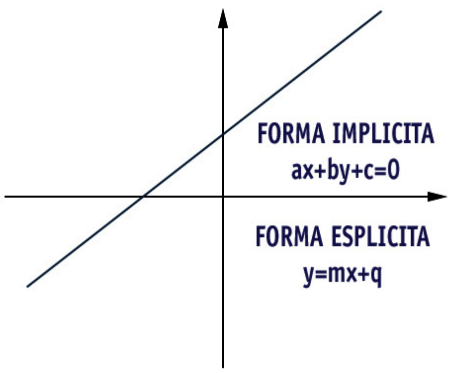
Geometria piana

Esercizio 1.1. *Data la retta nel piano:*

$$r \ : 5x - y - 6 = 0$$

Trovare il coefficiente angolare e l'intercetta all'origine di r e la retta s ad essa parallela passante per $P = (0, 1)$. Trovare la retta t perpendicolare ad r e passante per P. Scrivere la retta sia in forma esplicita che in forma implicita.

Il coefficiente angolare di una retta è un coefficiente numerico solitamente indicato con m, che esprime una misura della pendenza della retta rispetto all'asse x (o a qualsiasi retta orizzontale). Ci sono due modi per calcolare il coefficiente angolare e dipendono dalla forma in cui viene espressa l'equazione della retta. Se la retta r è data in forma implicita, cioè nella forma



$ax + by + c = 0$, dove a, b, c sono numeri reali, il coefficiente angolare si ricava nel seguente modo:

$$m = -\frac{a}{b},$$

se $b \neq 0$. Altrimenti, la retta è parallela all'asse y e il coefficiente angolare non è definito.
Se la retta r è data in forma esplicita, ossia attraverso un'equazione della forma $y = mx + q$, allora il coefficiente angolare è proprio il coefficiente della x. Nel nostro caso, l'equazione della retta è data in forma implicita, per cui il coefficiente angolare è:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{-1} = 5.$$

L'intercetta all'origine (o l'ordinata all'origine o anche quota all'origine o termine noto) di una retta esprime il valore dell'ordinata del punto in cui la retta data interseca l'asse delle y. Dunque q è l'ordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse y. Se la retta r è data in forma implicita, la quota all'origine q si calcola:

$$q = -\frac{c}{b},$$

se $b \neq 0$, altrimenti non è definita. Se invece la retta r è data in forma esplicita $y = mx + q$, allora q è la quota all'origine. Nel nostro caso, si ha

$$q = -\frac{c}{b} = -\frac{-6}{-1} = -6.$$

Per definizione, due rette nel piano hanno lo stesso coefficiente angolare, per cui poniamo

$$m = m'$$

dove m è il coefficiente angolare della retta r e m' è il coefficiente angolare della retta s di cui vogliamo determinare l'equazione. Tra le infinite rette, parallele tra loro, di coefficiente angolare m' vogliamo trovare quella che passa per il punto dato. Bisogna dunque imporre il passaggio per il punto:

$$y - y_0 = m'(x - x_0).$$

nel nostro caso otteniamo

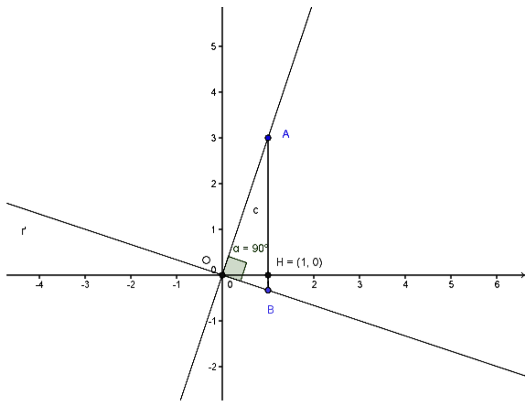
$$y - 1 = 5(x - 0).$$

La retta in forma esplicita è quindi

$$y = 5x + 1,$$

in forma implicita

$$5x - y + 1 = 0.$$



Una semplice applicazione del secondo teorema di Euclide porta a dire che il prodotto dei coefficienti angolari di due rette perpendicolari ha modulo unitario. Ma, poichè le rette appartengono a quadranti alternativamente diversi, i loro coefficienti angolari dovranno essere discordi, quindi due rette sono invece perpendicolari se e solo se i coefficienti angolari sono antireciproci:

$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Nel nostro caso abbiamo dunque

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{5}.$$

Analogamente al caso precedente, noti il coefficiente angolare e imponendo il passaggio per il punto, otteniamo

$$\begin{aligned}
&y - y_0 = m'(x - x_0);\\
&y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 0);\\
&y = -\frac{1}{5}x + 1 \quad \text{(forma esplicita)};\\
&x - 5y + 5 = 0 \quad \text{(forma implicita)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.2. *Calcolare la distanza tra la retta $r_1 : 3x - 2y + 5 = 0$ e il punto $P = (0, 3)$ e la distanza tra la retta $r_2 : x = 2$ e il punto $Q = (1, 1)$.*

Per calcolare la distanza di una retta da un punto, bisogna individuare la cosidetta “retta di minima distanza”, ovvero la retta perpendicolare alla retta data che passa per il punto dato. Il coefficiente angolare della retta r_1 è $m = -\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, e dunque il suo antireciproco è $-\frac{2}{3}$. Per calcolare la retta di minima distanza tra tutte le rette perpendicolari ad r_1, bisogna dunque imporre il passaggio per il punto P:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 0),$$

per ottenere la retta s_1 cercata: $y = -\frac{2}{3}x + 3$. Il punto di intersezione tra r_1 ed s si ottiene mettendo a sistema le due equazioni che le rappresentano:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0; \end{cases}$$

ottenendo il punto $R = (\frac{3}{13}, \frac{37}{13})$. La distanza della retta r_1 dal punto P è dunque la distanza $d(P, R)$ che otteniamo applicando la classica formula della distanza tra due punti P_1 e P_2:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Nel nostro caso $d(P, R) = \sqrt{(\frac{3}{13} - 0)^2 + (\frac{37}{13} - 3)^2} = \frac{\sqrt{13}}{13}$. In alternativa, possiamo anche ricavare la distanza di una retta $r : ax + by + c = 0$ da un punto $P = (x_0, y_0)$ tramite la formula diretta

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nel nostro caso otteniamo $d(P, r_1) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$ e $d(Q, r_2) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 1$.

Esercizio 1.3. *Dati i punti $A = (4, 3)$, $B = (2, 7)$, scrivere l'equazione della retta passante per A e B, in forma implicita ed esplicita.*

Dati due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ and $P_2 = (x_2, y_2)$ la retta che passa per questi due punti è data da:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Nel nostro caso

$$\frac{x - 4}{2 - 4} = \frac{y - 3}{7 - 3}$$

e quindi la retta cercata ha equazione implicita $2x + y - 11 = 0$ ed equazione esplicita $y = -2x + 11$.

Esercizio 1.4. *Date le rette $r_1 : 3x + y - 4 = 0$ e $r_2 : 4x - y + 3 = 0$ e il punto $P(1, 2)$, determinare la retta passante per P e parallela ad r_1, la retta passante per P perpendicolare ad r_2, l'intersezione tra r_1 e r_2.*

Il coefficiente angolare della retta r_1 è $m = -\frac{a}{b} = -3$, il suo antireciproco è dunque $\frac{1}{3}$ e dunque imponendo il passaggio per il punto otteniamo:

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1),$$

quindi la retta passante per P e parallela ad r_1 è $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
Il coefficiente angolare della retta r_2 è $m = -\frac{a}{b} = 4$, e dunque imponendo il passaggio per il punto otteniamo:

$$y - 2 = 4(x - 2),$$

quindi la retta passante per P e parallela ad r_2 ha equazione $y = 4x - 6$.
L' intersezione tra r_1 ed r_2 si ottiene mettendo a sistema le due equazioni che le rappresentano:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = 4x - 6; \end{cases}$$

ottenendo il punto $R = (\frac{13}{11}, -\frac{14}{11})$.

Esercizio 1.5. *Sia T il triangolo di vertici $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$ e $C = (3, 6)$ e sia T_1 il triangolo ottenuto da esso mediante la traslazione*

$$\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 5 \end{cases}$$

Calcolare perimetro e area dei due triangoli e verificare che sono uguali.

Il perimetro di un triangolo è la somma delle lunghezze dei tre lati e dunque basta calcolare le tre lunghezze dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ and $\overline{CA}$ tramite la formula della distanza tra due punti generici $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} a = d(A, B) &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = 2; \\ b = d(B, C) &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (6 - 4)^2} = 2\sqrt{2}; \\ c = d(C, A) &= \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 6)^2} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dunque il perimetro

$$P_T = a + b + c = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5}.$$

D'altra parte, per il calcolo dell'area, si può utilizzare la formula di Erone:

$$A_T = \sqrt{\frac{P}{2} \cdot \left(\frac{P}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{P}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{P}{2} - c\right)}.$$

Dunque nel nostro caso:

$$A_T = \sqrt{\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(-1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{5}\right)} =$$
$$= \sqrt{\left[\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)^2 - 1\right]\left[1 - \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2\right]} = 2.$$

Applicando la traslazione, i vertici del triangolo T', sono $A = (3, -3)$, $B = (3, -1)$ e $C = (5, 1)$. In maniera analoga al triangolo T', si ottiene il perimetro e l'area.

Esercizio 1.6. *Determinare l'area del quadrilatero avente vertici nei punti $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, 2)$, $D(3, 1)$. Che tipo di quadrilatero è? Giustificare la risposta.*

Esercizio 1.7. *Determinare l'intersezione delle rette $y = 4x - 1$ e $y = 4x + \frac{3}{2}$. Cosa si osserva?*

Esercizio 1.8. *Determinare l'equazione della retta passante per $P = (-1, -2)$ e parallela alla retta di equazione $y = -\frac{4}{3}x + \frac{31}{3}$.*

Esercizio 1.9. *Determinare l'equazione implicita dell'asse del segmento che ha come estremi i punti $A = (1, -1)$ e $B = (-2, 1)$. Determinare la proiezione ortogonale del punto $Q = (3, 2)$ sulla retta trovata.*

Esercizio 1.10. *Determinare l'intersezione della retta di equazione $5x + 2y = 8$ con la retta passante per i punti $A = (0, 2)$ e $B = (3, 0)$.*

Esercizio 1.11. *Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P(-3, -1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = 4x - \frac{1}{3}$.*

Esercizio 1.12. *Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (2, -3)$ sulla retta r di equazione $r : y = -x + 4$. Calcola inoltre la distanza del punto P dalla retta.*

Esercizio 1.13. *Determinare la distanza del punto* $P(-4,-7)$ *dalla retta di equazione* $x = 6$.

Esercizio 1.14. *Determinare la lunghezza del segmento* $\overline{PQ}$ *dove* P *è il punto di intersezione della retta* r *passante per* $A = (1,-2)$ *e* $B(-2,0)$ *con la retta* $s : y = x - 1$ *e dove* Q *è il punto di intersezione dell'asse* x *con la retta* $t : y = 2 - x$.

Capitolo 2

Polinomi, disequazioni lineari, fratte, di secondo grado, razionali, con valore assoluto

Esercizio 2.1. *Eseguire la divisione euclidea tra polinomi $A(x) = x^5 + 2x^4 - 3x + 5$ e $B(x) = 2x^2 + 3$. Determinare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ tali che $P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$.*

Incolonniamo i termini in ordine di grado:

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
x^5 & +2x^4 & & & -3x & +5 & 2x^2 & +3 & & \\
\cline{7-10}
-x^5 & & -\frac{3}{2}x^3 & & & & \frac{1}{3}x^3 & +x^2 & -\frac{3}{4}x & -\frac{3}{2} \\
\cline{1-3}
 & 2x^4 & +\frac{3}{2}x^3 & & -3x & +5 & & & & \\
 & -2x^4 & & -3x^2 & & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & -\frac{3}{2}x^3 & -3x^2 & -3x & +5 & & & & \\
 & & +\frac{3}{2}x^3 & & -\frac{9}{4}x & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -3x^2 & -\frac{21}{4}x & +5 & & & & \\
 & & & +3x^2 & & -\frac{9}{2} & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & -\frac{21}{4}x & +\frac{1}{2} & & & &
\end{array}
$$

Otteniamo che il quoziente della divisione è $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$ ed il resto è $R(x) = -\frac{21}{4}x + \frac{1}{2}$.

Esercizio 2.2. *Eseguire la divisione con il metodo di Ruffini tra i polinomi $A(x) = x^5 + 2x^4 - 3x + 5$ e $B(x) = x + 2$.*

Incolonniamo i soli coefficienti dei termini incogniti e per ogni grado (tranne che per quello di grado maggiore) moltiplichiamo uno zero del divisore (in questo caso l'unico è -2) per la differenza tra i coefficienti e il prodotto dello zero con il coefficiente del termine di grado immediatamente superiore.

$$\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \\
 & & & & & & \\
-2 & & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 11
\end{array}$$

Dunque $Q(x) = x^4 - 3$ e $R(x) = 11$.

Esercizio 2.3. *Fattorizzare il seguente polinomio:* $P(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2$.

Notiamo subito che il termine x^2 può essere messo in evidenza: $P(x) = x^2(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) = x^2 P_1(x)$. Cerchiamo ora una radice del polinomio in parentesi cercandola tra i divisori del termine noto diviso il coefficiente del termine di grado massimo($\pm 1, \pm 2, ...$):

$$\begin{aligned}
P(1) &= 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \neq 0; \\
P(-1) &= -1 + 2 - 4 + 8 = 5 \neq 0; \\
P(2) &= 8 + 8 + 8 + 8 = 32 \neq 0; \\
P(-2) &= -8 + 8 - 8 + 8 = 0.
\end{aligned}$$

Dunque scegliamo $x = -2$ e procediamo con il metodo di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 2 & 4 & 8 \\
 & & & & \\
-2 & & -2 & 0 & -8 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 0
\end{array}$$

Quindi il polinomio ammette la scomposizione $P(x) = x^2(x + 2)(x^2 + 4)$.

Esercizio 2.4. *Calcolare le soluzioni della seguente equazione di secondo grado:*

$$3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

La formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fornisce nel nostro caso

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{3}.$$

Dunque l'equazione non ammette soluzioni in quanto il discriminante, ovvero l'argomento della radice, è negativo.

Esercizio 2.5. *Risolvere la seguente equazione:*

$$2x^{10} + 5x^5 + 3 = 0.$$

Poniamo $t = x^5$ e risolviamo l'equazione di secondo grado $2t^2+5t+3 = 0$. La formula risolutiva

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

fornisce $t = -\frac{3}{2}$ e $t = -1$ come soluzioni e, dopo il cambio di variabile, $x = -\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ e $x = -1$.

Esercizio 2.6. *Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado:*

$$\begin{aligned}
&3x^2 = 1;\\
&3x^2 + 2 = 0;\\
&x^2 - 3x = 0;\\
&3x^2 + 4x = 0;\\
&\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x = 0;\\
&x^2 - 7x + 12 = 0;\\
&x^2 - x + \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.7. *Risolvere la seguente disequazione di primo grado:*

$$x + \frac{1}{3} < -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

Utilizzando i principi di addizione e di moltiplicazione otteniamo:

$$x + \frac{2}{3}x < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \frac{5}{3}x < \frac{1}{6} \Longrightarrow x < \frac{1}{10}. \tag{2.1}$$

Esercizio 2.8. *Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:*

$$\begin{aligned}
2x + 1 &< 0\\
x + 3 &> 0\\
\frac{x+2}{-x+3} &\geq 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Esercizio 2.9. *Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:*

$$\begin{aligned}
&-x^2 + 5x - 6 \leq 0;\\
&-x^2 + 3x - 6 \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Riguardo la prima disequazione, consideriamo l'equazione ad essa associata $-x^2 + 5x - 6 = 0$, la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fornisce nel nostro caso

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-1)(-6)}}{-2} = \frac{-5 \pm 2}{-2}$$

e dunque $x = 2$ e $x = 3$ come soluzioni. Immaginando una parabola che interseca l'asse x in questi due punti, si considera il suo segno. Nel nostro caso la concavità è rivolta verso il basso e dunque la parte negativa si ottiene per valori esterni all'intervallo $]1, 2[$

	2		3	
-		+		-

In alternativa possiamo anche valutare il rapporto tra il termine di grado massimo e il segno della disequazione: se questi sono concordi la soluzione è per valori esterni ai punti di intersezione, se sono discordi, invece per valori interni. Nel nostro caso sono entrambi negativi e quindi concordi. Dunque la soluzione (l'insieme di definizione) si può indicare nei seguenti modi:

$$\forall\, x \in \,]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[;$$
$$x < 2 \cup x > 3.$$

Per quanto concerne la seconda equazione dell'esercizio, la formula risolutiva dell'equazione associata fornisce:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-6)}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-25}}{-2}.$$

Poichè la radice di un numero negativo non è definita sui numeri reali, allora possiamo dire che la parabola descritta dal polinomio di secondo grado non ammette intersezioni con l'asse x. Poichè la concavità è rivolta verso il basso, allora è sempre negativa per ogni valore reale e dunque la disequazione non ammette soluzioni, che in simboli si scrive:

$$\nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2.10. *Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:*

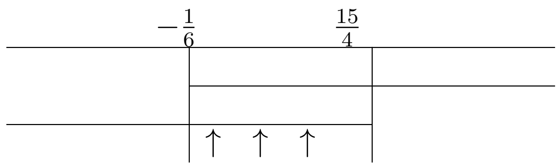
$$
\begin{aligned}
&4x^2 - 5x + 1 \geq 0;\\
&5x - x^2 \geq 0;\\
&9x^2 - 6x + 1 > 0;\\
&4x - 1 - 4x^2 \geq 0;\\
&x^2 + 2x + 4 > 0;\\
&2x - x^2 - 4 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Esercizio 2.11. *Risolvere il seguente sistema di disequazioni:*

$$
\begin{cases}
3x + 2 > -5x + \frac{2}{3}\\
2x - \frac{1}{4} > 3x - 4
\end{cases}
$$

Semplifichiamo e otteniamo il seguente sistema

$$
\begin{cases}
x > -\frac{1}{6}\\
x < \frac{15}{4}
\end{cases}
$$



Dunque la soluzione (l'insieme di definizione), dato dall'intersezione dei due insiemi di definizione delle due equazioni che compongono il sistema, si può indicare nei seguenti modi:

$$
\begin{aligned}
&\forall\ x \in \left]-\frac{1}{6}, \frac{15}{4}\right[;\\
&\forall\ x < -\frac{1}{6}\ \cup\ x > \frac{15}{4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.12. *Risolvere la seguente disequazione fratta:*

$$
\frac{2x + 1}{x + 4} \geq 0.
$$

Lo studio del segno del numeratore implica che esso è non negativo quando $x \geq -\frac{1}{2}$. Il denominatore è invece positivo (ricordiamo che il denominatore non può annullarsi) quando $x > -4$. Quindi studiamo il prodotto dei segni:

	-4	$-\frac{1}{2}$
-	-	+
-	+	+
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Otteniamo che il rapporto proposto è non negativo per i seguenti valori dell'incognita:

$$\forall\ x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[;$$
$$\forall\ x < -4\ \cup\ x \geq -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 2.13. *Risolvere le seguenti disequazioni fratte:*

$$\begin{aligned} &\frac{2x-3}{x+1} \geq 0; \\ &\frac{2x-1}{3x} + 1 \geq \frac{x-2}{x}; \\ &\frac{x^2}{x+1} - 1 \geq x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Esercizio 2.14. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$\frac{2x^2-3x-5}{x^2-1} \leq 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata al numeratore sono date da

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

e dunque sono $x = -1$ e $x = \frac{5}{2}$. Dunque, poichè il coefficiente del termine di grado massimo è positivo, il numeratore è non negativo per valori esterni all'intervallo di estremi -1 e $\frac{5}{2}$. Le soluzioni dell'equazione associata al denominatore sono invece $x = \pm 1$ e dunque esso è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi -1 e 1. Studiamo dunque il prodotto dei segni:

	-1	1	$\frac{5}{2}$
+	-	-	+
+	-	+	+
$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Otteniamo che il rapporto proposto è non negativo per i seguenti valori dell'incognita:

$$\forall\, x \in \left]1, \frac{5}{2}\right];$$
$$\forall\, x : 1 < x \leq \frac{5}{2}.$$

Esercizio 2.15. *Risolvere la seguente disequazione:*

$$(x+1)(x-2) < 0$$

Il primo fattore è positivo per $x > -1$ e il secondo per $x > 2$. Dunque studiamo il segno

-1	2	
-	+	+
-	-	+
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

Dunque il prodotto è negativo per i seguenti valori dell'incognita

$$\forall\, x \in \ ]-1, 2[\,;$$
$$\forall\, x : -1 < x < 2.$$

Esercizio 2.16. *Risolvere la seguente equazione:*

$$\frac{1}{x-x^2} + \frac{2}{x^2+4x} = \frac{2x+3}{x^3+5x^2+2x-8}.$$

Esercizio 2.17. *Risolvere le seguenti disequazioni:*

$$\begin{aligned}
&x^4 - 17x^2 + 16 < 0;\\
&x^6 - 10x^3 + 16 > 0;\\
&(x^4 - x^2)(x^2 - 9)(2x-5) > 0;\\
&x(1-2x) - x^2(x-4) + 4x - 6 \geq 0;\\
&\frac{2-x}{x^2-9} > 0;\\
&\frac{5-2x}{x^2-3x+2} > 0;\\
&\frac{5x-x^2-4}{x^2+2x} > 0;\\
&\frac{x^2+2x+1}{2x-x^2-10} > 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Capitolo 3

Funzioni esponenziali e logaritmiche

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x > 0$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbb{Z}$.

Ad esempio, sono definite:

$$
\begin{aligned}
&(-\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3});\\
&7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};\\
&3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}};
\end{aligned}
$$

non sono definite:

$$(-2^{\sqrt{3}}); 0^0; 0^{-3}.$$

Osserviamo inoltre i seguenti casi particolari:

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $x > 0$.

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali. Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a $\mathbb{R}$, vale:

- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^x a^y = a^{x+y}$;

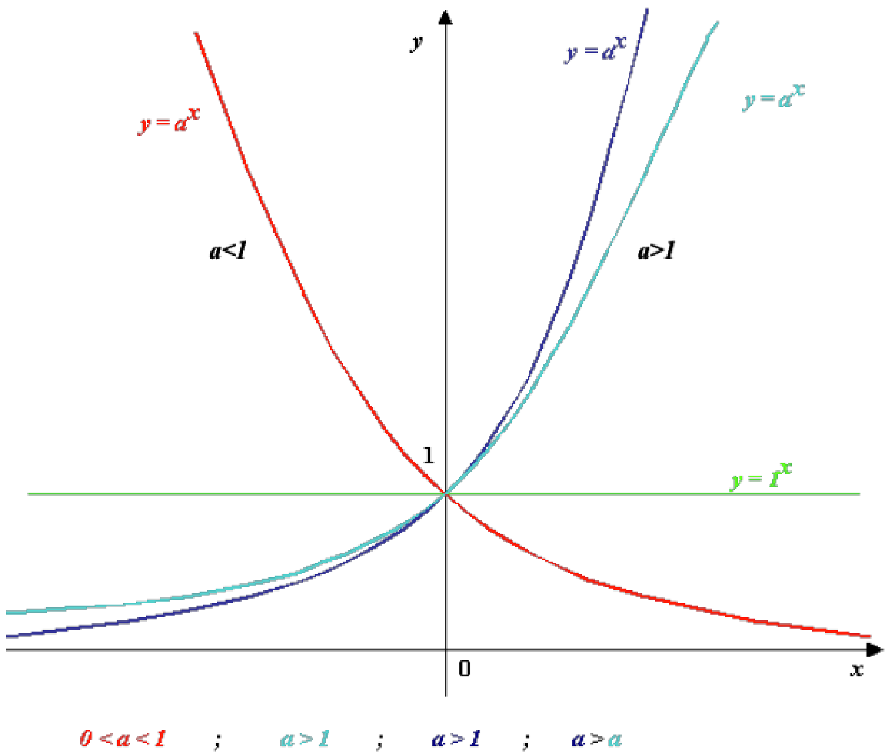
- $a^x : a^y = a^x - a^y$;
- $(ab)^x = a^x a^x$;
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$.

Fissato $a > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, chiamiamo *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo:

$$y = a^x.$$

Osserviamo che il *dominio* della funzione è tutto l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e il *codominio* è l'insieme dei numeri reali positivi. Distinguiamo tre casi:

- $a > 1$: funzione strettamente crescente: $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$;
- $a = 1$: funzione costante: $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione strettamente decrescente: $x < y \Longrightarrow a^x > a^y$.



Chiamiamo *equazione esponenziale* un'equazione in cui l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze. Fissati $a, b > 0$, l'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo:

$$a^x = b.$$

Un'equazione esponenziale può essere *impossibile, indeterminata o determinata*:

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$; ad esempio: $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *indeterminata* se $a = 1$ e $b = 1$; ad esempio: $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$; ad esempio $3^x = 5$.

Chiamiamo *logaritmo in base a di b* l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato:

$$x = \log_a b,$$

cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.

Esponiamo ora alcune tecniche risolutive per equazioni esponenziali:

- se a e b si scrivono come potenze razionali della stessa base, si eguagliano gli esponenti:
$$2^x = 8 \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Longrightarrow \quad x = 3;$$
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi:
$$2^x = 3 \Longrightarrow x = \log_2 3. \tag{3.1}$$

Il logaritmo è dunque l'operazione inversa dell'esponenziale e dunque eredita delle condizioni di esistenza, infatti fissato $a > 0$, deve essere $b > 0$ e valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a 1 = 0$ (poichè $a^0 = 1$);
- $\log_a a = 1$ (poichè $a^1 = a$);
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$, $x > 0, y \in \mathbb{R}$;
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x > 0, y > 0$ (logaritmo del prodotto);
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, $x > 0, y > 0$ (logaritmo del rapporto);

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $b, c > 0$ (formula del cambiamento di base).

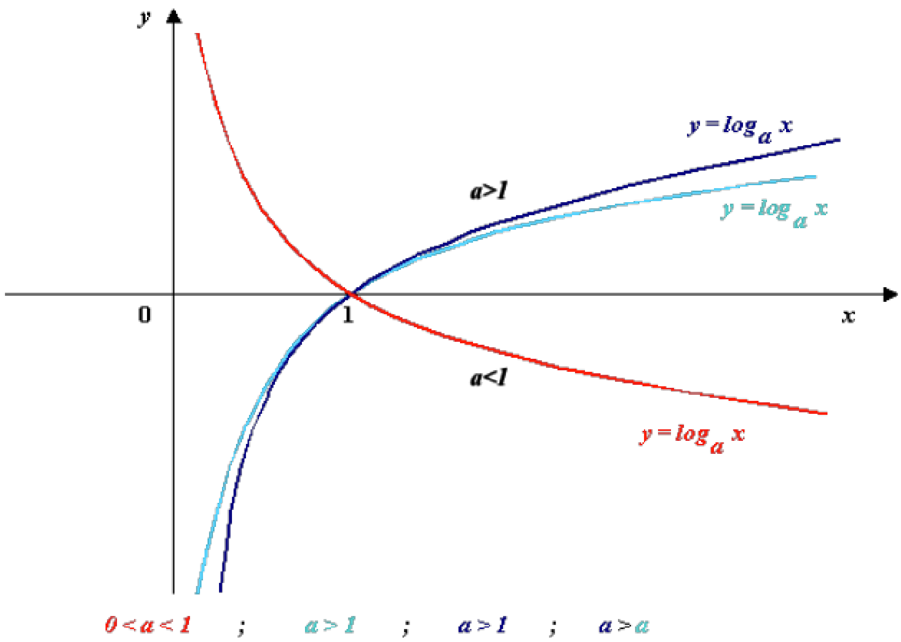
Le basi più utilizzate sono $a = 10$ e si indica con $\log_{10} x$, o anche $\log x$, il *logaritmo decimale di* x e $a = e \approx 2,718$ e si indica con $\log_e x$, o anche $\ln x$ il *logaritmo neperiano o naturale di* x.

Fissato dunque $a > 0$ e $a \neq 1$, si chiama dunque *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo:

$$y = \log x.$$

Poichè la funzione esponenziale e logaritmica risultano essere l'una l'inverso dell'altra, il dominio e il codominio risultano scambiati. Il dominio della funzione logaritmica è l'insieme degli $x > 0$ e il codominio e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Distinguiamo quindi due casi:

- $a > 1$, funzione strettamente crescente: $x < y \Longleftarrow \log_a x < \log_a y$;
- $0 < a < 1$, funzione strettamente decrescente: $x < y \Longleftarrow \log_a x > \log_a y$.



Fissati $a > 0, b \in \mathbb{R}$, l'equazione logaritmica più semplice è del tipo

$$\log_a x = b,$$

la sua soluzione è quindi $x = a^b$. Per risolvere un'equazione logaritmica consigliamo anzitutto di trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi. Successivamente consigliamo di eseguire un controllo tramite verifica diretta dei valori trovati dell'incognita e di associare le condizioni di esistenza sui logaritmi, che è definito soltanto per valori positivi del suo argomento.

Esercizio 3.1. *Risolvere la seguente equazione esponenziale:*

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16.$$

Osserviamo innanzitutto che, per le proprietà delle potenze, possiamo scrivere $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ e $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$. Dunque possiamo riscrivere l'equazione data come

$$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16,$$

da cui $4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = 16$, poi $2 \cdot 2^x = 16$, da cui dividendo per 2 si ha $2^x = 8$ e quindi $2^x = 2^3$. Dunque la soluzione è $x = 3$.

Esercizio 3.2. *Risolvere la seguente equazione esponenziale:*

$$5 \cdot 3^x = 7.$$

Trasformiamo l'equazione applicando il logaritmo al primo e al secondo membro dell'equazione:

$$\log(5 \cdot 3^x) = \log 7.$$

Applichiamo le proprietà dei logaritmi

$$\log(5) + x \log 3 = \log 7.$$

Isolando infine x otteniamo

$$x = \frac{\log 7 - \log 5}{\log 3}.$$

In alternativa possiamo isolare 3^x e ottenere:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Applicando il logaritmo in base 3 ad entrambi i membri, otteniamo:

$$x = \log_3 \frac{7}{5} = \log_3 7 - \log_3 5.$$

Il risultato che si ottiene è lo stesso di quello ottenuto con il metodo precedente appllicando la formula del cambiamento di base.

Esercizio 3.3. *Risolvere la seguente equazione esponenziale:*

$$2^x + 2^{3-x} = 6.$$

Per le proprietà delle potenze, possiamo scrivere $2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}$. Moltiplicando dunque ogni membro per 2^x, l'equazione assegnata è equivalente a

$$2^x \cdot 2^x + 8 = 6 \cdot 2^x.$$

Introducendo la variabile ausiliaria $z = 2^x$, il problema diventa la risoluzione dell'equazione algebrica di secondo grado:

$$z^2 - 6z + 8 = 0.$$

Le soluzioni sono dunque $z = 2$ e $z = 4$, da cui, per la posizione precedente, $2^x = 2$ e $2^x = 4$, e infine $x = 1$ e $x = 2$.

Esercizio 3.4. *Risolvere la seguente equazione esponenziale:*

$$3^{x+1} + 7^x = 3^x + 3 \cdot 7^x.$$

Applicando le proprietà delle potenze, otteniamo:

$$3 \cdot 3^x - 3^x = 3 \cdot 7^x - 7^x,$$

e quindi ancora $2 \cdot 3^x = 2 \cdot 7^x$. Dividendo ambo i membri per 2, otteniamo $3^x = 7^x$, da cui

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1.$$

Poichè qualunque numero elevato a 0 è uguale a 1, scriviamo

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^0,$$

da cui la soluzione $x = 0$.

Esercizio 3.5. *Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:*

$$
\begin{aligned}
&2^x = 16\sqrt{2};\\
&8^x\sqrt{2} = 4^x;\\
&3^x \cdot 3^{2x-1} = \frac{9}{\sqrt{3}};\\
&2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7;\\
&4^x = 2^x - 2;\\
&3 \cdot 5^x = 7;\\
&3^x + 3^{1-x} = 4;\\
&3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1};\\
&6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5;\\
&2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.6. *Risolvere la seguente equazione logaritmica:*

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-2) = \log_3 x - 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, imponendo che gli argomenti debbano essere positivi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x > 0, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 0. \end{cases}$$

Dunque la condizione di accettabilità è $x > 2$. Osservando ora che $2 = \log_3(3^2)$, applichiamo le proprietà dei logaritmi:

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \log_3\left(\frac{x}{3^2}\right).$$

Uguagliando gli argomenti, si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9},$$

che, semplificando, porta alla seguente equazione di secondo grado:

$$x^2 - 11x - 9 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}.$$

La soluzione con il segno meno non è accettabile perchè è minore di due e dunque l'unica soluzione è $x = \frac{11+\sqrt{157}}{2}$.

Esercizio 3.7. *Risolvere la seguente equazione logaritmica:*

$$\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log(3x+5) = 1.$$

Le condizioni di accettabilità sono

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 5 > 0. \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Quindi accetteremo solo soluzioni $x > 0$. Per le proprietà dei logaritmi, otteniamo

$$\log\sqrt{x(3x+5)} = \log 10^1.$$

Passando agli argomenti ed elevando al quadrato entrambi i membri, arriviamo alla diseguaglianza di secondo grado:

$$3x^2 + 5x - 100 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazioni sono $x = -\frac{20}{3}$, che è negativa e quindi non accettabile e $x = 5$, unica soluzione accettabile.

Esercizio 3.8. *Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:*

$$\log_2(x-1) = 3;$$
$$\log(x-2) + log 5 = \log x;$$
$$\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5;$$
$$2\ \log_2 x = 2 + \log_2(x+3);$$
$$\log(x-1) - 2\ \log(x+1) - \log 8 = -2;$$
$$\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3 x.$$

Esercizio 3.9. *Risolvere la seguente disequazione esponenziale:*

$$3^{x+1} + 3^x < 36.$$

Per le proprietà delle potenze, scriviamo:

$$3 \cdot 3^x + 3^x < 36,$$

da cui $4 \cdot 3^x < 36$ e, dividendo per 4, otteniamo:

$$3^x < 9.$$

Quindi $3^x < 3^2$ e dunque la soluzione $x < 2$.

Esercizio 3.10. *Risolvere la seguente disequazione esponenziale:*

$$5^{2x-1} - 5^x + \frac{4}{5} > 0.$$

Applicando le proprietà dei logaritmi e ponendo $z = 5^x$, dobbiamo equivalentemente risolvere la seguente disequazione di secondo grado:

$$t^2 - 5t + 4 > 0.$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono $t = 1$ e $t = 4$ e quindi otteniamo $5^x = 1$ e $5^x = 4$. Nel primo caso, da $5^x = 5^0$, otteniamo la soluzione $x = 0$, mentre nel secondo la soluzione $x = \log_5 4$. Dunque la diseguaglianza è soddisfatta per valori esterni: $x < 0 \cup x > \log_5 4$.

Esercizio 3.11. *Risolvere la seguente disequazione esponenziale:*

$$27^x - 3^{x+1} \leq 0.$$

Per le proprietà delle potenze, possiamo scrivere $3^{3x} \leq 3^{x+1}$, da cui $3x \leq x + 1$ e dunque la soluzione $x \leq \frac{1}{2}$.

Esercizio 3.12. *Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:*

$$(4^{x^2})^2 > 16 \cdot 4^{3x};$$
$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x^2};$$
$$100^x + 2 \cdot 10^x - 3 > 0;$$
$$3^{x+1} + 3^x < 36;$$
$$5^{2x-1} - 5^x + \frac{4}{5} > 0;$$
$$27^x - 3^{x+1} \leq 0;$$
$$\sqrt{2 - 5^x} \leq 5^x;$$
$$\frac{3^x \cdot 2^{1+x}}{3 \cdot 2^{x-1}} > \sqrt{\frac{6^x}{3^{x-1}}};$$
$$\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}{3 - x} > 0.$$

Esercizio 3.13. *Risolvere la seguente disequazione logaritmica:*

$$\log_3 x + \log_3(x - 6) \geq 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza (gli argomenti delle funzioni logaritmiche devono essere positivi):

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 8 > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dunque sono accettabili solo le x per cui $x > 8$. D'altra parte, per le proprietà dei logaritmi, possiamo scrivere:

$$\log_3(x(x - 6)) \geq \log_3 3^2,$$

da cui, passando agli argomenti, ottengo la seguente disequazione di secondo grado:

$$x^2 - 8x - 9 \geq 0.$$

L'equazione associata ammette come soluzioni $x_{1,2} = -1, 9$ e, quindi, la diseguaglianza è soddisfatta per valori esterni all'intervallo con questi estremi, cioè $x \leq -1 \cup x \geq 9$. Unendo la soluzione della disequazione logaritmica con le condizioni di accettabilità, l'insieme risolvente è dato dalle incognite che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} x > 8 \\ x \leq -1 \cup x \geq 9. \end{cases}$$

Quindi la soluzione del sistema è $x \geq 9$, che risolve la disequazione data dall'esercizio.

Esercizio 3.14. *Risolvere la seguente disequazione logaritmica:*

$$\ln^2 x + 5 \ln x + 6 \leq 0.$$

Ponendo $t = \ln x$, otteniamo la disequazione di secondo grado $t^2 + 5t + 6 \leq 0$, la cui soluzione è $-3 \leq t \leq -2$. Esprimendo questa catena di diseguaglianze nella variabile x, abbiamo $-3 \leq \ln x \leq -2$, da cui la soluzione $e^{-3} \leq x \leq e^{-2}$.

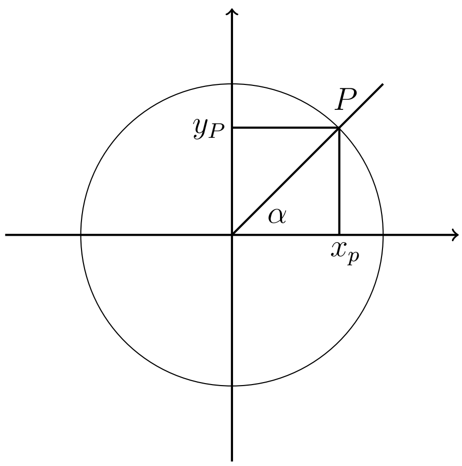
Esercizio 3.15. *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:*

$$\begin{aligned}
&\log_4 x^2 > \log_4(2 - x);\\
&\log_{\frac{1}{4}}(2x + 3) > \log_{\frac{1}{4}}(1 - x);\\
&(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 > 0;\\
&\log_{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}} x} + 1 > 0;\\
&\log_3 x + \log_3(x - 8) \geq 2;\\
&\ln^2 x + 5 \ln x + 6 \leq 0;\\
&\ln \sqrt{x + 2} \leq 2;\\
&\ln(x - \sqrt{1 - x^2}) < 0;\\
&\log_2 x \leq \sqrt{3 - 2 \log_2 x};\\
&\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(x + 1)] < -2.
\end{aligned}$$

Capitolo 4

Funzioni trigonometriche

La circonferenza goniometrica è una circonferenza con raggio unitario e centro nell'origine degli assi cartesiani.



Sulla circonfernza goniometrica è possibile rappresentare un angolo α in modo tale che ad ogni punto della circonferenza corrisponda un angolo. Partendo dal semiasse delle ascisse positive e procedendo in senso antiorario, si riescono a descrivere tutti gli angoli orientati da 0° a 360°. Usualmente però, gli angoli orientati vengono misurati in radianti. Per ogni angolo, data la misura in gradi g e la misura in radianti r, valgono le seguenti formule di passaggio dall'uno all'altro tipo di misurazione:

$$g = \frac{180° \cdot r}{\pi} \quad \text{e} \quad r = \frac{\pi \cdot g}{180°}.$$

Alcuni angoli ricorrono con frequenza, i cosiddetti angoli notevoli:

0	30	45	60	90	180	270	360
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Fissato un angolo α sulla circonferenza goniometrica, si dice *seno dell'angolo* α l'ordinata del punto P associato ad α, cioè

$$\sin\alpha = y_P.$$

Analogamente, fissato un angolo α sulla circonferenza goniometrica, si dice *coseno dell'angolo* α l'ascissa del punto P associato al α, cioè

$$\cos\alpha = x_P.$$

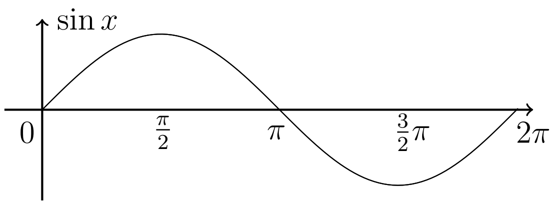
Infine, caratterizziamo la funzione *tangente dell'angolo* α, come il rapporto tra il seno e il coseno:

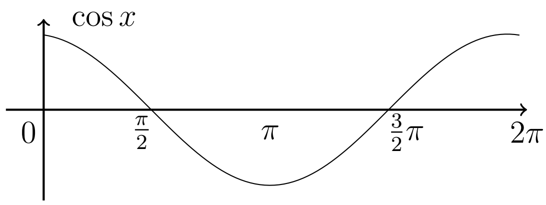
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Grazie alle definizioni si possono facilmente calcolare i valori notevoli del seno, del coseno e della tangente (che non è definita per ogni valore reale, anche perchè, essendo caratterizzata come un rapporto, la divisione per 0 non è ammessa).

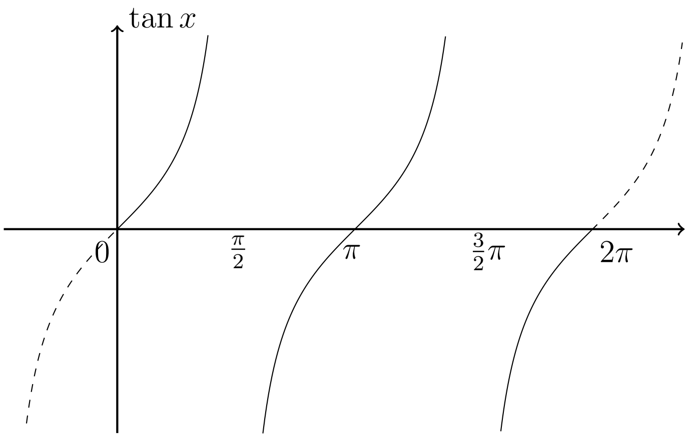
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Inoltre, scegliendo i punti in maniera continua possiamo rappresentare su un grafico cartesiano le funzioni seno e coseno, le cui rappresentazioni grafiche prendono il nome di *sinusoide* e *cosinusoide*. Notiamo subito che la funzione si ripete ad intervalli di lunghezza 2π, cioè ha periodicità 2π.





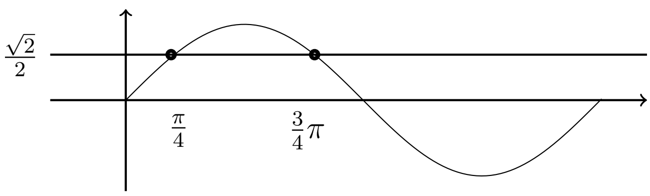
La rappresentazione grafica della tangente, che ha periodicità π, è detta *tangentoide*.



Esercizio 4.1. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica:*

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nell'intervallo di periodicità $[0, 2\pi[$, i valori dell'incognita che soddisfano l'equazione data sono $\frac{\pi}{4}$ e $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$.



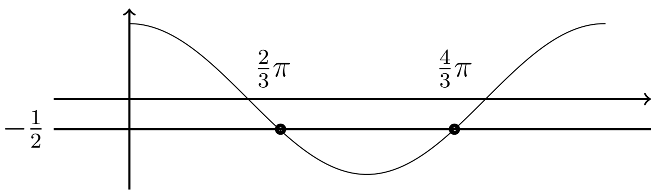
Considerando poi la periodicità, tutte le soluzioni sono date da

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.2. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica:*

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

Nell'intervallo di periodicità $[0, 2\pi[$, i valori dell'incognita che soddisfano l'equazione data sono $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ e $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$.



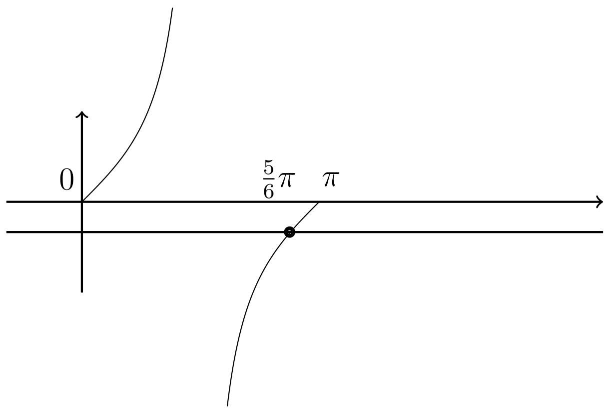
Considerando poi la periodicità, tutte le soluzioni sono date da

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \cup \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.3. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica:*

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nell'intervallo di periodicità $[0, \pi[$, il valore dell'incognita che soddisfa l'equazione data è $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.



Considerando poi la periodicità, tutte le soluzioni sono date da

$$x = \frac{5}{6}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.4. *Risolvere la seguente equazione trigonometrica:*

$$\sin^2 x - (1 + \sqrt{3})(\sin x \cos x) + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

Poichè nell'equazione sono presenti sia termini con il seno che con il coseno, e poichè non ci sono termini noti, allora possiamo dividere ciascun termine per $\cos^2 x$ in modo da avere un'espressione nella sola incognita $\tan x$. Poichè però la divisione per zero non è ammessa nel campo dei numeri reali, allora, prima di dividere bisogna verificare a parte se gli zeri del coseno (ovvero $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$) sono soluzioni. Sostituendo $x = \frac{\pi}{2}$ nell'equazione data, otteniamo $1 = 0$, lo stesso vale sostituendo $x = \frac{3}{2}\pi$; dunque vanno entrambe escluse dal computo delle soluzioni. Dividendo per $\cos^2 x$ otteniamo:

$$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0.$$

Ponendo $z = \tan x$, dobbiamo risolvere l'equazione $z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$. Il discriminante di questa equazione è $\Delta = (1+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} = (1-\sqrt{3})^2$, che porta alle due soluzioni $z = 1$ e $z = \sqrt{3}$ e quindi a $\tan x = 1$ e $\tan x = \sqrt{3}$. Gli angoli che realizzano tali valori della tangente sono rispettivamente $x = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. Considerando dunque la periodicità, le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \cup \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.5. *Risolvere la seguente disequazione goniometrica:*

$$2\cos x - senx - 2 = 0.$$

Ci sono diversi modi per risolvere questo tipo di equazione. La presenza del termine noto non ci permette, come nel caso precedente, di semplificare dividendo per la funzione coseno al fine di ottenere un equazione che coinvolga solo la tangente. Possiamo utilizzare quelle che vengono dette *equazioni parametriche*, che esprimono una relazione del seno e del coseno con la tangente:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \tan\frac{x}{2}.$$

Sostituendo queste due espressioni nell'equazione data, otteniamo:

$$2\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} - 2 = 0.$$

Semplificando:

$$\frac{2 - 2t^2 - 2t - 2 - 2t^2}{1+t^2} = 0.$$

Poichè un rapporto è nullo quando è nullo il suo numeratore, ci restano da studiare gli zeri di $4t^2 + 2t = 0$. Mettiamo in evidenza $2t$ e abbiamo:

$$2t(2t+1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $t = 0$ e $t = -\frac{1}{2}$, da cui $\tan\frac{x}{2} = 0$ e $\tan x = -\frac{1}{2}$. Ricordiamo che 0 è l'angolo la cui tangente è 0 e che non esiste un'espressione compatta per esprimere l'angolo (corrispondente a circa 26°) la cui tangente è $-\frac{1}{2}$, per cui si esprime questo valore attraverso la sua funzione inversa, l'arcotangente arctan. Per cui, considerando la periodicità, otteniamo:

$$\frac{x}{2} = 0 + k\pi \quad \cup \quad \frac{x}{2} = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

da cui la soluzione $x = 2k\pi \ \cup \ x = 2\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4.6. *Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche*

$$2\cos x - \sin x - 2 = 0;$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = \frac{1}{4};$$
$$2\cos x - \sin x - 2 = 0;$$
$$\cos^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

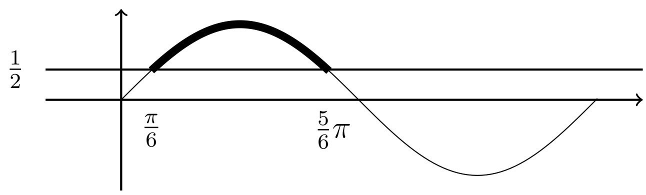
Esercizio 4.7. *Risolvere la seguente disequazione trigonometica:*

$$3^{\sin x} - \sqrt{3} \geq 0.$$

Per le proprietà delle potenze, possiamo scrivere $3^{\sin x} \geq 3^{\frac{1}{2}}$, da cui passando agli argomenti abbiamo

$$\sin x \geq \frac{1}{2}.$$

L'angolo notevole per cui la funzione seno assume valore $\frac{1}{2}$ è $\frac{\pi}{6}$. Come si evince dal grafico della sinusoide l'altro punto in cui il seno assume valore $\frac{1}{2}$ è $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Limitando sempre la nostra attenzione all'intervallo di periodicità $[0, 2\pi[$, notiamo che il seno assume valori superiori a $\frac{1}{2}$ solo nell'intervallo $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.



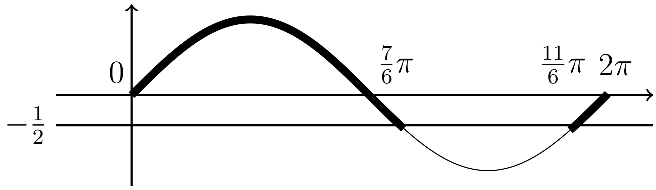
Quinidi considerando anche la periodicità, otteniamo la soluzione:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.8. *Risolvere la seguente disequazione goniometrica:*

$$\frac{2\sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} > 0.$$

Bisogna studiare il segno di ogni fattore, ma possiamo ridurci allo studio del solo numeratore perchè il denominatore è sempre positivo. Da $2\sin x + 1 > 0$, otteniamo che $\sin x > -\frac{1}{2}$. Verifichiamo facilmente che i due angoli in cui il seno assume valore $-\frac{1}{2}$ sono $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$ e $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$. Limitando sempre la nostra attenzione all'intervallo di periodicità $[0, 2\pi[$, notiamo che il seno assume valori superiori a $\frac{1}{2}$ negli intervalli $[0, \frac{7}{6}\pi[\cup]\frac{11}{6}\pi, 2\pi[$.



Quinidi considerando anche la periodicità, otteniamo la soluzione:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \cup \quad \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sottraendo 2π alla seconda catena di diseguaglianze, sfruttando la periodicità della funzione seno, possiamo scrivere la soluzione in maniera più compatta:

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4.9. *Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche*

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$$
$$\sin x(\sin x + \cos x) \leq 0.$$

Test finale precorsi settembre 2019 – Foglio A1

1	La funzione $\sin(2x)$ è periodica di periodo	A)	π, ma non 2π
		B)	2π, ma non π
		C)	Sia π che 2π

2	La funzione $\text{atan}(\lvert x \rvert)$ è una funzione	A)	periodica
		B)	non negativa
		C)	crescente

3	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$
		B)	$\sqrt{7} < \sqrt[3]{17}$
		C)	$\sqrt{19} < \sqrt[3]{90}$

4	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$sin(1) > 1/2$
		B)	$cos(1) > 1/2$
		C)	$tan(1) < 1$

5	Scrivere l'inversa della funzione $y = \log_2(x+3)$	A)	$y = 3 \cdot 2^x$
		B)	$y = 2^{x+3}$
		C)	$y = 2^x - 3$

6	La disequazione $\left\lvert x^2 - 4 \right\rvert \le 1$ è verificata per	A)	$\sqrt{3} \le \lvert x \rvert \le \sqrt{5}$
		B)	$\lvert x \rvert \le \sqrt{3}$
		C)	$\lvert x \rvert \ge \sqrt{5}$

7	La disequazione $\frac{(x+2)}{(x+1)} \ge 0$ è verificata per	A)	$x \le 1 \quad \vee \quad x \ge 2$
		B)	$x \ge -1$
		C)	$x > -1 \quad \vee \quad x \le -2$

8	Scrivere l'inversa della funzione $y = 2(x+1)^3$	A)	$-1 + \sqrt[3]{x/2}$
		B)	$\sqrt[3]{(x-1)/2}$
		C)	$1/2 \ \sqrt[3]{x-1}$

9	Sia $x = \log_2(2^3 + 9)$. Allora	A)	$x \le 3$
		B)	$3 \le x \le 4$
		C)	$x \ge 4$

10	Sia $x = \log_2\left(1/\log_3(3^4 - 3)\right)$. Allora	A)	$x \ge 0$
		B)	$-2 \le x \le 0$
		C)	$x \le -2$

Griglia delle risposte A1:
1-C, 2-B, 3-B, 4-C, 5-C, 6-A, 7-C, 8-A, 9-C, 10-B.

Test finale precorsi settembre 2019 – Foglio A2

1	La funzione $\sin(2x)$ è periodica di periodo	A)	Sia π che 2π
		B)	2π, ma non π
		C)	π, ma non 2π

2	La funzione $\operatorname{atan}(\|x\|)$ è una funzione	A)	periodica
		B)	crescente
		C)	non negativa

3	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$\sqrt{7} < \sqrt[3]{17}$
		B)	$\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$
		C)	$\sqrt{19} < \sqrt[3]{90}$

4	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$\tan(1) < 1$
		B)	$\cos(1) > 1/2$
		C)	$\sin(1) > 1/2$

5	Scrivere l'inversa della funzione $y = \log_2(x+3)$	A)	$y = 3 \cdot 2^x$
		B)	$y = 2^x - 3$
		C)	$y = 2^{x+3}$

6	La disequazione $\left\|x^2 - 4\right\| \leq 1$ è verificata per	A)	$\|x\| \leq \sqrt{3}$
		B)	$\sqrt{3} \leq \|x\| \leq \sqrt{5}$
		C)	$\|x\| \geq \sqrt{5}$

7	La disequazione $\frac{(x+2)}{(x+1)} \geq 0$ è verificata per	A)	$x \leq 1 \;\vee\; x \geq 2$
		B)	$x > -1 \;\vee\; x \leq -2$
		C)	$x \geq -1$

8	Scrivere l'inversa della funzione $y = 2(x+1)^3$	A)	$-1 + \sqrt[3]{x/2}$
		B)	$1/2\ \sqrt[3]{x-1}$
		C)	$\sqrt[3]{(x-1)/2}$

9	Sia $x = \log_2\left(2^3 + 9\right)$. Allora	A)	$x \geq 4$
		B)	$3 \leq x \leq 4$
		C)	$x \leq 3$

10	Sia $x = \log_2\left(1/\log_3\left(3^4 - 3\right)\right)$. Allora	A)	$x \leq -2$
		B)	$-2 \leq x \leq 0$
		C)	$x \geq 0$

Griglia delle risposte A2:
1-A, 2-C, 3-A, 4-A, 5-B, 6-B, 7-B, 8-A, 9-A, 10-B.

Test finale precorsi settembre 2019 – Foglio B1

1	La funzione $\sin(2x)$ è periodica di periodo	A)	2π, ma non π
		B)	Sia π che 2π
		C)	π, ma non 2π

2	La funzione $\text{atan}(\lvert x \rvert)$ è una funzione	A)	crescente
		B)	periodica
		C)	non negativa

3	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$\sqrt{19} < \sqrt[3]{90}$
		B)	$\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$
		C)	$\sqrt{7} < \sqrt[3]{17}$

4	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A)	$\cos(1) > 1/2$
		B)	$\tan(1) < 1$
		C)	$\sin(1) > 1/2$

5	Scrivere l'inversa della funzione $y = \log_2(x+3)$	A)	$y = 2^x - 3$
		B)	$y = 3 \cdot 2^x$
		C)	$y = 2^{x+3}$

6	La disequazione $\left\lvert x^2 - 4 \right\rvert \leq 1$ è verificata per	A)	$\lvert x \rvert \leq \sqrt{3}$
		B)	$\lvert x \rvert \geq \sqrt{5}$
		C)	$\sqrt{3} \leq \lvert x \rvert \leq \sqrt{5}$

7	La disequazione $\frac{(x+2)}{(x+1)} \geq 0$ è verificata per	A)	$x > -1 \ \vee \ x \leq -2$
		B)	$x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2$
		C)	$x \geq -1$

8	Scrivere l'inversa della funzione $y = 2(x+1)^3$	A)	$1/2 \ \sqrt[3]{x-1}$
		B)	$-1 + \sqrt[3]{x/2}$
		C)	$\sqrt[3]{(x-1)/2}$

9	Sia $x = \log_2\left(2^3 + 9\right)$. Allora	A)	$x \geq 4$
		B)	$x \leq 3$
		C)	$3 \leq x \leq 4$

10	Sia $x = \log_2\left(1/\log_3\left(3^4 - 3\right)\right)$. Allora	A)	$x \leq -2$
		B)	$x \geq 0$
		C)	$-2 \leq x \leq 0$

Griglia delle risposte B1:
1-B, 2-C, 3-C, 4-B, 5-A, 6-C, 7-A, 8-B, 9-A, 10-C.

Test finale precorsi settembre 2019 – Foglio B2

1	La funzione $\sin(2x)$ è periodica di periodo	A) π, ma non 2π
		B) Sia π che 2π
		C) 2π, ma non π

2	La funzione $\operatorname{atan}(\lvert x \rvert)$ è una funzione	A) non negativa
		B) periodica
		C) crescente

3	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A) $\sqrt{7} < \sqrt[3]{17}$
		B) $\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$
		C) $\sqrt{19} < \sqrt[3]{90}$

4	Dire quale delle seguenti disequazioni è ERRATA	A) $\cos(1) > 1/2$
		B) $\sin(1) > 1/2$
		C) $\tan(1) < 1$

5	Scrivere l'inversa della funzione $y = \log_2(x+3)$	A) $y = 3 \cdot 2^x$
		B) $y = 2^x - 3$
		C) $y = 2^{x+3}$

6	La disequazione $\left\lvert x^2 - 4 \right\rvert \le 1$ è verificata per	A) $\lvert x \rvert \le \sqrt{3}$
		B) $\sqrt{3} \le \lvert x \rvert \le \sqrt{5}$
		C) $\lvert x \rvert \ge \sqrt{5}$

7	La disequazione $\dfrac{(x+2)}{(x+1)} \ge 0$ è verificata per	A) $x \ge -1$
		B) $x \le 1 \;\vee\; x \ge 2$
		C) $x > -1 \;\vee\; x \le -2$

8	Scrivere l'inversa della funzione $y = 2(x+1)^3$	A) $1/2\ \sqrt[3]{x-1}$
		B) $\sqrt[3]{(x-1)/2}$
		C) $-1 + \sqrt[3]{x/2}$

9	Sia $x = \log_2\left(2^3 + 9\right)$. Allora	A) $x \le 3$
		B) $x \ge 4$
		C) $3 \le x \le 4$

10	Sia $x = \log_2\left(1/\log_3\left(3^4 - 3\right)\right)$. Allora	A) $x \ge 0$
		B) $x \le -2$
		C) $-2 \le x \le 0$

Griglia delle risposte B2:
1-B, 2-A, 3-A, 4-C, 5-B, 6-B, 7-C, 8-C, 9-B, 10-C.

Area Didattica
di Ingegneria