Università Degli Studi Di Napoli
"Federico II"

facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali
Corso Di Laurea in Matematica

Tesi In Analisi Matematica

Sull'equazione del calore: teoremi di esistenza, unicità e regolarità

Relatore:
Ch.mo Dott.
Carlo Nitsch

Candidato:
Gianpaolo Piscitelli
matr. 565/650

Sessione Autunnale - Anno Accademico 2009/2010

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione

Nel 1811 l'Accademia delle Scienze di Parigi mise in palio un premio per lo studioso che avesse risolto il problema del trasferimento del calore. Il premio fu vinto, per due importanti contributi, da un matematico francese, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), il quale però non era un attivo studioso, ma bensì il governatore di una regione nelle Alpi francesi. Utilizzando il principio di "*conservazione dell'energia*", che fu l'idea che lo guidò, Fourier sviluppò un'appropriata equazione differenziale e un metodo innovativo per risolverla. Per maggiore semplicità assumiamo che la densità del materiale considerato e il calore specifico (il rapporto tra calore fornito e aumento di temperatura per unità di massa) siano costanti nello spazio e nel tempo e che entrambi valgano 1. Possiamo dunque identificare l'energia termica per unità di volume con la temperatura. Consideriamo quindi un fissato dominio regolare dello spazio Ω e denotiamo con $\partial\Omega$ la sua frontiera, la variazione dell'energia termica di Ω tra il tempo t e il tempo $t + \Delta t$ è dunque:

$$\int_\Omega [u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t)]\, dV = \int_t^{t+\Delta t} \int_\Omega q(x, y, z, t, u)\, dV\ dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\partial\Omega} \vec{B}(x, y, z, t) \cdot \hat{n}\ dS\ dt. \quad (1)$$

dove u è la temperatura, q è la densità di calore prodotta dalle sorgenti termiche in Ω per unità di tempo, $\vec{B}$ è il flusso di calore attraverso la frontiera, dV e dS sono, rispettivamente, gli elementi del volume e della superficie di integrazione e $\hat{n}$ è il versore normale esterno a $\partial\Omega$. Notiamo che l'intensità delle sorgenti di calore (come nel caso di un frigorifero o di un climatizzatore) e il flusso possono anche essere negativi.

In generale la produzione di calore è determinata da sorgenti esterne che non dipendono dalla temperatura, ma in alcuni casi (come per esempio quello di un condizionatore controllato da un termostato) possono dipendere dalla loro stessa temperatura, ma non dalla variazione di questa. Dunque ammetteremo questa dipendenza funzionale: $q = q(x, y, z, t, u)$. Per determinare quindi il flusso di calore, Fourier partì da un'osservazione sperimentale: poiché il calore fluisce dalle regioni più calde a quelle più fredde, pensò che la sua direzione di massima crescita fosse data dal gradiente del campo di temperature e postulò:

$$\vec{B} = -k(x,y,z)Du. \tag{2}$$

La formula (2) è chiamata "*legge della conduzione del calore di Fourier*", il segno meno deriva dal fatto che il flusso e il gradiente delle temperature hanno versi opposti (il flusso cresce mentre il gradiente diminuisce e viceversa). La funzione (positiva) k è chiamata "*coefficiente della conduzione di calore (o di Fourier)*" e i suoi valori dipendono dal mezzo nel quale il calore si diffonde, essendo quindi costante in un dominio omogeneo. Le ipotesi sulle dipendenze funzionali di q e $\vec{B}$ rispetto a u sono dette "*leggi costitutive*".

Supposto che le funzioni considerate siano sufficientemente regolari, sostituiamo ora le espressioni di q e $\vec{B}$ nella (1), approssimiamo gli integrali nella variabile temporale t utilizzando il teorema della media e dividiamo ambo i membri per Δt; passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo

$$\int_\Omega u_t \, dV = \int_\Omega q(x,y,z,t,u) \, dV + \int_{\partial\Omega} k(x,y,z)Du \cdot \hat{n} \, dS, \tag{3}$$

utilizzando poi il teorema di Gauss

$$\int_\Omega [u_t - q - div(kDu)]dV = 0. \tag{4}$$

Poiché questa formula vale per qualunque dominio regolare Ω, possiamo scrivere:

$$u_t = q + div(kDu). \tag{5}$$

Nel caso in cui il coefficiente di diffusione sia costante ($k = 1$) e non ci siano sorgenti di calore in Ω, otteniamo la classica "*equazione del calore*":

$$u_t = \Delta u, \tag{6}$$

così chiamata perché molto utilizzata nello studio della trasmissione del calore tra corpi.
L'equazione del calore è nota anche come "*equazione della diffusione*"perché descrive, in applicazioni tipiche, l'evoluzione nel tempo della densità u, oltre che del calore, anche di altre grandezze come ad esempio la concentrazione di sostanze chimiche.

Come già precedentemente accennato, oltre ad aver sviluppato una teoria generale per l'equazione del calore, Fourier studiò anche un metodo per risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno che aveva proposto. In questo elaborato non analizziamo nel dettaglio questo metodo ma, a titolo esemplificativo, consideriamo il seguente problema di conduzione del calore in un intervallo finito:

$$u_t - ku_{xx} = 0 \qquad 0 < x < L,\ t > 0 \tag{7}$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \tag{8}$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{9}$$

con f dato iniziale e k costante positiva. Affinchè la (8) sia compatibile con la (9) si assume la "*condizione di compatibilità*"

$$f(0) = f(L) = 0.$$

Questo problema può essere studiato per descrivere l'evoluzione della temperatura $u(x,t)$ in una barra conduttrice di calore unidimensionale omogenea (cioè una barra stretta isolata ai lati) la cui temperatura iniziale è nota ed è tale che le due estremità abbiano temperatura di valore zero. Supponiamo che non ci siano sorgenti di calore interne al sistema. Notiamo che il problema (7)-(9) è un problema ai valori iniziali lineare e omogeneo. Osserviamo che

$$\sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

è soluzione di (7) e soddisfa le condizioni al contorno (8) Il pricipio di sovrapposizione implica che ogni combinazione lineare

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{10}$$

è ancora una soluzione dell'equazione del calore che soddisfa le condizioni al contorno, con condizione iniziale

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Per risolvere il problema con condizioni iniziali più generali, Fourier ebbe la brillante (sebbene non del tutto giustificata a quei tempi e fortemente osteggiata dalla comunità scientifica) idea di rappresentare un'arbitraria funzione f che soddisfi le (8) come una "infinita combinazione lineare" di funzioni $\sin(n\pi x/L)$. In altre parole, egli si pose il problema di ricercare infinite costanti B_n (oggi note come "coefficienti di Fourier")tali che

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{11}$$

da cui si ha l'espressione formale

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \tag{12}$$

come soluzione del problema (7)-(9). Con "espressione formale" intendiamo dire che tralasciamo le questioni riguardanti convergenza, continuità e regolarità.

In questo lavoro di tesi, studiamo l'*equazione del calore*

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{13}$$

e l'*equazione del calore non omogenea*

$$u_t - \Delta u = f, \tag{14}$$

associate ad appropriate condizioni iniziali e al contorno. Studiamo il caso in cui $t > 0$ e $x \in U$ aperto di $\mathbb{R}^n$. L'incognita è la funzione $u : (x,t) \in \overline{U} \times [0,\infty) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$, il laplaciano Δ è considerato rispetto alle variabili spaziali $x = (x_1, \ldots, x_n) : \Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$. Nella (14) la funzione $f : U \times [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ è nota.

Nel primo capitolo, avendo osservato che ogni soluzione dell'equazione del calore è invariante per uno speciale riscalamento, determiniamo la cosiddetta "*soluzione fondamentale*". Sfruttando la linearità di (13), tale soluzione verrà utilizzata per determinare una soluzione del problema di Cauchy omogeneo e successivamente per trovare una soluzione del problema di Cauchy non omogeneo.

Nel secondo capitolo enunciamo alcune importanti proprietà delle soluzioni dell'equazione del calore. Dimostriamo innanzitutto la proprietà del valore principale, la quale asserisce che il valore di una soluzione dell'equazione del calore in un punto può essere ricavato dai valori che assume nei tempi precedenti su una regione, chiamata "*heat ball*", la cui frontiera è un insieme di livello della soluzione fondamentale. Enunciamo poi il principio del massimo, ovvero il principio secondo cui il massimo di una soluzione sulla chiusura del "*cilindro parabolico*" viene sempre assunto sulla sua frontiera. Successivamente dimostriamo il principio del massimo forte, il quale specifica che se il massimo viene assunto anche in un punto interno al suddetto cilindro, allora la soluzione è costante per tutti i tempi precedenti. Infine sfruttiamo questi due principi per dimostrare l'unicità della soluzione del problema ai valori iniziali e al contorno e accenniamo al metodo dell'energia, utilizzandolo per una dimostrazione alternativa dell'unicità delle soluzioni.

Infine, nel terzo capitolo, dimostriamo una proprietà di regolarità delle soluzioni dell'equazione del calore e accenniamo alle tecniche di stime locali.

Capitolo 1

Soluzione fondamentale

1.1 La soluzione fondamentale

Un primo importante passo nello studio delle equazioni alle derivate parziali spesso consiste nel trovare soluzioni particolari.

Osserviamo che l'equazione del calore coinvolge una derivata rispetto alla variabile temporale t e due derivate rispetto alle variabili spaziali x_i ($i = 1, \ldots, n$). Di conseguenza notiamo che se u è soluzione dell'equazione

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

allora lo è anche $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti, se la inseriamo nella (1.1), ponendo $s = \lambda^2 t$ e $y = \lambda x$ e applicando il teorema di differenziabilità delle funzioni composte, otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i} u(\lambda x, \lambda^2 t) - \frac{\partial}{\partial t} u(\lambda x, \lambda^2 t) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u(y,s)}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u(y,s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u(y,s)}{\partial y_i} \lambda \right) - \frac{\partial u(y,s)}{\partial s} \lambda^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(y,s)}{\partial y_i} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} \lambda \right) - \frac{\partial}{\partial s} u(\lambda x, s) \lambda^2 \\
&= \left(\Delta_y u(y,s) - u_s(y,s) \right) \lambda^2 = 0.
\end{aligned}$$

Questa osservazione suggerisce di cercare una soluzione della (1.1) nella forma $u(x,t) = v(\frac{r^2}{t}) = v(\frac{|x|^2}{t})$ $(t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n)$.

Nonostante questo approccio possa eventualmente condurci ad una soluzione, un procedimento più generale consiste nel trovarne una con la speciale struttura:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0), \tag{1.2}$$

dove le costanti α e β e la funzione $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono da determinare. La (1.2) equivale a richiedere che una generica soluzione u dell'equazione del calore sia invariante per il riscalamento:

$$u(x,t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t),$$

ovvero che le soluzioni ad un fissato istante t siano autosimilari:

$$u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

per ogni $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Ponendo $\lambda = t^{-1}$, arriviamo alla (1.2) con $v(y) := u(y,1)$.

Inserendo la (1.2) nella (13), otteniamo

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \tag{1.3}$$

per $y := \frac{x}{t^\beta}$. Ora, al fine di trasformare la (1.3) in una equazione che coinvolga la sola variabile y, prendiamo $\beta = \frac{1}{2}$; in questo modo, dividendo per $t^{-(\alpha+1)}$, otteniamo

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0 \tag{1.4}$$

Poi semplifichiamo ulteriormente supponendo che v sia radiale, cioè $v(y) = w(|y|)$ per qualche $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora

$$\frac{\partial w(r)}{\partial y_i} = w' \frac{\partial r}{\partial y_i} = w' \frac{y_i}{r} \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n \tag{1.5}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta w(r) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial w}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(w' \frac{y_i}{r} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w'}{\partial y_i} \frac{y_i}{r} + w' \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_i}{r} \right) = \sum_{i=1}^n w'' \frac{y_i}{r} \frac{y_i}{r} + w' \frac{r - \frac{y_i^2}{r}}{r^2} \\ &= w'' \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{r^2} + w' \frac{nr^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2}{r^3} = w' + \frac{n-1}{r} w'' \end{aligned} \tag{1.6}$$

con $' = \frac{d}{dr}$ e $r = |y|$.
Dunque, inserendo (1.5) e (1.6) nella (1.4):

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0.$$

Se adesso poniamo $\alpha = \frac{n}{2}$ e moltiplichiamo tutti i termini per r^{n-1}, quest'ultima equazione diventa

$$\frac{n}{2}r^{n-1}w + \frac{1}{2}r^n w' + r^{n-1}w'' + (n-1)r^{n-2}w' = 0,$$

o più semplicemente

$$\frac{1}{2}(r^n w)' + (r^{n-1}w')' = 0.$$

Dunque, per qualche costante a, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}r^n w + r^{n-1}w' = a.$$

Poiché questa equazione vale $\forall\, r$, imponendo che $\lim_{r\to\infty} w = \lim_{r\to\infty} w' = 0$, concludiamo che $a = 0$. Dividendo ogni termine per r^{n-1}, possiamo scrivere

$$w' = -\frac{1}{2}rw.$$

Ma allora per qualche constante b

$$w = be^{-\frac{r^2}{4}}. \tag{1.7}$$

Ricordando ora le supposizioni fatte, possiamo concludere:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \\ &= \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} u(y,1) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v(y) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} w(|y|) \\ &= \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} w(r) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4}} = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4}} = \frac{b}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Dunque $\dfrac{b}{t^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ risolve l'equazione del calore.

Questo calcolo ci porta alla seguente definizione

Definizione 1.1. *La funzione*

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0) \end{cases}$$

è chiamata ***soluzione fondamentale dell'equazione del calore****.*

Notiamo che Φ presenta nel punto $(0,0)$ una discontinuità, perché risulta

$$0 = \lim_{x\to 0}\lim_{t\to 0^+}\Phi(x,t) \neq \lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to 0}\Phi(x,t) = +\infty$$

Scriveremo a volte $\Phi(x,t) = \Phi(|x|,t)$ per mettere in evidenza che la soluzione fondamentale è radiale rispetto alla variabile x. La scelta della costante di normalizzazione $1/(4\pi)^{n/2}$ è dettata dal seguente

Lemma 1.1 (Integrale della soluzione fondamentale). *Per tutti i tempi* $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x,t) = 1$$

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n(\sqrt{4t})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{|x_1|}{\sqrt{4t}})^2}\cdots e^{-(\frac{|x_n|}{\sqrt{4t}})^2}dx_1\cdots dx_n \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n(\sqrt{4t})^n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{|x_1|}{\sqrt{4t}})^2}dx_1\right)^n \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n(\sqrt{4t})^n}\left(\sqrt{4t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|^2}dz\right)^n \\
&= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n(\sqrt{4t})^n}\left(\sqrt{4t}\sqrt{\pi}\right)^n = 1.
\end{aligned}$$

□

1.2 Problema ai valori iniziali omogeneo

Adesso utilizziamo la Φ per trovare una soluzione del problema ai valori iniziali (o di Cauchy):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Notiamo che la funzione $(x,t) \mapsto \Phi(x,t)$ è, escludendo il punto di singolarità $(0,0)$, soluzione dell'equazione del calore. Inoltre, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ tale è anche $(x,t) \mapsto \Phi(x-y,t)$ e quindi è invariante per traslazioni. Allora, per la linearità dell'equazione, anche la convoluzione

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0) \end{aligned} \tag{1.9}$$

potrebbe essere una soluzione.

Teorema 1.1 (Soluzione del problema di Cauchy omogeneo). *Assumiamo $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e definiamo u tramite la (1.9). Allora*

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0)$,

(iii) $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0) \\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0}} u(x,t) = g(x^0)$ *per ogni* $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. (i). Per dimostrare che $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ proviamo innanzitutto l'esistenza delle derivate parziali spaziali. Scegliamo un generico istante $t > 0$, fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ e verifichiamo che

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+he_i,t) - u(x,t)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y,t) g(y) dy. \tag{1.10}$$

Dunque, stimiamo la quantità

$$\begin{aligned} H &:= \left| \frac{u(x+he_i,t) - u(x,t)}{h} - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y,t) g(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\Phi(x+he_i-y,t) - \Phi(x-y,t)}{h} - \frac{\partial \Phi(x-y,t)}{\partial x_i} \right] g(y) dy \right| \end{aligned}$$

Per il teorema di Lagrange $\exists\ 0 \le \theta \le 1$ tale che:

$$H \le \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x+\theta he_i - y,t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x-y,t) \right] g(y) dy \right| \tag{1.11}$$

Se scegliamo una sfera chiusa $B(0,r)$ di centro 0 e raggio r tale che $x \in B(0,r)$ e $r > 3|x|$, allora in $\mathbb{R}^n - B(0,r)$ si ha

$$|x-y| \ge |y| - |x| > |y| - \frac{|y|}{3} = \frac{2|y|}{3}$$

e, per $|h| < |x|$, anche

$$\begin{aligned}|x + \theta he_i - y| &\geq |y| - |x\theta he_i| \geq |y| - (|x| + |\theta||h||e_i|) \\ &\geq |y| - (|x| + |x|) \geq |y| - \frac{2}{3}|y| = \frac{|y|}{3}.\end{aligned}$$

Quindi, in $\mathbb{R}^n - B(0, r)$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \Phi(x-y,t)}{\partial x_i}\right| &= \left| -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{x_i - y_i}{2t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right| \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\frac{|x_i|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} + \frac{|y_i|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} \right)\end{aligned} \tag{1.12}$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \Phi(x+h\theta e_i - y,t)}{\partial x_i}\right| &= \left| -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \frac{x_i + h - y_i}{2t} e^{-\frac{|x+h\theta e_i - y|^2}{4t}} \right| \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\frac{|x_i|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} + \frac{|h|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} + \frac{|y_i|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} \right)\end{aligned} \tag{1.13}$$

La funzione $\Phi(x, t)$ è infinitamente derivabile, con derivate di tutti gli ordini uniformemente limitate su $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$, e quindi anche uniformente continue sullo stesso insieme.

Quindi, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ h$ abbastanza piccolo tale che, utilizzando la (1.12) e la (1.13),

$$\begin{aligned}H \leq& \left| \int_{B(0,\rho)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x + \theta he_i - y, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x - y, t) \right] g(y) dy \right| \\ &+ \left| \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\rho)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x + \theta he_i - y, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(x - y, t) \right] g(y) dy \right| \\ \leq& ||g||_{L^\infty} \left(\varepsilon \int_{B(0,\rho)} dy \right. \\ &\left. + \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(0,\rho)} \frac{|x_i|}{t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} + \frac{|y_i|}{t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} + \frac{|h|}{2t} e^{-\frac{|y|^2}{9t}} \right) dy\end{aligned}$$

per ogni $\rho \geq r$. Dunque, per l'arbitrarietà di ε e considerando il limite per $\rho \to +\infty$ si ha che $\lim_{h\to 0} H = 0$. Dunque la derivata $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ esiste $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$ ed è continua; con un ragionamento analogo si può vedere che u è derivabile rispetto alla veriabile temporale t e che tale procedura è reiterabile, quindi $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$Inoltre sussistono le condizioni per passare la derivata sotto il segno di integrale nella (1.9).

(ii). Dal momento che è possibile applicare la formula di derivazione (di ogni ordine) sotto il segno di integrale e Φ risolve l'equazione del calore:

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x-y,t)]g(y)dy = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0), \tag{1.14}$$

e dunque anche u la risolve.

(iii). Fissiamo $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \quad \text{se } |y - x^0| < \delta,\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

Allora se $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, abbiamo, secondo il Lemma 1.1,

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)]dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) \left| g(y) - g(x^0) \right| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t) \left| g(y) - g(x^0) \right| dy \\ &=: I + J. \end{aligned}$$

Ora, grazie alla (1.15) e al Lemma 1.1:

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)dy = \varepsilon.$$

Inoltre, se $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ e $|y - x^0| \geq \delta$, allora

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|.$$

quindi $|y-x| \geq \frac{1}{2}|y-x^0|$. Conseguentemente

$$\begin{aligned} J &\leq 2||g||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} \Phi(x-y,t)dy \\ &\leq \frac{2||g||_{L^\infty}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{(\sqrt{t})^n} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0,\delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy := L \end{aligned} \tag{1.16}$$

Questa espressione non dipende più dalla variabile x e passando ad un sistema di coordinate ipersferiche $(r, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1})$, cioè tali che se y_i $(i = 1, \ldots, n)$ sono le coordinate cartesiane, allora

$$\begin{cases} y_1 - x_1^0 = r\cos(\phi_1) \\ y_2 - x_2^0 = r\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\ y_3 - x_3^0 = r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) \\ \cdots \\ y_{n-1} - x_{n-1}^0 = r\sin(\phi_1)\cdots\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1}) \\ y_n - x_n^0 = r\sin(\phi_1)\cdots\sin(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-1}), \end{cases}$$

con $(r, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1}) \in [\delta, +\infty) \times [0,\pi] \times \cdots \times [0,\pi] \times [0, 2\pi]$.

Lo Jacobiano della trasformazione é

$$\left|\det \frac{\partial(x_i)}{\partial(r,\phi_j)}\right| = r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\sin^{n-3}(\phi_2)\ldots\sin^2(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\phi_1)\ldots\sin^2(\phi_{n-3})\sin(\phi_{n-2})drd\phi_1\ldots d\phi_{n-2}d\phi_{n-1} \\ &\quad = \omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \end{aligned}$$

dove con ω_n indichiamo la superficie dell'ipersfera di raggio unitario e Γ è la funzione definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt,$$

che rappresenta una estensione della funzione fattoriale, in quanto $\Gamma(n+1) = n!\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Possiamo dunque riscrivere l'ultimo termine della (1.16)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\ldots\sin(\phi_{n-2})drd\phi_1\ldots d\phi_{n-2}d\phi_{n-1} \\ &= \frac{C\omega_n}{(\sqrt{t})^n}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1}dr = \frac{C\omega_n}{(\sqrt{t})^n}(4\sqrt{t})^{n-1}\int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2}z^{n-1}dz \\ &= \frac{C\omega_n}{(\sqrt{t})}\int_{\frac{\delta}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2}z^{n-1}dz. \end{aligned}$$

Quindi, ad esempio, per $n = 2$

$$\frac{Ke^{-\frac{\delta^2}{16t}}}{\sqrt{t}} = K\frac{\frac{\delta^2}{16t}}{e^{\frac{\delta^2}{16t}}}\cdot\frac{16t}{\delta^2}\frac{1}{\sqrt{t}} \to 0 \quad \text{per} \quad t \to 0^+.$$

ma con ragionamenti analoghi si può verificare che converge a $0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Dunque se $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ e $t > 0$ è abbastanza piccolo, $|u(x,t) - g(x^0)| < 2\varepsilon$. □

Interpretazione della soluzione fondamentale. In virtù del Teorema 1.1 è possibile scrivere

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta\Phi = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \Phi = \delta_0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

denotando con δ_0 la funzione di distribuzione di Dirac su $\mathbb{R}^n$.

Infinita velocità di propagazione. Notiamo che se g è limitata, continua, non negativa e non identicamente nulla, allora

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy$$

è positiva per tutti i valori di $x \in \mathbb{R}^n$ per tempi $t > 0$. Interpretiamo quest'osservazione dicendo che una perturbazione di una soluzione dell'equazione del calore si propaga con velocità infinita. In particolare se il dato iniziale è a supporto compatto, non negativo e non identicamente nullo, allora in ogni istante successivo (non importa quanto vicino a quello iniziale) la soluzione è ovunque positiva.

1.3 Problema ai valori iniziali non omogeneo

Adesso volgiamo la nostra attenzione al problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{1.17}$$

Per trovare ora una formula per la soluzione, richiamiamo la motivazione che ci ha condotto alla soluzione (1.9) del problema omogeneo e notiamo ora che la funzione $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$ è una soluzione dell'equazione del calore (per fissati $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$). Adesso per un s fissato, grazie sempre alla linearità dell'equazione, possiamo affermare che la funzione

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

risolve

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot, s) & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}, \end{cases} \tag{1.17$_s$}$$

ovvero un problema di Cauchy della stessa forma del problema (1.8), con il tempo iniziale $t = 0$ sostituito da $t = s$, e la funzione g sostituita da $f(\cdot, s)$. Benchè $u(\cdot; s)$ non sia soluzione del problema (1.17), possiamo costruire una soluzione integrando la soluzione della (1.17$_s$) rispetto ad s. L'idea è quella di considerare

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

Riscrivendo, abbiamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dyds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s) dyds, \end{aligned} \tag{1.18}$$

per $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Al fine di dimostrare che quest'ultima è soluzione del problema (1.17), asssumiamo per semplicità che $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ e che sia a supporto compatto.

Teorema 1.2 (Soluzione del problema di Cauchy non omogeneo). *Definiamo u tramite la (1.18), allora*

(i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0)$,

(iii) $\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0) \\ x\in\mathbb{R}^n,\ t>0}} u(x,t) = 0 \quad \forall\ \ x^0 \in \mathbb{R}^n.$

Dimostrazione. (i). Poiché Φ ha una singolarità in (0,0), non possiamo giustificare direttamente la derivabilità sotto il segno di integrale, allora procediamo in maniera simile alla dimostrazione del Teorema 1.1. Innanzitutto effettuiamo un cambiamento di variabili, scrivendo

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) dyds.$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e, sapendo che $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ è a supporto compatto, che $\Phi = \Phi(y,s)$ è differenziabile per $s = t > 0$, verifichiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f_t(x-y,t-s) dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \end{aligned}$$

A tal proposito, separando in due l'intervallo di integrazione del primo termine, consideriamo la quantità

$$\begin{aligned} H := \Bigg| &\int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{f(x-y,t+h-s)}{h} dyds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{f(x-y,t+h-s) - f(x-y,t-s)dyds}{h} \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} dyds - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \Bigg| . \end{aligned}$$

Applichiamo il teorema della media al primo termine e il teorema di Lagrange al secondo, quindi $\exists\ 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$ tale che:

$$\begin{aligned} H = \Bigg| &\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t+\theta_1 h) f(x-y, t+h-(t+\theta_1 h))dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial f(x-y,t+\theta_2 h-s)}{\partial t} dyds \\ &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} dyds - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \Bigg| . \end{aligned}$$

Riordinando i termini e semplificando

$$\begin{aligned} H = \Bigg| &\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t+\theta_1 h) f(x-y, h(1-\theta_1))dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\frac{\partial f(x-y,t+\theta_2 h-s)}{\partial t} - \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} \right] dyds \Bigg| . \end{aligned}$$

Le funzioni Φ e f, per h abbastanza piccolo (tale che $t+\theta_1 h$ rimanga positivo), sono continue e quindi la funzione integrale $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t+h) f(x-y,h)dy$ è continua in un intorno dello 0. Inoltre la funzione $\frac{\partial f}{\partial t}$ è limitata (dal momento che è continua a supporto compatto) in $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ ed è quindi anche uniformente continua sullo stesso insieme.

Quindi $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ h$ abbastanza piccolo tale che

$$\begin{aligned} H \leq \Bigg| &\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t+\theta_1 h) f(x-y, h(1-\theta_1))dy \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)dy \Bigg| + t\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque, per l'arbitrarietà di ε e considerando il limite per $h \to 0$, in virtù della continuità della funzione integrale, si ha che $H \to 0$. Dunque la derivata $\frac{\partial u}{\partial t}$ esiste ed è continua. Con un ragionamento analogo si può vedere che u è derivabile rispetto ad ogni variabile spaziale x_i, $i = 1, \ldots, n$ e che tale procedura può essere poi di nuovo applicata, ottenendo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y, t-s) dyds \quad (i,j = 1, \ldots, n),$$

quindi $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.

(ii). Fissato $\varepsilon > 0$, calcoliamo

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = & \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x-y,t-s) \right] dyds \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ponendo $v = t - s$ e $u = x - y$ e applicando il teorema di differenziabilità delle funzioni composte possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial v} \frac{\partial (t-s)}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial v} \frac{\partial (t-s)}{\partial s} = -\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s} \end{aligned} \tag{1.20}$$

e per $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial u} \frac{\partial (x-y)}{\partial x_i} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial u} \\ & = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(-\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial u} \frac{\partial (x-y)}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Inserendo nella (1.19) la (1.20) e la (1.21):

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\varepsilon}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dyds \\
&\quad + \int_{0}^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dyds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Ora, poiché f $\in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ ed è a supporto compatto, f_t e $D^2 f$ sono continue su un compatto e quindi anche essenzialmente limitate. Possiamo quindi scrivere

$$
|J_\varepsilon| \leq (||f_t||_{L^\infty} + ||D^2 f||_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) dyds \leq \varepsilon(||f_t||_{L^\infty} + ||D^2 f||_{L^\infty}).
\tag{1.23}
$$

utilizzando il Lemma 1.1. Analizziamo ora

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon = &- \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_\varepsilon^t \Phi(y,s) \frac{\partial}{\partial s} f(x-y,t-s) ds \right\} dy \\
&- \int_\varepsilon^t \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) \Delta_y f(x-y,t-s) dy \right\} ds
\end{aligned}
$$

Integrando per parti l'opposto del primo termine di questa somma, che chiamiamo $I_\varepsilon^{(s)}$, troviamo

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^{(s)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ [\Phi(y,s) f(x-y,t-s)]_{s=\varepsilon}^{s=t} - \int_\varepsilon^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) ds \right\} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^t \frac{\partial}{\partial s} \Phi(y,s) f(x-y,t-s) dsdy
\end{aligned}
$$

Dunque sostituendo:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon = &- \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \\ &+ \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y,s) \right] f(x-y,t-s) dyds \\ &= -K + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy, \end{aligned} \tag{1.24}$$

visto che Φ risolve l'equazione del calore. Combiniamo le (1.22)-(1.24) e osserviamo che, poichè non c'è dipendenza da ε nella differenza che dobbiamo stimare, possiamo passare al limite per $\varepsilon \to 0$ e ottenere

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \\ &= f(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0). \end{aligned}$$

Infatti, sfruttando il Lemma 1.1, la quantità

$$\begin{aligned} E &= \left| \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - f(x,t) \right| \\ &= \left| \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y,\varepsilon) \left[f(x-y,t-\varepsilon) - f(x,t) \right] dy \right| \\ &\leq \left| C \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y,t-\varepsilon) - f(x,t)| dy \right|, \end{aligned}$$

può essere resa minore di un arbitraria quantità piccola per la assoluta continuità della funzione integrale (Teorema A.1), dal momento che la funzione integranda dell'ultimo termine è sommabile (in quanto continua e a supporto compatto).

(iii). Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, stimiamo

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s) dyds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t ||f||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) dyds \right| \leq t||f||_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Quindi notiamo che $||u(\cdot,t)||_{L^\infty} \leq t||f||_{L^\infty} \to 0$ per $t \to 0^+$. $\square$

Soluzione del problema non omogeneo con generico dato iniziale. Naturalmente possiamo combinare i teoremi (1.1) e (1.2) per dedurre che se g ed f soddisfano le ipotesi precedenti, allora

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)dyds \quad (1.25)$$

è una soluzione di

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t=0\}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Capitolo 2

Proprietà delle soluzioni

2.1 Formula del valore principale

Innanzitutto diamo qualche utile definizione.

Definizione 2.1. *Dato un aperto limitato U di $\mathbb{R}^n$ e un tempo $T > 0$, definiamo* ***cilindro parabolico*** *l'insieme*

$$U_T := U \times (0, T];$$

definiamo ***frontiera parabolica di*** U_T *l'insieme*

$$\Gamma_T := \overline{U}_T - U_T.$$

Interpretiamo U_T come l'*interno parabolico* di $\overline{U} \times [0, T]$: notiamo attentamente che U_T include la base superiore del cilindro parabolico $U \times \{t = T\}$. La frontiera parabolica Γ_T comprende la base inferiore e il bordo verticale di $U \times [0, T]$, ma non la base superiore.

Definizione 2.2. *Fissati $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definiamo* ***heat ball*** *l'insieme*

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t,\ \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

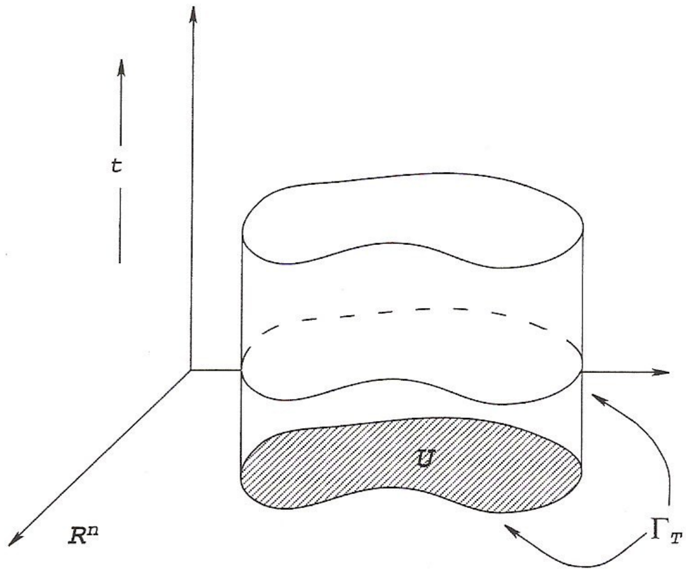

Figura 2.1: Il cilindro parabolico e la frontiera parabolica

Questa è una regione dello spazio-tempo, la frontiera della quale è un insieme di livello di $\Phi(x-y,t-s)$. Notiamo che il punto (x,t) è al centro della parte superiore.

Teorema 2.1 (Proprietà del valore principale per l'equazione del calore). *Sia $u \in C_1^2(U_T)$ una soluzione dell'equazione del calore. Allora*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds \tag{2.1}$$

per ogni $E(x,t;r) \subset U_T$.

Osservazione. Nel membro di destra vengono considerati i valori $u(y,s)$ solo per i tempi $s \leq t$. Ciò è ragionevole, perché il valore di $u(x,t)$ non dipende dai tempi futuri.

Dimostrazione. Spostiamo le coordinate dello spazio e del tempo in modo tale che $x = 0$ e $t = 0$. Se necessario prendiamo in esame la mollificazione

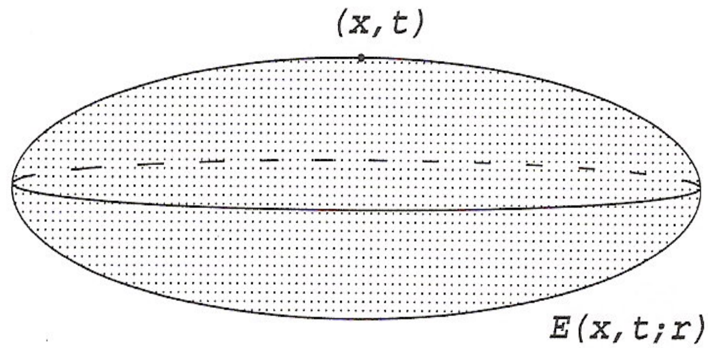

Figura 2.2: Una "*heat ball*"

della funzione u, al fine di poterla considerare regolare. Poniamo $E(r) = E(0,0;r)$ e

$$\begin{aligned}\phi(r) := \frac{1}{r^n}\iint_{E(r)} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}\,dyds &= \frac{1}{r^n}\iint_{E(1)} u(ry,r^2s)\frac{r^2|y|^2}{r^4s^2}\,r^n dyr^2ds\\ &= \iint_{E(1)} u(ry,r^2s)\frac{|y|^2}{s^2}\,dyds.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \iint_{E(1)}\left(\sum_{i=1}^n u_{ry_i}(ry,r^2s)y_i\frac{|y|^2}{s^2} + u_{r^2s}(ry,r^2s)2rs\frac{|y|^2}{s}\right)dyds\\ &= \iint_{E(r)}\left(\sum_{i=1}^n u_{y_i}(y,s)\frac{y_i}{r}\frac{|y|^2/r^2}{s^2/r^4} + u_s(y,s)2r\frac{s}{r^2}\frac{|y|^2/r^2}{s^2/r^4}\right)\frac{dy}{r^n}\frac{ds}{r^2}\\ &= \frac{1}{r^{n+1}}\iint_{E(r)}\sum_{i=1}^n u_{y_i}(y,s)y_i\frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s(y,s)\frac{|y|^2}{s}\,dyds\\ &=: A+B\end{aligned}$$

Se introduciamo la funzione

$$\psi := -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r, \tag{2.3}$$

osserviamo che $\psi = 0$ su $\partial E(r)$, dal momento che $\Phi(y,-s) = r^{-n}$ su $\partial E(r)$:

$$\Phi(y,-s) = r^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} = r^{-n} \Leftrightarrow e^{\frac{|y|^2}{4s}} = (-4\pi s)^{n/2} r^{-n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|y|^2}{4s} = \frac{n}{2}\log(-4\pi s) - \log r^n \Leftrightarrow \psi = 0$$

Fissato $i \in \{1,\dots,n\}$, derivando la (2.3) rispetto a y_i, otteniamo

$$\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
B &= \frac{4}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \iint_{E(r)} u_s y_i \psi_{y_i} \; dyds \\
&= \frac{4}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \Big[u_s y_i \psi \Big]_{\partial E(r)} - \iint_{E(r)} (u_s + u_{sy_i} y_i)\psi dyds \right\} \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n u_s \psi + 4 \sum_{i=1}^{n} u_{sy_i} y_i \psi \; dyds;
\end{aligned}$$

non c'è alcun termine di frontiera perché $\psi = 0$ su $\partial E(r)$. Integrando per parti rispetto a s il secondo termine, scopriamo che

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n u_s \psi dyds + 4 \sum_{i=1}^{n} \left\{ \Big[u_{y_i} y_i \psi \Big]_{\partial E(r)} - \iint_{E(r)} u_{y_i} \psi_s \; dyds \right\} \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n u_s \psi - 4 \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \psi_s \; dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n u_s \psi - 4 \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \; dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n u_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \; dyds - A.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, dal momento che u risolve l'equazione del calore

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= A + B \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n \Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^{n} u_{y_i} y_i \; dyds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4n u_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i \; dyds = 0,
\end{aligned}$$

per come è stata definita la ψ. Inoltre, possiamo verificare che

$$\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = 4.$$

Dunque, poiché la ϕ risulta costante rispetto ad r, possiamo verificare anche che

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0}\phi(t) = u(0,0)\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds\right) = 4u(0,0).$$

Per l'assoluta continuità di f in U_T, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, t$ abbastanza piccolo per cui

$$\begin{aligned}
H :&= |\phi(t) - 4u(0,0)| \\
&\leq \left|\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)} u(y,s)\frac{|y|^2}{s^2}dyds - u(0,0)\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)}\frac{|y|^2}{s^2}\, dyds\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)}\frac{|y|^2}{s^2}\,[u(y,s) - u(0,0)]\, dyds\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{t^n}\iint_{E(t)}\frac{|y|^2}{s^2}\varepsilon dyds\right| \leq 4\varepsilon
\end{aligned}$$

□

2.2 Principi del massimo, unicità

Innanzitutto impieghiamo la proprietà del valore principale (Teorema 2.1) per dare una immediata dimostrazione del principio del massimo forte.

Teorema 2.2. *Sia $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ una soluzione dell'equazione del calore in U_T. Allora*

(i) **(Principio del massimo per l'equazione del calore)**

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

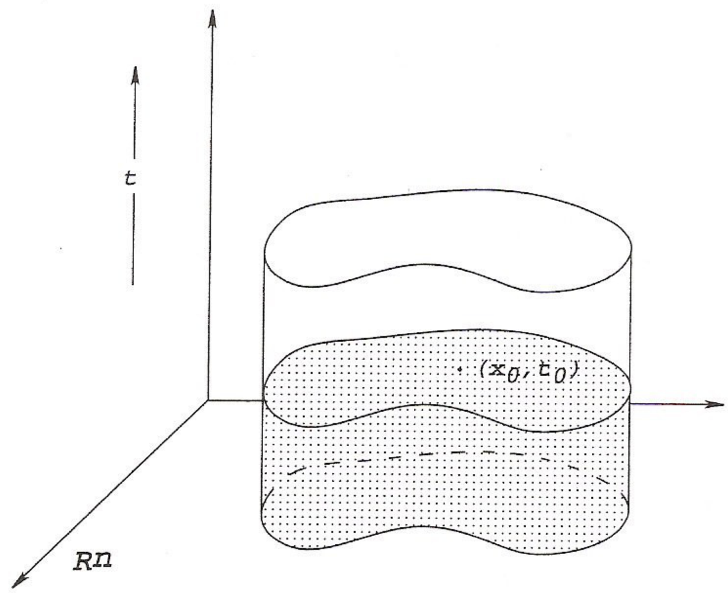

Figura 2.3: Principio forte del massimo per l'equazione del calore

(ii) **(Prinicipio del massimo forte per l'equazione del calore)**
se U è connesso ed esiste un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ tale che

$$u(x_0, t_0) = \max_{\Gamma_T} u,$$

allora u è costante in $\overline{U}_{t_0}$.

Questi teoremi valgono anche sostituendo i minimi ai massimi.

Interpretazione *Se u possiede il suo massimo (o minimo) in un punto interno, allora u è costante per tutti i tempi precedenti.* Questa considerazione è in accordo con l'interpretazione intuitiva in cui la variabile t denota il tempo: la soluzione è costante nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$ purché le condizioni iniziali e al contorno siano costanti. Comunque, la soluzione potrebbe cambiare nei tempi successivi a t_0, purché cambino le condizioni al contorno dopo t_0; ma potrebbe anche non rispondere ai cambiamenti delle condizioni al contorno.

Dimostrazione. (i). Supponiamo che esista un punto $(x_0, t_0) \in U_T$ con $u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{U}_T} u$. Allora per tutti gli $r > 0$ sufficientemente piccoli, $E(x_0, t_0; r) \subset U_T$. Utilizzando la proprietà del valore principale possiamo scrivere

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y,s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dyds \leq M$$

dal momento che

$$1 = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2}\, dyds.$$

Poichè l'uguaglianza si ha solo se u è identicamente uguale a M in $E(x_0, t_0; r)$, di conseguenza

$$u(y, s) = M \text{ per tutti gli } (y, s) \in E(x_0, t_0; r).$$

Tracciamo un segmento L in U_T che unisca (x_0, t_0) con $(y_0, s_0) \in U_T$, con $s_0 < t_0$. Consideriamo

$$r_0 := \min\{s \geq s_0 \mid u(x, t) = M \text{ per tutti gli } (x, t) \in L,\ s \leq t \leq t_0\}.$$

Poiché u è continua, il minimo è raggiunto. Assumiamo $r_0 > s_0$. Allora $u(z_0, r_0) = M$ per qualche punto (z_0, r_0) su $L \cap U_T$ e così $u \equiv M$ su $E(z_0, r_0; r)$ per tutti gli $r > 0$ sufficientemente piccoli. Dal momento che $E(z_0, r_0; r)$ contiene $L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$ per $\sigma > 0$ sufficientemente piccolo, abbiamo una contraddizione. Così $r_0 = s_0$, e quindi $u \equiv M$ su L.

(ii) Adesso fissiamo un certo punto $x \in U$ e un tempo $0 \leq t < t_0$. Esistono punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_m = x\}$ tali che i segmenti in $\mathbb{R}^n$ che connettono x_{i-1} a x_i si trovano in U per $i = 1, \ldots, m$ (Ciò segue dal fatto che l'insieme dei punti in U che può essere connesso a x_0 da una poligonale è non vuoto, aperto e relativamente chiuso in U). Scegliamo i tempi $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$. Allora il segmento in $\mathbb{R}^{n+1}$ che connette (x_{i-1}, t_{i-1}) a (x_i, t_i) $(i = 1, \ldots, m)$ si trova in U_T. Secondo quanto detto al passo (i), $u \equiv M$ su ogni segmento e così $u(x,t) = M$. $\square$

Infinita velocità di propagazione Il principio forte del massimo implica che se U è connesso e $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ soddisfa

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{su } \partial U \times [0,T] \\ u = g & \text{su } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dove $g \geq 0$, allora u è positiva *dovunque* in U_T se g è positiva *da qualche parte* in U. Questo è un altro modo per mettere in evidenza che una perturbazione di una soluzione dell'equazione del calore si propaga con velocità infinita.

Una importante applicazione del principio del massimo è il seguente teorema di unicità.

Teorema 2.3 (Unicità su domini limitati). *Sia $g \in C(\Gamma_T)$, $f \in C(U_T)$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ del problema ai valori iniziali e al contorno*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \textit{in } U_T \\ u = g & \textit{su } \Gamma_T. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Se u e $\tilde{u}$ sono due soluzioni della (2.4), applichiamo il Teorema (2.2) a $w := \pm(u - \tilde{u})$. $\square$

Estendiamo ora il teorema di unicità al problema di Cauchy, cioè al problema ai valori iniziali per $U = \mathbb{R}^n$. Poiché non consideriamo più una regione limitata, dobbiamo introdurre un controllo sul comportamento delle soluzioni all'aumentare di $|x|$.

Teorema 2.4 (Principio del massimo per il problema di Cauchy). *Supponiamo* $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *risolve*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \textit{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \textit{su } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.5}$$

e soddisfa la diseguaglianza

$$u(x,t) \leq A \exp a|x|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \tag{2.6}$$

con A *e* a *costanti* > 0. *Allora*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

Dimostrazione. Se ipotizziamo che

$$4aT < 1; \tag{2.7}$$

allora per qualche $\varepsilon > 0$ risulta

$$4a(T+\varepsilon) < 1. \tag{2.8}$$

Fissiamo $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$, e definiamo

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0).$$

Un calcolo diretto mostra che

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{in} \mathbb{R}^n \times (0,T].$$

Fissiamo $r > 0$ e poniamo $U := B^0(y,r)$, $U_T = B^0(y,r) \times (0,T]$. Allora secondo il Teorema 2.2,

$$\max_{\overline{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v. \tag{2.9}$$

Ora se $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x,0) = g(x); \tag{2.10}$$

e se $|x-y| = r, 0 \leq t \leq T$, allora

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \text{ (utilizzando la (2.6))} \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Ora secondo la (2.8), $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma$ per un certo $\gamma > 0$. Così potremmo continuare il calcolo per trovare

$$v(x,t) \leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{n/2} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g, \tag{2.11}$$

per un r sufficientemente grande (dal momento che l'espressione che maggiora $v(x,t)$ tende a $+\infty$ al crescere di r). Così le (2.9)-(2.11) implicano

$$v(y,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

per tutti gli $y \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, purchè la (2.7) sia valida. Per $\mu \to 0$ otteniamo la tesi nel caso in cui vale la (2.7), ma se questa fallisce, possiamo ripetutamente applicare il risultato sugli intervalli di tempo $[0, T_1]$,$[T_1, 2T_1]$, ecc. , con $T_1 = \frac{1}{8a}$. □

Teorema 2.5 (Unicità per il problema di Cauchy). *Sia $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ del problema ai valori iniziali*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases} \tag{2.12}$$

che soddisfa la diseguaglianza

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \tag{2.13}$$

con A, $a > 0$ costanti.

Dimostrazione. . Se u e $\tilde{u}$ soddisfano sia la (2.12) che la (2.13) applichiamo il Teorema 2.4 a $w := (u - \tilde{u})$. □

Soluzioni fisicamente non corrette. Ci sono molte soluzioni di

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.14}$$

che crescono rapidamente per $|x| \to \infty$. Ad esempio $u \equiv 0$ è certamente la soluzione “fisicamente corretta”del problema (2.14), ma questo ammette anche soluzioni “non fisiche”. Il Teorema 2.5 fornisce un criterio che esclude le soluzioni errate.

2.3 Metodo dell’energia

Analizziamo nuovamente il problema ai valori iniziali e al contorno

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \text{ in } U_T \\ u = g \text{ su } \Gamma_T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Precedentemente abbiamo utilizzato il principio del massimo per dimostrare l’unicità ed ora forniamo una dimostrazione alternativa basata sull’integrazione per parti. Innanzitutto diamo la seguente definizione

Definizione 2.3. *Un **dominio** limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e la sua frontiera sono **di classe** $\mathbf{C^k}$, se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un palla B di centro x_0 e una applicazione iniettiva $\Psi : B \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che:*

- $\Psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$;
- $\Psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;
- $\Psi \in C^k(B)$, $\Psi^{-1} \in C^k(D)$.

Teorema 2.6 (Unicità). *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato tale che ∂U sia C^1. Dato un tempo $T > 0$, esiste al più una soluzione $u \in C^2_1(\overline{U}_T)$ del problema (2.15).*

Dimostrazione. Se $\tilde{u}$ è un'altra soluzione del problema (2.15), allora la funzione $w := u - \tilde{u}$ risolve il problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } U_T \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_T \end{cases} \tag{2.16}$$

Poniamo

$$e(t) := \int_U w^2(x,t)dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

Allora, denotando con un puntino la derivata temporale,

$$\dot{e}(t) = 2\int_U ww_t dx = 2\int_U w\Delta w dx = 2\left\{\left[w \cdot Dw\right]_{\partial U} - \int_U |Du|^2 dx\right\} = \\ = -2\int_U |Dw|^2 dx \leq 0.$$

Dunque la funzione e(t) è decrescente in [0,T], per cui

$$e(t) \leq e(0) = 0 \ (0 \leq t \leq T).$$

Di conseguenza

$$\int_U w^2(x,t)dx = 0 \quad \text{con } 0 \leq t \leq T \Longrightarrow w^2 = 0 \quad \text{in } U_T \Longrightarrow w = 0 \quad \text{in } U_T \\ \Longrightarrow u - \tilde{u} \equiv 0 \quad \text{in } U_T.$$

□

Capitolo 3

Regolarità

3.1 Regolarità delle soluzioni

Dimostreremo che le soluzioni dell'equazioni del calore sono sempre regolari.

Teorema 3.1 (Regolarità). *Supponiamo che la funzione $u \in C_1^2(U_T)$ risolva l'equazione del calore in U_T. Allora*

$$u \in C^\infty(U_T).$$

Osservazione. Questo teorema di regolarità è valido anche se u assume valori al contorno non regolari su Γ_T.

Dimostrazione. Denotiamo con

$$C(x,t;r) = \{(y,s) | |x-y| \leq r, t-r^2 \leq s \leq t\}$$

il cilindro chiuso circolare di raggio r, altezza r^2 e con il punto (x,t) al centro della base superiore.

Fissiamo $(x_0, t_0) \in U_T$ e scegliamo $r > 0$ così piccolo che $C := C(x_0, t_0; r) \subset$

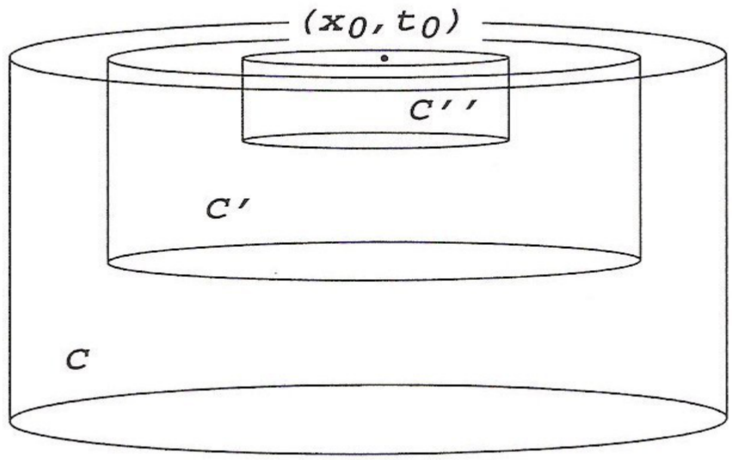

Figura 3.1: I cilindri C, C', C''

U_T. Definiamo anche i cilindri più piccoli $C' := C(x_0, t_0; \frac{3}{4}r)$ e $C'' := C(x_0, t_0, \frac{1}{2}r)$, che hanno al centro della base superiore lo stesso punto (x_0, t_0). Scegliamo una funzione regolare $\zeta = \zeta(x, t)$ tale che

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \; \zeta \equiv 1 \quad \text{su} \quad C', \\ \zeta \equiv 0 \text{ vicino la frontiera parabolica di C,} \end{cases}$$

Supponiamo inoltre che $\zeta \equiv 0$ in $(\mathbb{R}^n \times [0, t_0]) - C$. Assumiamo provvisoriamente che $u \in C^\infty(U_T)$ e poniamo

$$v(x, t) := \zeta(x, t)u(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq t_0).$$

Allora

$$v_t = \zeta u_t + \zeta_t u, \; \Delta v = \zeta \Delta u + 2D\zeta \cdot Du + u\Delta\zeta.$$

Di conseguenza

$$v = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \tag{3.1}$$

e

$$v_t - \Delta v = \zeta_t u - 2D\zeta \cdot Du - u\Delta\zeta =: \tilde{f} \tag{3.2}$$

in $\mathbb{R}^n \times (0, t_0)$. Ora poniamo

$$\tilde{v}(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\tilde{f}(y,s)dyds.$$

Secondo il Teorema 1.2

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta\tilde{v} = \tilde{f} \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, t_0) \\ \tilde{v} = 0 \text{ su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Poichè v e $\tilde{v}$ sono funzioni continue sul compatto C, risulta che $|v|$, $|\tilde{v}| \leq A$ per una certa costante A. Quindi per il Teorema 2.5 $v \equiv \tilde{v}$, ovvero

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-s)\tilde{f}(y,s)dyds. \tag{3.4}$$

Consideriamo ora che $(x,t) \in C''$. Poiché $\zeta \equiv 0$ fuori dal cilindro C, utilizzando la (3.2) e la (3.4), otteniamo

$$\begin{aligned} u(x,t) = \iint_C \Phi(x-y, t-s) \left[(\zeta_s(y,s) - \Delta\zeta(y,s))\, u(y,s) \right. \\ \left. -2D\zeta(y,s) \cdot Du(y,s) \right] dyds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dal momento che $\zeta \equiv 1$ su C', notiamo che l'espressione nelle parentesi quadre si annulla in una regione vicina alla singolarità di Φ: il punto $(x,t) \in C''$. Dunque la funzione integranda è regolare.

Sapendo che $\iint_C D\zeta \cdot Du = [D\zeta \cdot u]_{\partial C} - \iint_C \Delta\zeta \cdot u = -\iint_C \Delta\zeta \cdot u$ e che ζ ha derivate nulle sulla frontiera di C, integrando l'ultimo termine della (3.5) per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} \iint_C \Phi(x-y, t-s) D\zeta(y,s) \cdot Du(y,s) dyds \\ = -\iint_C D_y\Phi\Delta\zeta(y,s)u(y,s)dyds \end{aligned} \tag{3.6}$$

e inserendo la (3.6) nella (3.5):

$$\begin{aligned} u(x,t) = \iint_C \left[\Phi(x-y, t-s)\, (\zeta_s(y,s)) + \Delta\zeta(y,s)) \right. \\ \left. +2D_y\Phi(x-y, t-s) \cdot D\zeta(y,s) \right] u(y,s)dyds. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Abbiamo provato questa formula nell'ipotesi che $u \in C^\infty$. Se u soddisfa solo le ipotesi del teorema, arriviamo alla (3.6) sostituendo u con $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$, dove η_ε è la mollificatrice standard nelle variabili x e t, e $\varepsilon \to 0$.
Osserviamo che la formula (3.6) è del tipo

$$u(x,t) = \iint_C K(x,t,y,s)u(y,s)dyds \quad ((x,t) \in C''), \tag{3.8}$$

dove

$$K(x,t,y,s) = 0 \text{ per tutti i punti } (y,s) \in C',$$

poiché $\zeta \equiv 1$ su C'. Notiamo che anche K è regolare su $C - C'$. Dalla (3.8) poi ricaviamo che u è C^∞ in $C'' = C(x_0, t_0; \frac{1}{2}r)$. □

3.2 Stime locali per le derivate di ogni ordine

Ora facciamo alcune stime sulle derivate delle soluzioni dell'equazione del calore, prestando attenzione alle differenze tra le derivate rispetto a x_i ($i = 1, \ldots, n$) e rispetto a t.

Teorema 3.2 (stima sulle derivate). *Esiste per ogni coppia di interi $k, l = 0, 1, \ldots,$ una costante $C_{k,l}$ tale che*

$$\max_{C(x,t;r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}} ||u||_{L^1(C(x,t;r))}$$

per ogni cilindro $C(x,t;r/2) \subset C(x,t;r) \subset U_T$ e per ogni soluzione dell'equazione del calore in U_T.

Dimostrazione. Fissiamo un punto in U_T. Spostando le coordinate, si può sempre considerare il punto $(0,0)$. Supponiamo che il cilindro $C(1) := C(0,0;1)$ si trova in U_T. Sia $C(\frac{1}{2}) := C(0,0,\frac{1}{2})$. Allora, come nella dimostrazione del Teorema 3.1,

$$u(x,t) = \iint_{C(1)} K(x,t,y,s)u(y,s)dyds \quad \left((x,t) \in C\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

per opportune funzioni regolari K. Di conseguenza

$$|D_x^k D_t^l u| \leq \iint_{C(1)} |D_t^l D_x^k K(x,t,y,s)||u(y,s)|dyds \leq C_{k,l}||u||_{L^1(C(1))} \quad (3.9)$$

per opportune costanti $C_{l,k}$. Supponiamo ora che il cilindro $C(r) := C(0,0;r)$ si trovi in U_T. Sia $C(r/2) = C(0,0;r/2)$, operiamo un riscalamento definendo

$$v(x,t) := u(rx, r^2 t).$$

Allora $v_t - \Delta v = 0$ nel cilindro $C(1)$. Utilizzando la (3.9),

$$|D_x^k D_t^l v(x,t)| \leq C_{k,l}||v||_{L^1(C(1))} \quad \left((x,t) \in C\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Poichè $D_x^k D_t^l v(x,t) = r^{2l+k} D_x^k D_t^l u(rx, r^2 t)$ e

$$||v||_{L^1(C(1))} = \int C(1)|v(x,t)|dxdt = \int_{C(1)} |u(rx, r^2 t)|dxdt = \frac{1}{r^{n+2}}||u||_{L^1(C(r))},$$

allora

$$\max_{C(r/2)} |D_x^k D_t^l u| \leq \frac{C_{k,l}}{r^{k+2l+n+2}}||u||_{L^1(C(r))}. \qquad \square$$

Osservazione. Se u risolve l'equazione del calore in U_T, allora per ogni fissato istante $0 < t \leq T$, l'applicazione $x \to u(x,t)$ è analitica ed in ogni caso l'applicazione $t \to u(x,t)$ in genere non è analitica.

Appendice A

Richiami a risultati utili

A.1 Teoria della misura

Definizione A.1. *Sia X un arbitrario insieme non vuoto.*
*Definiamo σ**-algebra su X** una famiglia M di sottoinisiemi di X che verifica le seguenti proprietà:*

1. $X \in M$
2. $E \in M \Rightarrow X \setminus E \in M$
3. *Per ogni successione $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di M risulta che* $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in M$.

*Chiamiamo **spazio misurabile** la coppia (X, M).*

Definizione A.2. *Sia (X, M) uno spazio misurabile, (Y, τ) uno spazio topologico, diciamo che una **funzione** $f : X \to Y$ è **misurabile** se ha come antimmagine di ogni aperto un insieme misurabile, ovvero se e solo se (per definizione):*

$$\forall\ V \in \tau,\ \ f^{-1}(V) \in M.$$

Definizione A.3. *Sia (X, M) uno spazio misurabile, definiamo* ***misura in M*** *un'applicazione $\mu : M \to [0, +\infty]$ che verifica le seguenti proprietà*

1. *$\mu(\varnothing) = 0$*

2. *(numerabile additività). Per ogni successione $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di M, a due a due disgiunti, risulta $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.*

Chiamiamo ***spazio con misura*** *o* ***spazio mensurale*** *la terna (X, M, μ).*

Teorema A.1 (Assoluta continuità dell'integrale). *Sia (X, M, μ) uno spazio con misura e $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile, se $\int_X f d\mu < +\infty$, allora la misura $\nu : E \in M \to \int_E f d\mu$ è assolutamente continua rispetto a μ, cioè*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \mid \textit{per ogni } E \in M : \mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \varepsilon$$

Definizione A.4. *Siano $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ due punti di $\mathbb{R}^k$, chiamiamo* ***rettangolo (o intervallo) aperto di vertici*** **a** ***e*** **b** *l'insieme*

$$I = \{x \in \mathbb{R}^k\ :\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

chiamiamo ***rettangolo (o intervallo) chiuso di vertici*** **a** ***e*** **b** *la sua chiusura. Chiamiamo poi* ***plurintervallo*** *o* ***plurirettangolo*** *ogni insieme di punti che si possa rappresentare come unione di un numero finito di intervalli a due a due disgiunti.*

Definizione A.5. *Sia E un insieme compreso tra un intervallo I e la sua chiusura e sia $P = \bigcup_{i=1}^n I_i$ un plurirettangolo. Definiamo* ***misura elementare*** *μ l'applicazione per cui*

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i);$$

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{k} \mu(I_i).$$

Definizione A.6. *Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^k$, definiamo* ***misura interna secondo Jordan*** *di E l'applicazione per cui*

$$\mu_i(E) = \sup\{\mu(P),\ P \mathit{plurirettangolo},\ P \subseteq E\};$$

definiamo ***misura esterna secondo Jordan*** *di E l'applicazione per cui*

$$\mu_e(E) = \inf\{\mu(P),\ P \mathit{plurirettangolo},\ P \supseteq E\}.$$

Diciamo che un insieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ è ***misurabile secondo Jordan*** *se $\mu_i(E) = \mu_e(E)$ e indichiamo con $\mu(E)$ la sua misura.*

Definizione A.7. *Sia E un insieme limitato di $\mathbb{R}^k$, definiamo* ***misura interna secondo Lebesgue*** *di E l'applicazione per cui*

$$m_i(E) = \sup\{\mu_e(H),\ H \mathit{chiuso},\ H \subseteq E\};$$

definiamo ***misura esterna secondo Lebesgue*** *di E l'applicazione per cui*

$$m_e(E) = \inf\{\mu_i(A),\ A \mathit{aperto},\ A \supseteq E\}$$

Diciamo che un insieme limitato E di $\mathbb{R}^n$ è ***misurabile secondo Lebesgue*** *se $m_i(E) = m_e(E)$ e indichiamo con $m(E)$ la sua misura. Diciamo che un insieme illimitato E di $\mathbb{R}^n$ è* ***misurabile secondo Lebesgue*** *se $\forall\ n \in \mathbb{N}$ l'insieme $E \cap [-n, n]^k$ è misurabile secondo Lebesgue.*

Teorema A.2 (Teorema di differenziazione di Lebesgue). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < +\infty$, allora per quasi qualunque $x_0 \in \mathbb{R}^n$:*

$$\frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|dx \ \to 0 \quad per\ r \to 0$$

e tali punti vegono chiamati "punti di Lebesgue di f".

A.2 Spazi L^p

Definizione A.8. *Sia* (X, M, μ) *uno spazio con misura e* $f : X \to C$ *una funzione misurabile, allora:*

- *Se* p *è un numero reale* ≥ 1*:*

  - *Si definisce* ***norma* $\mathbf{L^p}$ *di* f** *il numero:*

  $$||f||_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{(1/p)}. \tag{A.1}$$

  - *Si indica con* $L^p(\mu)$ *lo* ***spazio delle funzioni a potenza p-esima sommabile****, ovvero*

  $$L^p(\mu) = \left\{ f : X \to C \ \textit{misurabile} \ : \ \int |f|^p d\mu < +\infty \right\}. \tag{A.2}$$

- *Si definisce* maggiorante essenziale per f *un numero non negativo* a *per il quale* $\mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0$*, cioè se* $|f(x)| \leq a$ *quasi ovunque in X. La funzione dotata di un maggiorante essenziale si dice* essenzialmente limitata *e allora:*

  - *Si definisce* ***estremo superiore essenziale per f*** *l'estremo inferiore dei maggioranti essenziali per f e si scrive:*

  $$||f||_{L^\infty} = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}. \tag{A.3}$$

  - *si indica con* $L^\infty(\mu)$ *lo* ***spazio delle funzioni essenzialmente limitate****, ovvero*

  $$L^\infty(\mu) = \{f : X \to C \ \textit{misurabile} \ : \ ||f||_{L_\infty} < +\infty\}. \tag{A.4}$$

Le norme precedentemente definite non sono tali negli spazi L^p, ma in tali spazi quozientati rispetto alla relazione per la quale due funzioni f e g

appartengono alla stessa classe se $m(\{x \in X \ : \ f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Tali spazi, provvisti delle suddette norme, sono spazi di Banach e, per semplicità, continuiamo a denotarli con L^p.

Teorema A.3 (Diseguaglianza di Hölder). *Siano p, $q \geq 1$ due esponenti coniugati (con $q = \infty$ se $p = 1$), $f \in L^p$, $g \in L^q$, allora:*

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}.$$

A.3 Mollificazione

Definizione A.9. *Sia $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione così definita:*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

con la costante $C > 0$ scelta in modo tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$.
Fissato $\varepsilon > 0$, chiamiamo ***mollificatrice standard*** *la funzione:*

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \dfrac{C}{\varepsilon^n} \exp\left(\dfrac{\varepsilon^2}{|x|^2 - \varepsilon^2}\right) & \text{se } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Definizione A.10. *Sia U aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile, ovvero integrabile su ogni sottoinsieme compatto del dominio, fissato un $\varepsilon > 0$, poniamo $U_\varepsilon := \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \varepsilon\}$ e definiamo* ***mollificazione di f*** *la convoluzione:*

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \quad \text{in } U_\varepsilon.$$

Questo vuol dire che

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x - y)f(y)dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)f(x - y)dy$$

per $x \in U_\varepsilon$.

Teorema A.4 (Proprietà delle funzioni mollificate). *Nelle ipotesi precedenti, si ha:*

- $f^\varepsilon \in C^\infty$
- $f \to f^\varepsilon$

Dimostrazione. (i). Fissiamo $x \in U_\varepsilon$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e osserviamo che per h abbastanza piccolo $x + he_i \in U_\varepsilon$; verifichiamo quindi che

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} &= \int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_V \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy,\end{aligned}$$

con $V \subset U$ aperto che contiene una traslazione del supporto di η, quindi possiamo supporre che sia un insieme limitato. Quindi consideriamo la quantità

$$H := \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \left\{ \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right\} f(y)dy \right|$$

Se applichiamo il teorema di Lagrange, sappiamo che $\exists\ 0 \le \theta \le 1$ tale che:

$$H = \left| \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \left[\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x+\theta he_i-y}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)dy \right|$$

La funzione $\eta(x,t)$ è infinitamente derivabile, con derivate di tutti gli ordini uniformemente limitate (perché è a supporto compatto) e quindi anche uniformente continue.

Quindi $\forall\ \nu > 0\ \exists\ h$ abbastanza piccolo tale che

$$H = \left| \frac{\nu}{\varepsilon^n} \int_V f(y)dy \right|$$

Dunque, per l'arbitrarietà di ν e per la locale integrabilità di f, $H \to 0$ per $h \to 0$. Dunque la derivata $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}$ esiste per $i = 1, \dots, n$ ed è continua. Un ragionamento simile porta a dimostrare che $D^\alpha f^\varepsilon(x)$ esiste e che è uguale a

$$\int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)dy$$

$\forall\ \alpha$ multiindice.

2. Fissiamo un punto x, allora

$$
\begin{aligned}
|f^{\varepsilon}(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta^{\varepsilon}(x-y)[f(y) - f(x)]dy \right| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)|dy \\
&\leq \frac{C}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|dy \ \to 0 \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0,
\end{aligned}
$$

utilizzando il Teorema A.2. □

A.4 Funzioni generalizzate o distribuzioni

Consideriamo lo spazio $\mathbf{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} |\ f$ dotata di derivata di qualsiasi ordine continua e a supporto compatto$\}$. Questo viene anche detto **spazio delle funzioni test** e indicato con K.

Definizione A.11. *Diciamo che una* ***succesione*** $\{\varphi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *di elementi di* K ***converge a 0 in K*** *se verifica le seguenti proprietà:*

- $\exists\ H$ *compatto* : *supp*$(\varphi_r) \subseteq H\ \forall\ r \in \mathbb{N}$;
- $\forall\ \{\varphi_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *successione convergente uniformemente a* 0 *in* H, *la successione* $\{D^\alpha \varphi_r\}_{r\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\partial^k \varphi_r}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n}_{r\in\mathbb{N}}\right\}$ *converge uniformemente a* 0 *in* $H\ \forall\ \alpha = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ *(con* $k = \sum_{i=1}^n k_i$*)*.

Definizione A.12. *Definiamo* ***distribuzione*** *o* ***funzione generalizzata*** *un'applicazione* $F : \varphi \in K \to F(\varphi) \in \mathbb{R}$ *che sia un funzionale lineare e continuo, ovvero che verifichi le seguenti proprietà:*

- ***(linearità)*** $F(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha F(\varphi_1) + \beta F(\varphi_2)\ \ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\ \ \forall\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in K$;

- ***(continuità)*** $\forall \, \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *successione convergente a* 0 *in* K*, la successione* $\{F(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

Il valore $F(\varphi)$ che il funzionale F assume in φ viene indicato anche con (F, φ) o F_φ.

Definizione A.13. *Il funzionale:*

$$\delta_0 : \varphi \in K \to \varphi(0) \in \mathbb{R} \tag{A.5}$$

si chiama ***funzione*** δ ***di Dirac****.*

Verifichiamo facilmente che questo è un funzionale lineare e continuo (quindi una distribuzione).

Bibliografia

[1] Lawrence Craig Evans, *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, 1998.

[2] Nicola Fusco, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone, *Analisi Matematica Due*, Liguori Editore, 1996.

[3] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[4] Yehuda Pinchover, Jacob Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equation*, Cambridge University Press, 2005.

[5] David Gilbarg, Neil Sidney Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 1998.

[6] Lawrence Craig Evans, Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992.