PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
9 Maggio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{nx-n},$$

al variare di x in $\mathbb{R}$, e calcolarne la somma.

2) (*10 punti*) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)e^{-x^2-y^2} + (x^4+y^4+1)\mathbb{1}_{C_1}(x,y),$$

dove $\mathbb{1}_{C_1}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1\,, \end{cases}$

(i) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano,
(ii) mostrare che f ha massimo e minimo assoluti sul piano e determinarli.

3) (*7 punti*) Sia $D = \{(x,y) : x \ge 0,\ (x^2+y^2)^2 \le x^2-y^2\}$. Si calcoli il baricentro di D.

4) (*10 punti*) Siano e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$e sia $Q = [-1,1]^3$. Posto per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$

$$f(\nu) = \iiint_Q |(x,y,z)\cdot\nu|^2 dxdydz,$$

(i) si calcoli $f(e_1)$;
(ii) si provi che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$;
(iii) si osservi che

$$\iiint_Q xy\, dxdydz = \iiint_Q xz\, dxdydz = \iiint_Q yz\, dxdydz = 0$$

(iv) si deduca dai passi (ii) e (iii) che per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$ si ha $f(\nu) = |\nu|^2 f(e_1)$.