PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

7 Giugno 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*10 punti*) Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\operatorname{sen}^2 x - x\tan^2 y}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{per } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(i) dire per quali valori di $\alpha > 0$ è continua nell'origine;
(ii) mostrare che se $\alpha \in (0,1)$ la funzione è differenziabile nell'origine;
(iii) fissato $\alpha = 1$, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$, dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un vettore unitario;
(iv) dedurre dalla formula ottenuta al punto (iii) che se $\alpha = 1$ allora f non è differenziabile nell'origine.

2) (*9 punti*) Data la funzione $f(x,y) = 4x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2+y^2+1$, determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e il codominio.

3) (*9 punti*) Data la forma differenziale

$$\frac{4x^2+4xy+ay^2+1}{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}dx+\left(\frac{4x^2+4xy+y^2+1}{2(8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3)}+y\right)dy,$$

determinare a in modo che la forma differenziale sia esatta e calcolarne la primitiva che in $(0,-1)$ vale 0.

4) (*8 punti*) Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\operatorname{sen} z - xy, \frac{y^2}{2} - e^z, x^2+y^2\right)$, determinare il flusso di F attraverso la porzione della superficie $x^2 + y^2 = z$ contenuta nel semispazio $z \leq 9$.