PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

4 Luglio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*8 punti*) Discutere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}}\Big) .$$

2) (*9 punti*) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 y + y \log(1 - x^2),$$

(i) determinare e rappresentare il suo dominio;
(ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel suo dominio;
(iii) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$;
(iv) determinare massimo e minimo assoluto di f su $Q = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2$.

3) (*9 punti*) Data la curva $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 + t)$, $t \in [-1, 1]$, calcolare il baricentro della regione di piano racchiusa dalla curva e dal segmento che ne congiunge gli estremi.
(Facoltativo: + 4 punti) Mostrare che la porzione di γ contenuta nel semipiano $\{x \leq 0\}$ coincide con il grafico di una funzione strettamente convessa $x = g(y)$ con minimo in $y = 0$.

4) (*9 punti*) Sia $E = P \setminus C$, dove P è la semipalla di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$ e C è il cono $\{z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
(i) Calcolare il volume e il baricentro di E.
(ii) Dato il piano $z = h$, scrivere l'equazione cui deve soddisfare h affinché tale piano divida E in due parti di ugual volume.