PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

4 Luglio 2016

Risoluzione a cura di N. Fusco & G. Floridia

1) Discutere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}} \Big) . \tag{1}$$

Svolgimento 1): La serie (1) è una serie di funzioni a termini di segno alterno del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x),$$

con $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}} \Big) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Per studiare l'assoluta convergenza di (1) consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}} \Big) . \tag{2}$$

Per $x = 0$ la serie (2) converge con somma 0. Proviamo che la serie (1) è assolutamente convergente se e solo se $x = 0$. Infatti, per la formula di Taylor si ha $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \cos \xi$, $\xi \in (0, t)$, quindi

$$1 - \cos t \geq \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!}, \quad \forall t \in (0, 1),$$

da cui segue

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x^4}{2\sqrt{n}} - \frac{x^8}{24n} \right) = \frac{x^4}{2n} - \frac{x^8}{24\sqrt{n^3}},$$

quindi per confronto la serie (2) diverge positivamente se $x \neq 0$,
essendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{2n} = +\infty$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^8}{24\sqrt{n^3}} < +\infty$, per $x \neq 0$.
Proviamo che la serie (1) converge puntualmente in $\mathbb{R}$. Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ la successione numerica $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ oltre ad essere infinitesima è definitivamente decrescente. Infatti, se si considera la funzione ausiliaria $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{t}} \Big)$ $(t \geq 0)$, si ha che esiste $\bar{t} > 0$ tale che $g'(t) \leq 0$, $\forall t \in [\bar{t}, +\infty)$. Allora, applicando il criterio di Leibniz si prova che la serie (1) converge puntualmente in ogni $x \in \mathbb{R}$, e inoltre si ha la seguente maggiorazione del resto $k-$esimo

$$|R_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n f_n(x) \right| \leq f_{k+1}(x). \tag{3}$$

Denotata con $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} (-1)^n f_n(x)$ la somma parziale $k-$esima della serie (1), si prova che $s_k(x)$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$, infatti da (3) segue

$$\begin{aligned}\left| s_k(x) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n f_n(x) \right| \\ &\leq f_{k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{k+1}} \Big) \leq \frac{2}{\sqrt{k+1}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

quindi la serie (1) converge uniformemente su $\mathbb{R}$.
La serie (1) non converge totalmente su qualsiasi intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, infatti

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \sup_{x\in I} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}} \Big) \right| = \frac{S_I}{\sqrt{n}},$$

con $S_I \in (0, 2]$, è il termine generale di una serie numerica, a termini non negativi, non convergente.

2) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 y + y \log(1 - x^2),$$

(i) determinare e rappresentare il suo dominio;
(ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel suo dominio;
(iii) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$;
(iv) determinare massimo e minimo assoluto di f su $Q = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2$.

Svolgimento 2): Osserviamo preliminarmente che

$$f(x, y) = h(x)k(y),$$

con $h(x) = x^2 + \log(1 - x^2)$ e $k(y) = y$.
(i) Il dominio di f è la striscia del piano

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1, 1)\}.$$

(ii) $f \in C^\infty(S)$ e per ogni $(x, y) \in S$ si ha

$$\nabla f(x, y) = (h'(x)k(y), h(x)k'(y)) = \left(-\frac{2x^3}{1 - x^2} y, x^2 + \log(1 - x^2) \right),$$

quindi

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, \bar{y}),\ \bar{y} \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, tenendo conto che $h'(x) = -\frac{2x^3}{1-x^2}$ e $k''(y) \equiv 0$, si ha

$$Hf(0,\bar{y}) = \begin{vmatrix} h''(0)k(\bar{y}) & h'(0)k'(\bar{y}) \\ h'(0)k'(\bar{y}) & h(0)k''(\bar{y}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h''(0)k(\bar{y}) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per classificare la natura dei punti critici di f è sufficiente osservare che dallo studio degli intervalli di monotonia della h si ha

$$h(x) < h(0) = 0 \quad \forall x \in (-1,1)\backslash\{0\},$$

quindi, per ogni $(x,y) \in S \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$

$$f(x,y) = yh(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } y < 0 \\ < 0 & \text{se } y > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Poichè $f(0,\bar{y}) = 0$, per ogni $\bar{y} \in \mathbb{R}$, dalla (4) segue che $(0,0)$ è un punto di sella, mentre i punti $(0,\bar{y})$, con $\bar{y} < 0$, sono punti di minimo relativo per f, e i punti $(0,\bar{y})$, con $\bar{y} > 0$, sono punti di massimo relativo per f.
(iii) Fissato $\bar{x} \in (-1,1)\backslash\{0\}$, tenendo conto che $h(\bar{x}) < 0$, si ha

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(\bar{x},y) = \lim_{y\to\pm\infty} h(\bar{x})y = \mp\infty,$$

da cui segue che il codominio di f è $(-\infty,+\infty)$.
(iv) Per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluto sul quadrato Q. La (4) permette di escludere che il massimo e il minimo siano assunti nei punti critici interni, essendo $f(0,\bar{y}) = 0$ $\forall \bar{y} \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Studiamo la restrizione della funzione f alla frontiera di Q :

- $k_1(y) = f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y) = \left(\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2}\right) y,\ \ y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;
- $h_1^{\pm}(x) = f(x, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}h(x),\ \ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Tenendo conto che la funzione k_1 è strettamente monotona, mentre le funzioni h_1^+ e h_1^- hanno entrambe un unico punto critico interno in $x = 0$, il massimo e il minimo assoluto di f su Q vanno ricercati nel seguente insieme numerico

$$\left\{ f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\} = \left\{ \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2}\right), 0 \right\}.$$

Quindi,

$$\max_Q f = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$\min_Q f = f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right).$$

3) Data la curva $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 + t)$, $t \in [-1, 1]$, calcolare il baricentro della regione di piano racchiusa dalla curva e dal segmento che ne congiunge gli estremi.
(Facoltativo:) Mostrare che la porzione di γ contenuta nel semipiano $\{x \leq 0\}$ coincide con il grafico di una funzione strettamente convessa $x = g(y)$ con minimo in $y = 0$.

Svolgimento 3): Osserviamo preliminarmente che γ è una curva regolare e semplice con

$$\gamma'(t) = (6t, 3t^2 + 1), \quad t \in [-1, 1].$$

Per un grafico qualitativo è possibile osservare che $\gamma(-1) = (2, -2)$, $\gamma(0) = (-1, 0)$, $\gamma(1) = (2, 2)$, γ è quindi percorsa nel verso orario, inoltre, essendo $\gamma(-t) = (3t^2 - 1, -t^3 - t)$, $t \in [-1, 1]$, γ è una curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse. Calcoliamo il baricentro (x_G, y_G) del dominio piano D avente come frontiera la curva γ e il segmento che ne congiunge gli estremi, cioè $+\partial D = -\gamma \cup \gamma_1$, con $\gamma_1(s) = (2, 2s), s \in [-1, 1]$. Per la simmetria del dominio rispetto all'asse delle ascisse si ha $y_G = 0$. Calcoliamo $x_G = \frac{1}{m(D)} \iint_D x dx dy$. Applicando il teorema di Gauss-Green si ha:

$$m(D) = \iint_D dxdy = -\int_{+\partial D} ydx = -\int_{-\gamma} ydx - \underbrace{\int_{\gamma_1} ydx}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} y(t)x'(t)dt = 6\int_{-1}^{1} t(t^3 + t)dt = 12\int_{0}^{1} (t^4 + t^2)dt = \frac{32}{5},$$

$$\iint_D xdxdy = -\int_{+\partial D} xydx = -\int_{-\gamma} xydx - \underbrace{\int_{\gamma_1} xydx}_{=0} = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)x'(t)dt$$

$$= 6\int_{-1}^{1} t(3t^2 - 1)(t^3 + t)dt = 12\int_{0}^{1} (3t^6 + 2t^4 - t^2)dt = \frac{108}{35},$$

quindi, $G = (\frac{27}{56}, 0)$.

Svolgimento 3) Facoltativo: Dalle equazioni parametriche di γ, $\begin{cases} x = 3t^2 - 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$,

ricaviamo $\begin{cases} t^2 = \dfrac{x+1}{3} \\ y^2 = t^2(t^2 + 1)^2 \end{cases}$, $\quad (x \geq -1)$, da cui si ottiene l'equazione cartesiana

$$F(x, y) = y^2 - \frac{1}{27}(x + 1)(x + 4)^2 = 0.$$

Osserviamo che $F_x(x, y) = -\frac{1}{9}(x + 4)(x + 2) < 0$, $\ F_y(x, y) = 2y$. Per il teorema del Dini, $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $g(t)$, $(g(t) \geq -1)$

tale che $F(g(t),t)=0$, da cui derivando membro a membro si ha

$$F_x(g(t),t)g'(t)+F_y(g(t),t)=0,$$

quindi,

$$g'(t)=-\frac{F_y(g(t),t)}{F_x(g(t),t)}=\frac{18t}{(g(t)+4)(g(t)+2)}\geq 0 \Longleftrightarrow t\geq 0. \tag{5}$$

Dalla (5) si deduce che

$$g''(t)=18\frac{(g(t)+4)(g(t)+2)-2tg'(t)(g(t)+3)}{(g(t)+4)^2(g(t)+2)^2}>0, \tag{6}$$

quindi da (5) e da (6) segue che $x=g(t)$ è una funzione con minimo in $t=0$ strettamente convessa.

4) Sia $E=P\setminus C$, dove P è la semipalla di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $\{z\geq 0\}$ e C è il cono $\{z\geq\sqrt{x^2+y^2}\}$.
(i) Calcolare il volume e il baricentro di E.
(ii) Dato il piano $z=h$, scrivere l'equazione cui deve soddisfare h affinché tale piano divida E in due parti di ugual volume.

Svolgimento 4): Osserviamo preliminarmente che la semipalla P e il cono C si intersecano nella circonferenza $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2} \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$. Inoltre, si ha

$$E=P\setminus C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ z^2\leq x^2+y^2\leq 1-z^2\right\}$$

Per il seguito, per ogni $z\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, denoteremo con B_z l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ z^2\leq x^2+y^2\leq 1-z^2\}.$$

(i) Integrando per strati e passando alle coordinate polari si ha

$$m(E)=\iiint_E dxdydz=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dz\iint_{B_z}dxdy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dz\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_z^{\sqrt{1-z^2}}\rho d\rho$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2z^2)dz=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi. \tag{7}$$

Determiniamo il punto $G=(x_G,y_G,z_G)$ baricentro di E. Per ragioni di simmetria $x_G=y_G=0$, poichè ogni strato $E\cap\{z=k\}$, $k\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, ha come centro di simmetria il punto $(0,0,k)$. Calcoliamo $z_G = \frac{1}{m(E)} \iiint_E z dxdydz$. Procedendo similmente a (7) si ha

$$\begin{aligned}\iiint_E z dxdydz = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dz \iint_{B_z} dxdy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} z dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_z^{\sqrt{1-z^2}} \rho d\rho \\ = \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (z - 2z^3) dz = \frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

quindi $G = \left(0, 0, \frac{3\sqrt{2}}{16}\right)$.

(ii) Per ogni $h \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, determiniamo il volume della porzione di E

$$E_h = E \cap \{z \leq h\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z \in [0,h]\,,\, z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\} :$$

$$m(E_h) = \iiint_{E_h} dxdydz = \int_0^h dz \iint_{B_z} dxdy = \pi \int_0^h (1 - 2z^2) dz = \left(h - \frac{2}{3} h^3\right) \pi.$$

Il piano $z = h$ divide il solido E in due parti di ugual volume se e solo se $m(E_h) = \frac{1}{2} m(E)$, e quindi

$$m(E_h) = \frac{1}{2} m(E) \Longleftrightarrow 2h^3 - 3h + \sqrt{2} = 0.$$