PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

6 Settembre 2016

Risoluzione a cura di N. Fusco & G. Floridia

1) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(x^n\sqrt{n}\,\right)\right). \tag{1}$$

<u>**Svolgimento 1)**</u>: Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(x^n\sqrt{n}\,\right)\right)=0 \quad\iff\quad x\in[1,+\infty),$$

da cui segue che la serie (1) non converge puntualmente per ogni $x\in(-\infty,1)$. Usando l'identità

$$\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2},\ \ \forall t\in(0,+\infty),$$

per ogni $x\in[1,+\infty)$ il termine generale della serie (1) si può scrivere nel seguente modo

$$f_n(x):=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(x^n\sqrt{n}\,\right)=\arctan\frac{1}{x^n\sqrt{n}}.$$

Quindi, per $x\in[1,+\infty)$ la serie (1) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{x^n\sqrt{n}},$$

alla quale si può applicare il criterio del confronto asintotico, essendo una serie a termini positivi. Dal fatto che $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arctan\frac{1}{x^n\sqrt{n}}}{\frac{1}{x^n\sqrt{n}}}=1$ segue che, per ogni $x\in[1,+\infty)$, la serie (1) ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n\sqrt{n}}\,. \tag{2}$$

Per $x=1$, la serie (2) si riduce alla serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, che diverge positivamente. Per ogni $x\in(1,+\infty)$, applicando il criterio del rapporto alla serie (2) si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{x^n\sqrt{n}}}=\frac{1}{x}<1,$$

da cui segue la convergenza puntuale della serie (1) in $(1,+\infty)$. ([1])

[1] Si poteva equivalentemente procedere ponendo $y=\frac{1}{x}$ in (2), e osservando che la serie di potenze ottenuta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}y^n$ ha raggio di convergenza 1, quindi converge puntualmente per $y=\frac{1}{x}\in(0,1)$, cioè per $x\in(1,+\infty)$.

A questo punto notiamo che non si può avere convergenza uniforme su tutto l'intervallo $(1, +\infty)$, in quanto ciò implicherebbe la convergenza puntuale in $\overline{(1, +\infty)} = [1, +\infty)$. Proviamo che la serie (1) converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 1$.
Infatti, per ogni $a > 1$, tenendo conto che

$$\arctan t \leq t, \quad \forall t > 0,$$

si ha

$$\arctan \frac{1}{x^n \sqrt{n}} \leq \frac{1}{x^n \sqrt{n}} \leq \frac{1}{a^n \sqrt{n}}, \quad \forall x \in [a, +\infty),$$

da cui segue la totale convergenza in $[a, +\infty[$ della serie (1), essendo la serie numerica a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n \sqrt{n}}$ convergente (segue dalla convergenza puntuale della serie (2) con $x = a > 1$).

2) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy\, e^{-\sqrt{y^2 - x^2}}$$

nel dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, |x| \leq y\}$**.**
Svolgimento 2): Si può notare che non esistono punti critici interni a D, infatti

$$f_x(x, y) = ye^{-\sqrt{y^2 - x^2}} \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right) \neq 0, \ \forall (x, y) \in \mathring{D}.$$

Si noti che $\partial D = S_1 \cup \Gamma \cup S_2$, dove $S_1 = \left\{(t, t), t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\}$,
$\Gamma = \left\{(\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right\}$, $S_2 = \left\{(t, -t), t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]\right\}$. Valutiamo la funzione f sulla frontiera di D si ha:

- $h_1(t) = f(t, t) = t^2, \ \forall t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$; $\quad h_2(t) = f(t, -t) = -t^2, \ \forall t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$;
- $k(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta e^{-\sqrt{-\cos 2\theta}}, \qquad \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Si può notare che sia $h_1(t)$ sia $h_2(t)$ sono funzioni monotone, nei rispettivi insiemi di definizione considerati, inoltre dal fatto che

$$k'(\theta) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{-\cos 2\theta}} \left(2\cos 2\theta - \frac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}\right) < 0, \quad \forall \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

anche $k(\theta)$ è una funzione monotona su $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Tenendo conto di quanto precedentemente osservato, il massimo e il minimo assoluto di f su D vanno ricercati nel seguente insieme numerico $\left\{f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(0, 0)\right\} = \left\{\pm\frac{1}{2}, 0\right\}$. Quindi,

$$\max_D f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \min_D f = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

3) Determinare la famiglia $\mathcal{E}$ di tutte le funzioni $a(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che la forma differenziale

$$\omega = a(x,y)\,dx + \left(2xy + (1+y)e^{x^2+y}\right)\,dy$$

risulti essere esatta. Fissato un qualsiasi coefficiente $a \in \mathcal{E}$ calcolare il corrispondente insieme delle primitive di ω.

Svolgimento 3): Osserviamo che essendo la forma differenziale $\omega = \omega_a$ di classe C^1 su tutto il piano, quindi su aperto semplicemente connesso, l'esattezza di ω_a è caratterizzata dalla sua chiusura, quindi imponiamo

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + (1+y)e^{x^2+y}\right) = 2y + 2x(1+y)e^{x^2+y}.$$

Da ciò segue che

$$a(x,y) = \int \left(2y + 2x(1+y)e^{x^2+y}\right) dy = y^2 + 2xye^{x^2+y} + g(x), \quad g(x) \in C^1(\mathbb{R}),$$

quindi $\mathcal{E} = \left\{y^2 + 2xye^{x^2+y} + g(x),\ g(x) \in C^1(\mathbb{R})\right\}$.
Fissato un qualsiasi coefficiente $a \in \mathcal{E}$, ovvero fissata una funzione $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$, l'insieme delle primitive di ω è dato dalle funzioni

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \left(y^2 + 2xye^{x^2+y} + g(x)\right) dx \\ &= xy^2 + ye^{x^2+y} + h(y) + \int g(x)dx = xy^2 + ye^{x^2+y} + h(y) + G(x) + \bar{k}, \end{aligned}$$

dove $h(y) \in C^1(\mathbb{R})$, $G(x)$ è una particolare primitiva di g e $\bar{k} \in \mathbb{R}$. Inoltre, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + (1+y)e^{x^2+y} \Leftrightarrow h'(y) = 0,\ \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : h(y) = c,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Quindi, l'insieme delle primitive della forma ω_a è dato dalle funzioni

$$f(x,y) = xy^2 + ye^{x^2+y} + G(x) + k,\ k \in \mathbb{R},$$

dove G è una primitiva di g.

4) Sia Σ la superficie di equazioni parametriche $\left\{(uv, u+v, u-v) :\ u^2+v^2 \leq 4\right\}$.
Si determini:
(i) il piano tangente α alla superficie Σ nel punto $(-1,0,2)$;
(ii) il baricentro del solido delimitato dalla superficie cilindrica $\left\{(x,y,z) :\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$ e dai piani $z=0$ e α (determinato al punto precedente).

Svolgimento 4.i): Sia $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ u^2+v^2 \leq 4\right\}$ e $\phi : D \to R^3$, con

$$\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v)) = (uv, u+v, u-v).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} uv = -1 \\ u + v = 0 \\ u - v = 2 \end{cases}$$

si ha $\phi^{-1}(-1, 0, 2) = (1, -1)$. Inoltre si ha $\phi_u \wedge \phi_v = (-2, u + v, v - u)$, quindi $(\phi_u \wedge \phi_v)(1, -1) = (-2, 0, -2)$, da cui l'equazione del piano tangente α alla superficie Σ nel punto $(-1, 0, 2)$ è

$$-2(x + 1) + 0 \cdot y - 2(z - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -x + 1 \,.$$

Svolgimento 4.ii): Si noti che $z = -x + 1 \geq 0$ se $x \leq 1$, quindi denotato con T il solido descritto in (ii) si ha:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in E,\ 0 \leq z \leq -x + 1\right\},$$

con $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.
Determiniamo il baricentro $G = (x_G, y_G, z_G)$ del solido T. Poichè il piano $y = 0$ è piano di simmetria per il solido T si ha $y_G = 0$.
Tenuto conto che il piano $z = -x + 1$ è piano di simmetria per il cilindro $C = \{(x, y, z) | (x, y) \in E, 0 \leq z \leq 2\}$ si ha

$$Vol(T) = \frac{1}{2} Vol(C) = \frac{1}{2} \cdot [Area(E) \cdot 2] = 2\pi \,.$$

Applicando la formula di riduzione per gli integrali tripli (essendo il dominio T normale rispetto al piano $z = 0$) ed effettuando l'usuale cambio di variabili (essendo il dominio piano E un'ellisse):

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos\theta \\ y(\rho, \theta) = 2\rho \sin\theta \end{cases} \quad \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi],$$

con determinante jacobiano $\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\rho\cos\theta \end{vmatrix} = 2\rho$, si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_T x\,dx\,dy\,dz &= \iint_E x\,dx\,dy \int_0^{-x+1} dz = \iint_E (-x^2 + x)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-\rho^2\cos^2\theta + \rho\cos\theta)\rho\,d\rho \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\,d\theta = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Procedendo similmente, a quanto fatto sopra, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iiint_T z\,dx\,dy\,dz &= \iint_E dx\,dy \int_0^{-x+1} zdz = \frac{1}{2}\iint_E (-x+1)^2\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 \cos^2\theta - 2\rho\cos\theta + 1)\rho d\rho \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta = \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{5}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Quindi, si può concludere che

$$G = \left(\frac{1}{Vol(T)}\iiint_T x\,dx\,dy\,dz,\;\; 0,\;\; \frac{1}{Vol(T)}\iiint_T z\,dx\,dy\,dz\right) = \left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{8}\right).$$