PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

20 Febbraio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - e^{y^5}}{(x^2+y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*9 punti*) Sia

$$f(x,y) = (x^2 + 9y^2 - 9)(x^2 - y^2 - 9),$$

determinare il segno di f e la natura dei suoi punti critici.

Sia $b > \frac{3}{2}$, si considerino gli insiemi

$$\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 9\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_b = \mathcal{I} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq b\},$$

calcolare il minimo e il massimo assoluto di f su $\mathcal{I}_b$ e l'estremo inferiore e superiore di f su $\mathcal{I}$.

3) (*8 punti*) Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq 0,\ y \geq 0,\ (x^2+y^2)^3 \leq 8x^2y^2\big\}$ e T il dominio di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse y. Determinare il volume del dominio T e la tangente alla curva ∂D nel punto (-1,1).

4) (*7 punti*) Siano $\beta > 0$, $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = xy^4 \arctan(xy) + \frac{1}{(x^2+y^2)^\beta}\,.$$

Calcolare al variare di β

$$L = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} f(x,y)\,dxdy,$$

dove $C_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(*3 punti*) Posto $E_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \backslash \{(x,y) : 4n^2x^2 + n^2y^2 \leq 1,\ n^2x^2 + 4n^2y^2 \leq 1\}$, si osservi che si ha $C_n \subset E_n \subset C_{2n}$ $\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se ne deduca che

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy = L.$$