PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Maggio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt{n}}{x^n + n^2},$$

al variare di $x \in [0, +\infty)$.
Detta f la somma di tale serie, provare che f è strettamente crescente in un intorno destro di 0.

2) (*10 punti*) Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+4y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

(i) determinare tutti i valori del parametro reale α per cui f ammette massimi e minimi assoluti sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$;

(ii) nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ determinare gli eventuali massimi e minimi assoluti di f su E;

(iii) risolvere uno a scelta dei seguenti due punti:

(a) determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$,

(b) determinare $\inf_E f$ e $\sup_E f$, al variare del parametro α.

3) (*9 punti*) Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{ax+by}{x^2+y^2}dx + \frac{cx+dy}{x^2+y^2}dy,$$

(i) dopo aver determinato le relazioni che devono verificare a, b, c e d per essere ω chiusa, calcolare $\int_\gamma \omega$ (per la corrispondente forma differenziale ω), dove γ è la circonferenza unitaria di centro l'origine;

(ii) determinare le relazioni che devono verificare a, b, c e d in modo che la forma differenziale ω sia esatta in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e calcolarne la primitiva che in $(0,1)$ vale 0 (Sugg.: dedurre dal punto (i) le relazioni "necessarie" su a, b, c e d).

4) (*8 punti*) Sia S la porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 compresa fra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. Calcolare

$$\int_S x^2 z \, d\sigma.$$