PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
20 Luglio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Determinare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^{2n}}{n(n+1)}$$

e calcolarne la somma.

2) (*9 punti*) Sia $f(x,y) = xy^2 e^{-(2x^2+y^2)}$, determinare:

(i) la natura dei punti critici di f;

(ii) l'estremo inferiore e superiore di f sul piano
(Suggerimento: si possono considerare, ad esempio, i quadrati $Q_r = [0,r]^2$, $r > 1$ contenuti nel primo quadrante).

3) (*9 punti*) Per $\varepsilon > 0$ l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon)^2} + y^2 = 1$$

contiene al suo interno il cerchio unitario e quindi ha lunghezza $L_\varepsilon > 2\pi$. Si calcoli

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{L_\varepsilon - 2\pi}{\varepsilon^2}$$

(Suggerimento: si sviluppi L_ε in serie di Taylor rispetto a ε).

4) (*8 punti*) Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{e^y}{4+x^2}\, dxdy = +\infty,$$

dove $D_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le n,\ 0 \le x \le e^{-|y|}\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$

(Suggerimento: si può calcolare il limite per confronto, ad esempio, dopo aver provato che $\displaystyle\iint_{D_n \cap \{y \ge 0\}} \frac{e^y}{4+x^2}\, dxdy \ge \frac{n}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).