PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Gennaio 2016

Nome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*8 punti*) Discutere la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x \Big(\tan \frac{x^n}{n} - \operatorname{sen} \frac{x^n}{n} \Big)$$

al variare di x in $[-1, 1]$.

2) (*7 punti*) Provare che la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy^3}{1 + x^2y^2}\, dx + \left(\log(1 + x^2y^2) + \frac{2x^2y^2}{1 + x^2y^2} \right) dy$$

è esatta, determinare l'insieme delle sue primitive e calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è l'arco di cardioide di equazione polare $\rho(\vartheta) = 1 + \cos\vartheta$ contenuto nel semipiano $\{y > 0\}$, percorso in senso orario.

3) (*8 punti*) Determinare massimo e minimo assoluto per la funzione

$$f(x, y) = x^4y - 2x^2y + \arctan y$$

sull'insieme $R = \big\{(x, y) : x \in [-1, 1],\, y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\big\}$. Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativi di f in tutto il piano.

4) (*9 punti*) Sia E l'intersezione del cilindro $\{(x, y, z) :\, x^2 + y^2 \le 1\}$ con la palla di centro l'origine e raggio 2. Si calcoli

$$\int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove ν è la normale esterna al bordo di E e $F = (xz^2, y^2z^2, xy)$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

25 Gennaio 2016

Nome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y^2}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*9 punti*) Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) = (2x^2+y^2-1)(x^2+y^2-1)+1$$

e determinare il massimo e il minimo assoluto di f sul generico cerchio di centro l'origine e di raggio $r > 1$. Calcolare l'estremo inferiore e superiore di f sul piano.

3) (*8 punti*) Data la forma differenziale

$$\frac{x(x^2-y^2+a)}{(y^2-x^2)^2}dx + \frac{y(y^2-x^2+1)}{(y^2-x^2)^2}dy,$$

determinare a in modo che la forma differenziale sia esatta e calcolarne la primitiva che in $(0,1)$ vale 0.

4) (*9 punti*) Sia D la regione del piano compresa fra l'asse delle x e la cicloide di equazione

$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\[2ex] y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Determinare il volume del dominio $T \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse x e l'area della superficie ∂T.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

15 Febbraio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{|x^3 y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*9 punti*) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (1-2y)\,e^{x^2-y^2}$,
(i) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$,
(ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano,
(iii) mostrare che f ha massimo e minimo assoluti nella striscia $\{(x,y) : |x| \leq 1\}$ e determinarli.

3) (*8 punti*) Siano Γ la circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 e

$$\gamma = \{(x,y) \in \Gamma : \, x \geq 0,\, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando γ di un giro completo intorno alla bisettrice del primo quadrante.

4) (*8 punti*) Sia C il solido ottenuto intersecando il cilindro circolare retto $\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\}$ con i piani $z=0$ e $z=2$ e sia P la palla di centro $(0,0,2)$ e raggio 1. Calcolare

$$\iiint_{C \setminus P} (x^2+y^2+(z-2)^2)\, dx\, dy\, dz.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
9 Maggio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{nx-n},$$

al variare di x in $\mathbb{R}$, e calcolarne la somma.

2) (*10 punti*) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)e^{-x^2-y^2} + (x^4+y^4+1)\mathbb{1}_{C_1}(x,y),$$

dove $\mathbb{1}_{C_1}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 > 1\,, \end{cases}$

(i) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano,
(ii) mostrare che f ha massimo e minimo assoluti sul piano e determinarli.

3) (*7 punti*) Sia $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ (x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2\}$. Si calcoli il baricentro di D.

4) (*10 punti*) Siano e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^3$e sia $Q = [-1,1]^3$. Posto per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$

$$f(\nu) = \iiint_Q |(x,y,z)\cdot\nu|^2 dxdydz,$$

(i) si calcoli $f(e_1)$;
(ii) si provi che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$;
(iii) si osservi che

$$\iiint_Q xy\,dxdydz = \iiint_Q xz\,dxdydz = \iiint_Q yz\,dxdydz = 0$$

(iv) si deduca dai passi (ii) e (iii) che per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$ si ha $f(\nu) = |\nu|^2 f(e_1)$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

7 Giugno 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*10 punti*) Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \operatorname{sen}^2 x - x \tan^2 y}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(i) dire per quali valori di $\alpha > 0$ è continua nell'origine;
(ii) mostrare che se $\alpha \in (0,1)$ la funzione è differenziabile nell'origine;
(iii) fissato $\alpha = 1$, calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$, dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un vettore unitario;
(iv) dedurre dalla formula ottenuta al punto (iii) che se $\alpha = 1$ allora f non è differenziabile nell'origine.

2) (*9 punti*) Data la funzione $f(x,y) = 4x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 2x^2 + y^2 + 1$, determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e il codominio.

3) (*9 punti*) Data la forma differenziale

$$\frac{4x^2+4xy+ay^2+1}{8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3}dx + \left(\frac{4x^2+4xy+y^2+1}{2(8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3)} + y\right)dy,$$

determinare a in modo che la forma differenziale sia esatta e calcolarne la primitiva che in $(0,-1)$ vale 0.

4) (*8 punti*) Dato il campo vettoriale $F(x,y,z) = \left(\operatorname{sen} z - xy, \frac{y^2}{2} - e^z, x^2+y^2\right)$, determinare il flusso di F attraverso la porzione della superficie $x^2 + y^2 = z$ contenuta nel semispazio $z \leq 9$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

4 Luglio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*8 punti*) Discutere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Big(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}}\Big).$$

2) (*9 punti*) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 y + y \log(1 - x^2),$$

(i) determinare e rappresentare il suo dominio;
(ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel suo dominio;
(iii) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$;
(iv) determinare massimo e minimo assoluto di f su $Q = \Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big]^2$.

3) (*9 punti*) Data la curva $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 + t)$, $t \in [-1, 1]$, calcolare il baricentro della regione di piano racchiusa dalla curva e dal segmento che ne congiunge gli estremi.
(Facoltativo: + 4 punti) Mostrare che la porzione di γ contenuta nel semipiano $\{x \leq 0\}$ coincide con il grafico di una funzione strettamente convessa $x = g(y)$ con minimo in $y = 0$.

4) (*9 punti*) Sia $E = P \setminus C$, dove P è la semipalla di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$ e C è il cono $\{z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
(i) Calcolare il volume e il baricentro di E.
(ii) Dato il piano $z = h$, scrivere l'equazione cui deve soddisfare h affinché tale piano divida E in due parti di ugual volume.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
6 Settembre 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \big(x^n \sqrt{n}\, \big) \Big).$$

2) (*7 punti*) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = xy\, e^{-\sqrt{y^2-x^2}}$$

nel dominio $D = \{(x,y) :\, x^2+y^2 \le 1,\, |x| \le y\}$.

3) (*8 punti*) Determinare la famiglia $\mathcal{E}$ di tutte le funzioni $a(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che la forma differenziale

$$\omega = a(x,y)\, dx + \Big(2xy + (1+y)e^{x^2+y} \Big)\, dy$$

risulti essere esatta. Fissato un qualsiasi coefficiente $a \in \mathcal{E}$ calcolare il corrispondente insieme delle primitive di ω.

4) (*9 punti*) Sia Σ la superficie di equazioni parametriche $\big\{(uv, u+v, u-v) :\, u^2+v^2 \le 4\big\}$.
Si determini:
(i) il piano tangente α alla superficie Σ nel punto $(-1,0,2)$;
(ii) il baricentro del solido delimitato dalla superficie cilindrica
$\Big\{(x,y,z) :\, x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\Big\}$ e dai piani $z=0$ e α (determinato al punto precedente).

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Novembre 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Discutere la continuità e la differenziabilità della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \quad \text{oppure se} \quad (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3 y(1+x)\log(1+x)}{x^4+y^4} & \text{altrove.} \end{cases}$$

2) (*8 punti*) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 e^{-y} + y^2 e^{-x}$$

nel quadrato $[-2,2] \times [-2,2]$.

3) (*8 punti*) Data la forma differenziale

$$\frac{xy}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{x^2-z^2}{2(1+x^2+z^2+x^2z^2)}\,dy - \frac{yz}{(1+z^2)^2}\,dz,$$

calcolarne la primitiva che in $(3,5,1)$ vale 0.

4) (*8 punti*) Dato $a > 0$, sia D la regione del piano compresa fra gli assi cartesiani e la curva

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2},\; x \geq 0,\; y \geq 0\right\}.$$

Determinare il volume del dominio $T \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse y e l'area della superficie ∂T.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

24 Gennaio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-(x^2+x)n}.$$

Detta f la somma di tale serie, provare che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,.$$

2) (*8 punti*) Calcolare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ sulla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) (*8 punti*) Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\frac{y}{1+xy}\,dx + \Big(\frac{x}{1+xy} + \frac{x}{y}\Big)dy$$

sulla curva $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [0,1]$, orientata nel verso delle x crescenti.
(Sugg.: Si osservi che la forma differenziale

$$\frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy$$

è esatta)

4) (*8 punti*) Calcolare

$$\iint_D \log\left(\frac{y^2}{x}\right) dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) :\ x \le y^2 \le 2x,\ 1 \le xy \le 2\}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

20 Febbraio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - e^{y^5}}{(x^2+y^4)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*9 punti*) Sia

$$f(x,y) = (x^2 + 9y^2 - 9)(x^2 - y^2 - 9),$$

determinare il segno di f e la natura dei suoi punti critici.

Sia $b > \frac{3}{2}$, si considerino gli insiemi

$$\mathcal{I} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 9\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_b = \mathcal{I} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq b\},$$

calcolare il minimo e il massimo assoluto di f su $\mathcal{I}_b$ e l'estremo inferiore e superiore di f su $\mathcal{I}$.

3) (*8 punti*) Sia $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \leq 0,\ y \geq 0,\ (x^2+y^2)^3 \leq 8x^2y^2\big\}$ e T il dominio di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse y. Determinare il volume del dominio T e la tangente alla curva ∂D nel punto (-1,1).

4) (*7 punti*) Siano $\beta > 0$, $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = xy^4 \arctan(xy) + \frac{1}{(x^2+y^2)^\beta}\,.$$

Calcolare al variare di β

$$L = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} f(x,y)\,dxdy,$$

dove $C_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(*3 punti*) Posto $E_n = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\} \backslash \{(x,y) : 4n^2x^2 + n^2y^2 \leq 1,\ n^2x^2 + 4n^2y^2 \leq 1\}$, si osservi che si ha $C_n \subset E_n \subset C_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se ne deduca che

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy = L.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Maggio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt{n}}{x^n + n^2},$$

al variare di $x \in [0, +\infty)$.

Detta f la somma di tale serie, provare che f è strettamente crescente in un intorno destro di 0.

2) (*10 punti*) Data la funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+4y^2)^{\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

(i) determinare tutti i valori del parametro reale α per cui f ammette massimi e minimi assoluti sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$;

(ii) nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ determinare gli eventuali massimi e minimi assoluti di f su E;

(iii) risolvere uno a scelta dei seguenti due punti:

(a) determinare $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$,

(b) determinare $\inf\limits_{E} f$ e $\sup\limits_{E} f$, al variare del parametro α.

3) (*9 punti*) Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{ax+by}{x^2+y^2}dx + \frac{cx+dy}{x^2+y^2}dy,$$

(i) dopo aver determinato le relazioni che devono verificare a, b, c e d per essere ω chiusa, calcolare $\int_\gamma \omega$ (per la corrispondente forma differenziale ω), dove γ è la circonferenza unitaria di centro l'origine;

(ii) determinare le relazioni che devono verificare a, b, c e d in modo che la forma differenziale ω sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e calcolarne la primitiva che in $(0,1)$ vale 0 (Sugg.: dedurre dal punto (i) le relazioni "necessarie" su a, b, c e d).

4) (*8 punti*) Sia S la porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 compresa fra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. Calcolare

$$\int_S x^2 z \, d\sigma.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
8 Giugno 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(xy)}{(x^6+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*8 punti*) Calcolare gli eventuali punti di minimo e massimo relativi e assoluti in tutto il piano della funzione $f(x,y) = x^2 e^{-3\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

3) (*8 punti*) Sia S la superficie grafico della funzione $f(x,y) = x^2y^2$ definita nel cerchio di centro l'origine e raggio 1. Sia γ il bordo di tale superficie orientato in senso orario rispetto ad un osservatore posto nell'origine degli assi e con la testa rivolta verso il semiasse positivo delle z. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2+1}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dy + \frac{z}{x^2+y^2+1}\,dz.$$

4) (*9 punti*) Sia $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Calcolare:
(i) il baricentro di E;
(ii) $\displaystyle\iiint_E \left(9x^2 + 4(y-3z)^2\right)\,dx\,dy\,dz\,.$
(Sugg.: Si può effettuare il cambio di variabili in coordinate ellittiche-polari nello spazio)

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

20 Luglio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Determinare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^{2n}}{n(n+1)}$$

e calcolarne la somma.

2) (*9 punti*) Sia $f(x,y) = xy^2 e^{-(2x^2+y^2)}$, determinare:

(i) la natura dei punti critici di f;

(ii) l'estremo inferiore e superiore di f sul piano (Suggerimento: si possono considerare, ad esempio, i quadrati $Q_r = [0,r]^2$, $r > 1$ contenuti nel primo quadrante).

3) (*9 punti*) Per $\varepsilon > 0$ l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon)^2} + y^2 = 1$$

contiene al suo interno il cerchio unitario e quindi ha lunghezza $L_\varepsilon > 2\pi$. Si calcoli

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{L_\varepsilon - 2\pi}{\varepsilon^2}$$

(Suggerimento: si sviluppi L_ε in serie di Taylor rispetto a ε).

4) (*8 punti*) Verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} \frac{e^y}{4+x^2}\, dxdy = +\infty,$$

dove $D_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le n,\ 0 \le x \le e^{-|y|}\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$

(Suggerimento: si può calcolare il limite per confronto, ad esempio, dopo aver provato che $\displaystyle\iint_{D_n \cap \{y \ge 0\}} \frac{e^y}{4+x^2}\, dxdy \ge \frac{n}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2
Corso di laurea in Matematica
13 Settembre 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*9 punti*) Studiare in $[-1,+\infty)$ la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{(x+1)^n}{e^{nx}}.$$
Denotato con A l'insieme in cui tale serie converge puntualmente e con $S(x)$ la sua somma, provare che
$$S(x) \leq \frac{x+1}{e^x - x - 1}, \quad \forall x \in A.$$

2) (*8 punti*) Determinare massimo e minimo assoluto della funzione
$$f(x,y) = (y - x^3 - x^2)^3$$
sul dominio $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \, x + 2y \geq 0\}$.
(Facoltativo: +2 punti) Cosa si può dire sulla natura dei punti critici della funzione f nel piano?

3) (*7 punti*) Calcolare
$$\int_\gamma (z-y)\,dx + (x+z)\,dy - (x+y)\,dz,$$
dove γ è la porzione di curva contenuta nel primo ottante ottenuta dall'intersezione dell'ellissoide di equazione $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e del piano $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, orientata dalla scelta del punto $(0,0,2)$ come primo estremo.

4) (*8 punti*) Calcolare
$$\iint_D (x^2 - y^2)\,dxdy,$$
dove $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4, \, x - y \leq 0\}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

6 Novembre 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (*8 punti*) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}\, y\, z^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

2) (*9 punti*) Data la funzione $f(x,y) = x^2y^3(1+x+y)$, determinare:
(i) gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano;
(ii) il massimo e il minimo assoluto di f su $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

3) (*8 punti*) Data la forma differenziale

$$\frac{y^2}{x^2+y^4}\, dx - \frac{2xy}{x^2+y^4}\, dy\,,$$

studiarne l'esattezza ed eventualmente calcolarne l'insieme delle primitive.

4) (*8 punti*) Sia S il solido delimitato dalla sfera di raggio $\sqrt{2}$ centrata nell'origine e dal paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcolare

$$\iiint_S \big(x^2+y^2+z^2+\sin(xy^2z)-1\big)\; dx\, dy\, dz.$$